



**Дж. Бендат, А. Пирсол**

**ПРИМЕНЕНИЯ  
КОРРЕЛЯЦИОННОГО  
И СПЕКТРАЛЬНОГО  
АНАЛИЗА**



# **Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis**

Julius S. BENDAT  
Mathematical Consultant in Random Data Analysis

Allan G. PIERSOL  
Senior Scientist, Bolt Beranek & Newman, Inc.

A Wiley-Interscience Publication  
JOHN WILEY & SONS  
New York · Chichester · Brisbane · Toronto  
1980

Дж. Бендат, А. Пирсол

**ПРИМЕНЕНИЯ  
КОРРЕЛЯЦИОННОГО  
И СПЕКТРАЛЬНОГО  
АНАЛИЗА**

*Перевод с английского*  
А. И. КОЧУБИНСКОГО,  
канд. физ.-мат. наук В. Е. ПРИВАЛЬСКОГО  
*под редакцией*  
акад. АН УССР И. Н. КОВАЛЕНКО

Москва «Мир»  
1983

ББК 22.171  
Б 46  
УДК 519.24

Бендат Дж., Пирсол А.

**Б 46** Применения корреляционного и спектрального анализа:  
Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 312 с., ил.

В книге известных американских специалистов рассмотрены методы анализа многомерных временных рядов, описывающих реальные процессы в различных областях техники. Наряду с традиционными методами спектрального и корреляционного анализа изложены новые подходы к решению практически важных задач. Рассмотрены особенности реализации описанных алгоритмов на ЭВМ.

Для инженеров и научных работников, занимающихся исследованием случайных процессов.

Б  $\frac{1702060000-063}{041(01)-83}$  139-83, ч. 1

ББК 22.171

*Редакция литературы по новой технике*

Copyright © 1980 by John Wiley & Sons, Inc.  
All rights reserved. Authorized translation from  
English language edition published by John Wi-  
ley & Sons, Inc.  
© Перевод на русский язык, «Мир», 1983.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга Дж. Бендата и А. Пирсола посвящена применению методов корреляционного и спектрального анализа к исследованию одноканальных и многоканальных систем, на вход которых поступают случайные процессы. Основное внимание уделяется задачам идентификации трактов распространения случайных сигналов, определения местонахождения одного или нескольких источников сигналов и оценки их вклада в суммарный наблюдаемый выходной сигнал. Излагаются способы оценивания частотных характеристик таких систем. Описанные в книге методы можно с успехом использовать не только в указанных авторами областях, но и при решении аналогичных задач в геофизике, океанологии, биологии, медицине и т. п.

Книгу отличает ее практическая направленность. Это находит отражение как в характере изложения, так и в подборе материала. Как правило, после краткого изложения теоретических результатов на большом числе примеров показывается, как эти результаты следует применять. В книге даются рекомендации по эффективному использованию описанных методов и правильной интерпретации полученных данных. Большое внимание уделяется исследованию погрешностей, неизбежных при анализе случайных по своей природе данных. Значительный интерес представляет гл. 10, посвященная вычислительным аспектам рассматриваемых в книге задач, в том числе машинному моделированию спектральных матриц, необходимых для имитационного моделирования одномерных и многомерных процессов, которые в свою очередь применяются как входные сигналы при изучении реакции различных конструкций.

Изложение не отличается математической строгостью. Читатель, желающий ознакомиться с достаточно строгим, но в то же время не оторванным от приложений описанием используемых в книге понятий теории случайных процессов, может обратиться к известной монографии Б. Р. Левина «Теоретические осно-

вы статистической радиотехники» (М., Сов. радио, 1974—1975) или к книге С. А. Ахманова, Ю. Е. Дьякова и А. С. Чиркова «Введение в статистическую радиофизику и оптику» (М., Наука, 1981). Это поможет определить границы применимости развитых в книге методов.

Данная монография не исчерпывает всего многообразия подходов к решению задач такого рода; в частности, совершенно не упоминаются параметрические методы, но не вызывает сомнения, что она окажется полезной широкому кругу специалистов, использующих в своей работе методы корреляционного и спектрального анализа.

Академик АН УССР *И. Н. Коваленко*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Со времени выхода в свет в 1971 г. нашей предыдущей книги (см. перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974) методы корреляционного и спектрального анализа получили широкое применение при решении инженерных задач. Это обусловлено в первую очередь появлением сравнительно недорогих вычислительных устройств, способных быстро производить расчеты, а также разработкой новых идей в области численного моделирования и интерпретации результатов анализа, которые сделали возможным решение многих сложных задач. Материал, изложенный в этой монографии, является дополнением к теоретическим основам и методам обработки данных, приведенным в упомянутой выше работе; здесь рассмотрены практические вопросы и инженерные приложения методов корреляционного и спектрального анализа, причем эта книга никоим образом не заменяет предыдущей монографии. Содержащиеся в ней результаты получены в основном при осуществлении различных проектов частных и государственных предприятий, с которыми мы были связаны с 1971 г. Подготовка книги способствовали также курсы лекций, которые авторы прочли в США и ряде стран Европы.

В связи с характером наших исследований основной иллюстративный материал, приведенный в книге, касается приложений теории колебаний, акустики, гидродинамики и теории идентификации систем для решения различных задач авиации и космонавтики, автомобильного и железнодорожного транспорта, контроля промышленных шумов, гражданского строительства и океанографии. Однако развитые здесь принципы и методы получили широкое применение и в других областях, в частности в биомедицине и при анализе временных рядов в экономике.

При написании книги мы стремились дать читателю, в распоряжении которого имеются вычислительная техника и комплексы программ, необходимые для оценивания спектральных и корреляционных функций, ответы на следующие важные вопро-

сы. 1) Какими данными необходимо располагать? 2) В чем заключаются основные задачи анализа и как их решать? 3) Какие именно функции нужно вычислять? 4) Как свести к минимуму систематические и случайные ошибки оценок? 5) Как правильно интерпретировать полученные результаты и понять их физический смысл? Ответить на эти вопросы можно, овладев искусством анализа реальных данных и физических систем, а также изучив математическую теорию, позволяющую предсказать результаты анализа идеальных данных и систем. Нам хотелось, чтобы эта книга послужила мостом для перехода от теоретических результатов, полученных с помощью различных аналитических моделей, к решению конкретных инженерных задач; с этой целью мы включили в нее детальное обсуждение целого ряда практических примеров.

Подход на основе корреляционной теории случайных процессов сопоставляется здесь с методами, основанными на оценивании спектров, функций когерентности и фазовых характеристик, что позволяет выявить наиболее существенные особенности этих двух типов анализа. Такое сопоставление дает возможность выбрать в каждом конкретном случае наиболее целесообразный способ решения и определить, какие именно данные необходимо собрать. Разумный инженерный подход при анализе данных наблюдений играет принципиальную роль особенно при выборе длины реализации и других параметров с целью минимизации систематических и случайных ошибок искомых оценок. Для лучшего понимания и большей надежности выводов, получаемых в результате анализа результатов наблюдений, этим вопросам нужно уделять максимум внимания.

Предполагается, что читатель знаком с основами анализа, рядами Фурье и теорией функций комплексного переменного. Кроме того, считается, что читатель знает, что такое частотная характеристика линейной системы, и знаком с основными понятиями теории вероятностей и математической статистики. Однако для большей полноты в первых двух главах книги дается краткий обзор этих вопросов. Основные принципы корреляционного и спектрального анализа наблюдений изложены в гл. 3. Традиционные методы анализа одномерной линейной системы и методы оценивания ее характеристик детально описаны в гл. 4 и 5. Здесь рассмотрены обычные функции когерентности, когерентные спектры, влияние обратной связи и помех на входе и выходе системы на оценки параметров, использование зондирующих сигналов и методы оценивания частотных характеристик.

Главы 6 и 7 посвящены задачам, связанным с оцениванием времени запаздывания и фазовых сдвигов. В гл. 6 описаны способы идентификации трактов и скоростей распространения сиг-

нала в дисперсных и бездисперсных системах по наблюдениям над входным и выходным процессами или только по данным о процессе на выходе системы. В гл. 7 рассмотрены аналогичные вопросы для системы с одним входным и несколькими выходными процессами, причем наблюдаемыми являются только процессы на выходе. Полученные здесь результаты используются для решения задачи идентификации источников энергии и оценивания частотных характеристик системы.

Главы 8—10 посвящены методам анализа многомерных систем и применениям функций частной и множественной когерентности. Принципиальные положения, относящиеся к системам с одним или несколькими процессами на выходе, изложены в гл. 8. Важная задача идентификации источников энергии, поступающей в многомерную систему с коррелированными и некоррелированными входными процессами, рассмотрена в гл. 9. Практические соображения относительно роли взаимодействия между измерениями входных процессов и влияния реверберации в системе иллюстрируются рядом примеров. В гл. 10 описаны эффективные алгоритмы цифрового анализа наблюдений. Соотношения между характеристиками многомерных систем с произвольным числом входов, полученные в этой главе, подробно рассматриваются вначале на примере системы с двумя входными процессами. Здесь же предложен метод моделирования спектральной матрицы с заданными элементами, описывающими спектры и взаимные спектры процессов в многомерной системе произвольной размерности.

В заключительной главе (гл. 11) приведены результаты, относящиеся к погрешностям оценок спектров, функций когерентности, частотных характеристик и других связанных с ними функций, которые подлежат оцениванию при анализе одномерных или многомерных систем. Ошибки оценок вероятностных и корреляционных функций рассмотрены в гл. 2 и 3. Эти простые в применении формулы показывают, какие исходные данные нужны для получения искомого экспериментальных результатов и каким образом следует оценивать и интерпретировать эти результаты.

Книга рассчитана прежде всего на инженеров и научных работников, но ее можно использовать и при проведении семинарских занятий с чтением курсов по отдельным главам книги и последующим самостоятельным изучением соответствующих вопросов. Для лучшего понимания материала следует организовывать практические занятия по сбору и анализу данных. Это поможет слушателям правильно подходить к решению конкретных инженерных задач, научит строить эффективные схемы анализируемых систем и учитывать точность оценивания искомого характеристик. Таким образом, книга может быть ис-

пользована как полезное руководство студентами-старшекурсниками, которые специализируются в области корреляционного и спектрального анализа данных наблюдений, а также преподавателями в их исследовательской работе.

Хочется выразить признательность нашим друзьям во многих странах за разрешение участвовать в проводимых ими прикладных исследованиях, за поддержку наших семинарских занятий и участие в них. Все это во многом способствовало написанию данной книги. Мы особенно благодарны нашему секретарю Конни Миллер за ее неустанную помощь при подготовке рукописи и Ингрид Салазар за работу по оформлению книги.

*Джулиус С. Бендат  
Аллан Дж. Пирсол*

Лос-Анджелес, Калифорния  
январь 1980

# Глава 1

## ВВЕДЕНИЕ

Физические явления, которые рассматриваются в инженерных задачах, описываются, как правило, функциями времени, называемыми *реализациями процесса*. При этом ордината реализации может представлять различные величины в зависимости от изучаемого явления (например, путь, скорость, ускорение, давление, угол, температуру и т. п.). Аналогичным образом абсциссой может служить любая другая независимая переменная (например, относительное время, пространственная координата, угловое положение и т. п.). Существуют физические явления, будущее поведение которых с вполне приемлемой точностью можно предсказать на основе физических соображений и (или) по данным прошлых наблюдений, например усилия, развиваемого несбалансированным вращающимся колесом, положения спутника на околоземной орбите или реакции сооружения на ступенчатую нагрузку. Такие явления называют *детерминированными*; методы анализа соответствующих им реализаций хорошо известны. Однако многие явления, с которыми приходится сталкиваться в инженерной практике, недетерминированы, и каждая серия измерений дает свою специфическую реализацию процесса, которая вряд ли повторится в будущем и которую нельзя предсказать с достаточно большой точностью. Эти процессы и порождающие их явления называются *случайными*.

Данная книга посвящена общим проблемам интерпретации и применения результатов анализа случайных процессов прежде всего с помощью корреляционных и спектральных функций. Настоящая вводная глава представляет собой краткий обзор предмета, содержащий описание основных свойств случайных процессов, рядов и интегралов Фурье и частотных характеристик физических систем. Более детальное изложение этих вопросов содержится в литературе, цитированной в конце главы.

### 1.1. Характеристики случайных процессов

Как было только что сказано, физические явления и порождаемые ими процессы называются случайными, если будущее поведение реализации, полученной в результате эксперимента,

нельзя предсказать с точностью, лежащей в пределах ошибок измерения. Такая реализация представляет лишь одно событие из множества событий, которые могли бы осуществиться при данном эксперименте. Для того чтобы получить полное представление о процессе, нужно исходить из свойств всего ансамбля реализаций, соответствующих изучаемому процессу (рис. 1.1). *Случайный процесс*  $\{x(t)\}$ , описывающий изучаемое явление, задается именно ансамблем его реализаций  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$ .

### 1.1.1. Стационарные процессы

Средние характеристики процесса  $\{x(t)\}$ , заданного ансамблем его реализаций, можно определить для любого заданного момента времени  $t_1$  путем усреднения по ансамблю. Например, *среднее значение* и *среднее значение квадрата* процесса в момент  $t_1$  определяются как (более подробно см. в гл. 2)

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1), \quad (1.1)$$

$$\psi_x^2(t_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2(t_1). \quad (1.2)$$

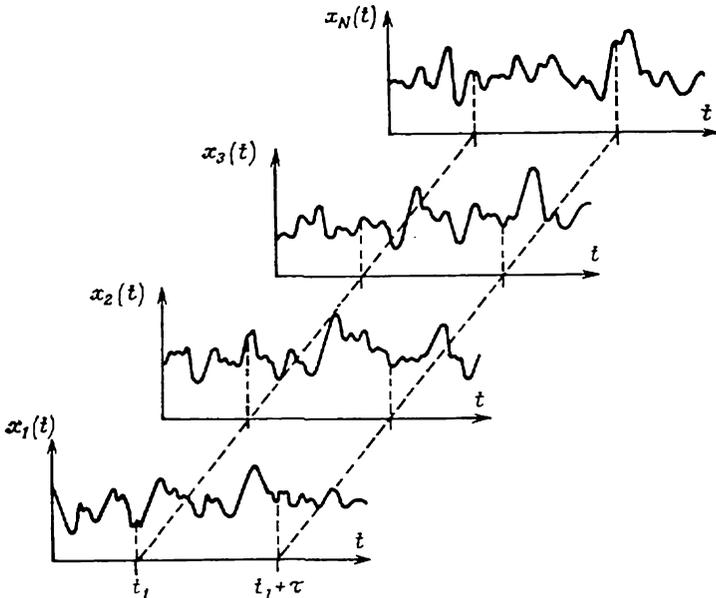


Рис. 1.1. Ансамбль реализаций случайного процесса.

Среднее произведение значений процесса в моменты  $t_1$  и  $t_1 + \tau$ , называемое *ковариационной функцией* при сдвиге  $\tau$ , задается формулой (более подробно см. в гл. 3)

$$R_{xx}(t_1, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1) x_i(t_1 + \tau). \quad (1.3)$$

Подобным образом можно определить сколь угодно много средних характеристик более высокого порядка. В общем случае, когда одно или несколько таких средних значений меняются с изменением момента  $t_1$ , процесс называется *нестационарным*. Если же все средние значения не зависят от момента  $t_1$ , то случайный процесс называется *стационарным*. Средние характеристики стационарного процесса для любого момента времени можно определить путем усреднения по ансамблю реализаций только в момент  $t_1$ .

### 1.1.2. Эргодические процессы

Средние характеристики почти любого стационарного процесса, найденные усреднением по ансамблю в момент  $t_1$ , совпадают с соответствующими средними величинами, вычисленными путем усреднения по времени в пределах одной реализации. Так, например, средние значения, заданные уравнениями (1.1)–(1.3), в большинстве случаев можно вычислять по формулам

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.4)$$

$$\psi_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (1.5)$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt, \quad (1.6)$$

где  $x(t)$  — произвольная реализация, принадлежащая ансамблю  $\{x(t)\}$ . Это утверждение вытекает из эргодической теоремы [1.1, 1.2], согласно которой в случае стационарного процесса средние характеристики, найденные усреднением по времени в пределах различных реализаций, совпадают друг с другом и с соответствующими средними, определенными путем усреднения по ансамблю реализаций в произвольный момент времени  $t$ .

Теорема справедлива, если выполняется условие

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^T |R_{xx}(\tau) + \mu_x^2| d\tau \rightarrow 0 \text{ при } T \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

На практике условие (1.7) нарушается обычно в тех случаях, когда процесс содержит периодические составляющие. Условие (1.7) служит достаточным, но не необходимым условием эргодичности, и поэтому к усреднению по времени можно часто прибегать даже при наличии периодических компонент или при других обстоятельствах, ведущих к невыполнению (1.7). В таких случаях нужно просто с большей осторожностью говорить о совпадении средних характеристик, определенных усреднением по времени в пределах различных реализаций.

### 1.1.3. Достоверность оценок

Число реализаций при вычислении параметров усреднением по ансамблю или длина реализации при анализе путем усреднения по времени всегда конечны. Это означает, что переход к пределу при  $N \rightarrow \infty$  в уравнениях (1.1)–(1.3) или при  $T \rightarrow \infty$  в уравнениях (1.4)–(1.6) практически неосуществим, и, следовательно, можно получать лишь некоторые оценки искомых средних характеристик, а не их истинные значения. Ошибки оценивания за счет конечности объема выборки имеют важное значение для интерпретации и практического применения результатов анализа. Поэтому в данной книге большое внимание уделено выводу формул, определяющих ошибки оценок параметров, которые чаще всего встречаются в практических задачах. Наиболее важные формулы обсуждаются в гл. 11 и в разд. 2.4 и 3.4.

Следует подчеркнуть, что приведенные здесь формулы описывают ошибки за счет выборочной изменчивости оценок, полученных при анализе рядов наблюдений конечного объема. Существуют и другие типы ошибок, которые могут возникать в процессе сбора и численной обработки данных наблюдений (например, ошибки измерения и калибровки, ошибки при записи на магнитную ленту и (или) передаче данных, ошибки перевода данных из непрерывной формы в дискретную и при предварительной обработке информации). Все эти потенциальные источники ошибок обязательно нужно иметь в виду и тщательно контролировать или по возможности учитывать их влияние на исходную информацию при помощи соответствующих методов калибровки. В дальнейшем предполагается, что погрешности подобного рода учтены или исправлены, так что исходные

реализации с достаточной точностью описывают изучаемые физические явления. Более подробное обсуждение ошибок, которые могут возникнуть в процессе сбора и предварительной обработки исходных данных, содержится в гл. 7 работы [1.3].

#### 1.1.4. Другие практические соображения

На практике всегда стремятся спланировать эксперимент таким образом, чтобы анализируемый процесс можно было считать стационарным; это вполне понятно, так как методы анализа нестационарных процессов отличаются заметно большей

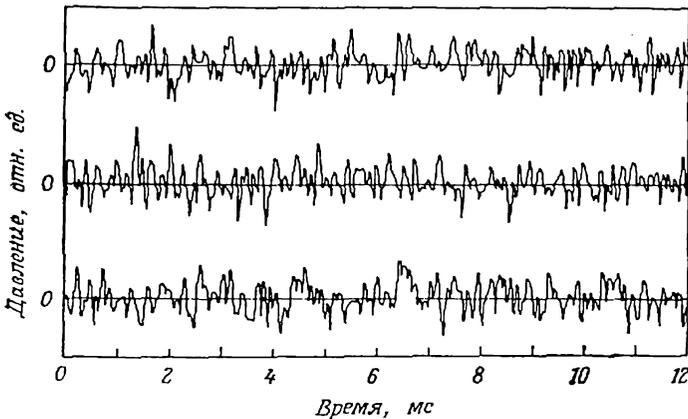


Рис. 1.2. Ансамбль пульсаций давления в аэродинамической трубе.

сложностью. В лабораторных условиях стационарности процесса можно добиться, просто сохраняя неизменными условия эксперимента. Например, при изучении давления, создаваемого потоком на внутренней поверхности аэродинамической трубы, стационарный характер процесса можно обеспечить, поддерживая постоянными скорость, плотность и температуру потока в каждом эксперименте. На рис. 1.2 приведены три реализации такого процесса, полученные при одинаковых условиях. Стационарность и эргодичность процесса очевидны.

Часто постоянные условия и, следовательно, стационарный характер данных нетрудно обеспечить и при экспериментах, проводимых в полевых условиях. Существуют, однако, исключения. К ним относятся такие ситуации, когда по характеру эксперимента поведение изучаемых объектов зависит от времени. Примерами могут служить колебания акустического давления в приземном слое атмосферы, создаваемые пролетающим самолетом, или вибрации космического корабля во время запуска.

В таких случаях эксперимент можно повторить и получить ансамбль реализаций, с достаточной полнотой описывающий исследуемый нестационарный процесс. Второй, более сложный тип исключений наблюдается в тех случаях, когда основные параметры процессов, описываемых данными наблюдений, определяются природой и не могут управляться экспериментатором. Сюда можно отнести, например, морское ветровое волнение и колебания скорости ветра. Реализация нестационарных

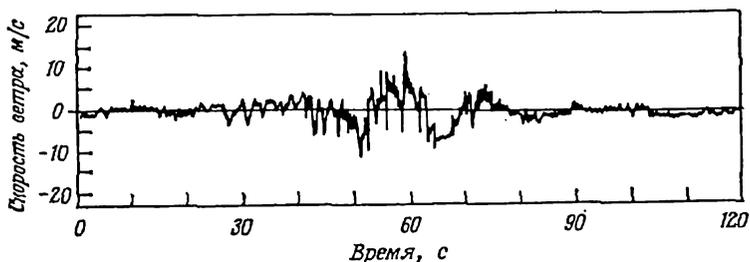


Рис. 1.3. Пример реализации нестационарного процесса: пульсации скорости ветра.

порывов скорости ветра показана на рис. 1.3. В такой ситуации нет возможности выполнить серию экспериментов и получить пригодный для анализа ансамбль реализаций. Здесь придется просто пользоваться тем, что есть. При анализе таких данных обычно выбирают из имеющихся реализаций квазистационарные участки, длина которых достаточно велика для получения статистически разумных результатов при данных условиях эксперимента. Иногда можно воспользоваться какими-либо нестационарными моделями, представляющими исходный процесс в виде суммы стационарного случайного процесса и нестационарных детерминированных компонент. Подобные методы и ряд других приемов анализа нестационарных процессов рассматриваются в гл. 10 работы [1.3]<sup>1)</sup>.

Данная книга посвящена прежде всего проблемам, связанным с анализом стационарных процессов и интерпретацией полученных при этом результатов. Однако здесь рассмотрен и один тип нестационарных процессов — *переходные* процессы, которые обусловлены кратковременно существующими нестационарными явлениями, имеющими четко выраженные начало и конец. Соответствующий пример приведен на рис. 1.4, где показан ансамбль реализаций ускорений, возникающих при ударной нагрузке на сооружение. Как будет показано в разд.

<sup>1)</sup> См. также книгу: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1971. — Прим. перев.

4.1.2, данные такого типа можно анализировать и интерпретировать практически на основе тех же методов, которые применяются в стационарном случае.

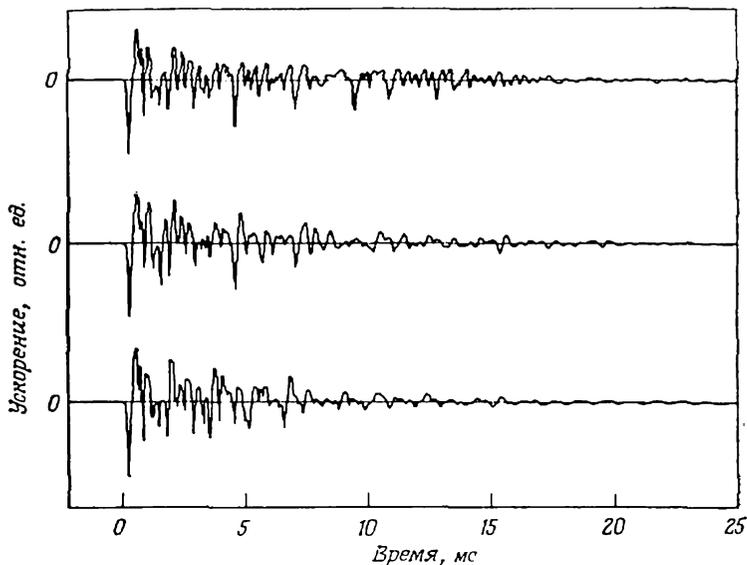


Рис. 1.4. Пример ансамбля реализаций переходного процесса: реакция сооружения на ударную нагрузку.

## 1.2. Ряды и преобразование Фурье

Разложение в ряд Фурье и преобразование Фурье имеют принципиальное значение для разработки и применения методов анализа, которым посвящена эта книга. Поэтому здесь приведены некоторые важнейшие соотношения из теории рядов Фурье и преобразования Фурье. Более подробные сведения можно найти в многочисленных учебниках, посвященных этому вопросу.

### 1.2.1. Ряды Фурье

Пусть  $x(t)$  — периодический процесс, имеющий период  $T$ . Тогда при любом значении  $t$  справедливо равенство

$$x(t) = x(t \pm kT), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

Фундаментальная частота  $f_1$  определяется как

$$f_1 = 1/T. \quad (1.9)$$

Такие периодические процессы можно, за немногими исключениями, разложить в ряд Фурье, т. е. представить в виде

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t), \quad (1.10)$$

где

$$f_k = k f_1 = k/T, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, процесс  $x(t)$  описывается суммой синусоид и косинусоид, частоты которых меняются дискретно с шагом  $\Delta f = f_1$ . Коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются следующими интегралами, взятыми по интервалу длиной  $T$  (например, от  $-T/2$  до  $+T/2$  или от 0 до  $T$ ):

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos 2\pi f_k t dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.11)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin 2\pi f_k t dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.12)$$

Заметим, что

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \mu_x, \quad (1.13)$$

где  $\mu_x$  — среднее значение процесса  $x(t)$ . Уравнения (1.10) — (1.13) хорошо известны, и их легко переписать в несколько иной форме, заменив циклическую частоту  $f$  на круговую частоту  $\omega = 2\pi f$  (так что  $d\omega = 2\pi df$ ). Однако в дальнейшем мы всегда будем пользоваться только циклической частотой  $f$ , выражаемой в герцах, а не круговой частотой  $\omega$ , имеющей размерность рад/с.

Нередко в теории рядов Фурье используются и две другие формулы, которые непосредственно следуют из простых тригонометрических соотношений и из элементарной теории комплексных чисел. Первая формула имеет вид

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(2\pi f_k t - \theta_k), \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} X_0 &= a_0/2, \\ X_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \\ \theta_k &= \arctg(b_k/a_k) \end{aligned}$$

Здесь функция  $x(t)$  задается в полярных, а не в прямоугольных координатах, и на каждой дискретной частоте  $f_k$  она имеет модуль  $X_k$  и аргумент  $\theta_k$ . Вторая из упомянутых формул имеет вид

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j2\pi f_k t}, \quad (1.15)$$

где

$$A_0 = a_0/2,$$

$$A_k = 1/2 (a_k - jb_k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f_k t} dt, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Последний результат основан на формуле Эйлера

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta. \quad (1.16)$$

Если функция  $x(t)$  действительная, ее ряд Фурье можно представить в комплексной форме как для положительных, так и для отрицательных частот. В частности, коэффициенты  $A_k$  комплексные:

$$A_k = |A_k| e^{-j\theta_k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (1.17)$$

где

$$|A_k| = 1/2 \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = X_k/2, \\ \theta_k = \text{arctg}(b_k/a_k).$$

Если  $x(t)$  — действительная функция  $t$ , то

$$|A_{-k}| = |A_k|, \quad \theta_{-k} = -\theta_k, \quad (1.18)$$

$$A_{-k} = |A_{-k}| e^{-j\theta_{-k}} = |A_k| e^{j\theta_k} = A_k^*,$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Многочисленные примеры разложения в ряд Фурье можно найти в различных учебниках.

### 1.2.2. Преобразование Фурье

Пусть реализация  $x(t)$  имеет непериодический характер, как, например, в случае переходного процесса (детерминированного или случайного) или стационарного случайного процесса. Тогда записанное выше представление в виде ряда Фурье можно обобщить, рассматривая поведение функции при  $T \rightarrow \infty$ . Это приведет к интегралу Фурье

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad -\infty < f < \infty, \quad (1.19)$$

который существует, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \tag{1.20}$$

Заданная уравнением (1.19) функция  $X(f)$  называется *прямым преобразованием Фурье* (или спектром) функции  $x(t)$ . В свою

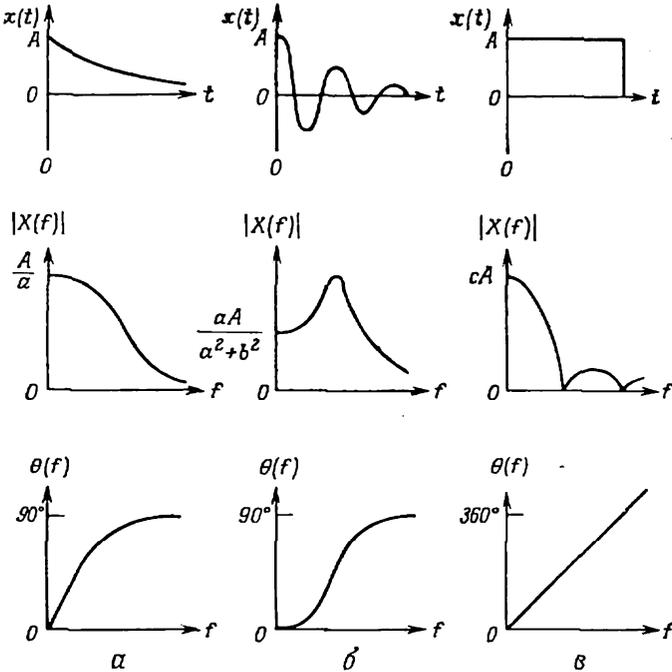


Рис. 1.5. Примеры преобразования Фурье.

очередь функция  $x(t)$  получается путем *обратного преобразования Фурье* функции  $X(f)$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df, \quad -\infty < t < \infty. \tag{1.21}$$

Уравнения (1.19) и (1.21), связывающие  $x(t)$  и  $X(f)$ , называются *парой преобразований Фурье*. Заметим, что в общем случае  $X(f)$  есть комплекснозначная функция частоты, определенной на всей действительной оси, даже в том случае, когда  $x(t)$  — действительная функция. Очевидно, что  $X(f)$  можно

представить в виде суммы действительной и мнимой компонент:

$$X(f) = X_R(f) - jX_I(f), \quad (1.22)$$

где

$$X_R(f) = |X(f)| \cos \theta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos 2\pi f t dt,$$

$$X_I(f) = |X(f)| \sin \theta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin 2\pi f t dt.$$

Здесь будет использоваться также запись  $X(f)$  в полярных координатах, т. е.

$$X(f) = |X(f)| e^{-j\theta(f)}, \quad (1.23)$$

где  $|X(f)|$  есть амплитудный спектр, а  $\theta(f)$  — фазовый спектр. Примеры преобразования Фурье трех реализаций переходных процессов показаны на рис. 1.5.

### 1.2.3. Финитное преобразование Фурье

Если  $x(t)$  — реализация стационарного случайного процесса, который теоретически существует при всех значениях  $t$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty. \quad (1.24)$$

Следовательно, преобразование Фурье функций  $x(t)$ , заданное уравнением (1.19), не существует. Однако никакие измерения, ни в лаборатории, ни в полевых условиях, нельзя вести бесконечно долго, т. е. при значениях  $t$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . В действительности реализация  $x(t)$  всегда наблюдается в течение конечного интервала времени  $T$ , так что функция  $X(f)$  оценивается путем *финитного преобразования Фурье*, которое имеет вид

$$X_T(f) = X(f, T) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (1.25)$$

При ограниченной длине реализации стационарного случайного процесса его финитное преобразование Фурье существует *всегда*.

Из формул (1.15) и (1.25) видно, что на дискретных частотах  $f_k = k/T$  финитное преобразование Фурье связано с коэф-

фициентами  $A_k$  ряда Фурье равенством

$$X(f_k, T) = T A_k, \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.26)$$

Поэтому если ограничиться только этим дискретным набором частот, то выполнение финитного преобразования Фурье сводится к нахождению коэффициентов ряда Фурье для функции, имеющей период  $T$ . Именно это и делается при анализе данных на цифровой ЭВМ.

Соответствующие вычислительные процедуры подробно рассмотрены в работе [1.3]. Здесь же следует заметить, что, когда реализация  $x(t)$  представлена временным рядом с интервалом дискретности  $\Delta t$ , длина реализации  $T$  связана с объемом выборки  $N$  равенством  $T = N\Delta t$ . Отсюда следует, что частота Найквиста  $f_c = 1/2\Delta t$ . Кроме того, предполагается, что рассматриваемая реализация имеет периодический характер и период ее равен  $T$ . Следовательно, фундаментальная частота ряда Фурье  $f_1 = 1/T$ , так что разрешающая способность по частоте  $\Delta f = f_1$ . Непрерывная реализация  $x(t)$  заменяется временным рядом  $x_n = x(n\Delta t)$ , где  $n = 1, 2, \dots, N$ , а непрерывное преобразование Фурье — дискретной последовательностью  $\{X_k\} = \{X(k\Delta f)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ . Поскольку  $f_c = (N/2)\Delta f$ , значения  $X_k$  при  $k > N/2$  определяются по предшествующим значениям  $X_k$ . Соответствующая пара преобразований Фурье определяется формулами

$$X_k = X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=1}^N x_n \exp\left(-j2\pi \frac{kn}{N}\right), \quad k = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (1.27)$$

$$x_n = x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=1}^N X_k \exp\left(j2\pi \frac{kn}{N}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (1.28)$$

Из этих формул вытекают, в частности, приведенные ниже равенства, справедливые для действительных последовательностей  $\{x_n\}$ :

$$\begin{aligned} X_{-k} &= X_k^* && \text{при всех } k, \\ X_{N-k} &= X_k^* && \text{при } k = 1, 2, 3, \dots, (N/2), \\ X_{(N/2)+k} &= X_{(N/2)-k}^* && \text{при } k = 1, 2, 3, \dots, (N/2), \\ X_{k+N} &= X_k && \text{при всех } k, \\ x_{n+N} &= x_n && \text{при всех } n. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Таким образом,  $x_n$  есть периодическая функция  $n$  по модулю  $N$ , а  $X_k$  — периодическая функция  $k$  по модулю  $N$ .

### 1.2.4. Дельта-функция

Рассмотрим показанную на рис. 1.6 прямоугольную функцию  $f(t)$ , симметричную относительно точки  $t=0$ ; ширина функции  $f(t)$  есть  $\omega$ , а высота равна  $1/\omega$ . Уравнение, описыва-

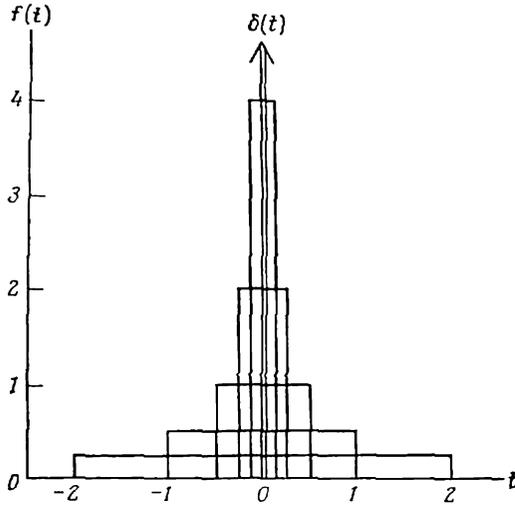


Рис. 1.6. Построение дельта-функции.

ющее эту функцию, имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} 1/\omega, & -\omega/2 \leq t \leq \omega/2; \\ 0, & |t| > \omega/2. \end{cases} \quad (1.30)$$

Очевидно, что площадь под  $f(t)$  есть

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \int_{-\omega/2}^{\omega/2} \frac{dt}{\omega} = \left(\frac{1}{\omega}\right)\omega = 1. \quad (1.31)$$

Пусть теперь ширина функции  $f(t)$  уменьшается, а высота ее растет таким образом, чтобы, как показано на рис. 1.6, сохранялась единичная площадь  $A$ . Переходя к пределу при  $\omega \rightarrow 0$ , получаем

$$\delta(t) = \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} f(t) = \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad (1.32)$$

При этом в соответствии с уравнением (1.31) интеграл от  $\delta(t)$  равен единице, т. е.

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{\omega}{\omega} \right) = 1, \quad (1.33)$$

Здесь  $\varepsilon$  есть произвольная малая величина<sup>1)</sup>.

Предельные функции такого типа называются *дельта-функциями* и обозначаются символом  $\delta(t)$ . Дельта-функция может занимать произвольное положение  $t_0$  на оси абсцисс, а введение масштабирующего множителя  $A$  дает интеграл от дельта-функции, равный  $A$ . Таким образом,

$$A\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} A\delta(t-t_0) dt = A. \quad (1.35)$$

Кроме того, свертка дельта-функции  $\delta(t-t_0)$  с произвольной аналитической функцией  $x(t)$  дает значение  $x(t)$  при  $t=t_0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t-t_0) dt = x(t_0). \quad (1.36)$$

Это свойство дельта-функции можно использовать для нахождения значения  $x(t)$  при  $t=t_0$ .

Пара преобразований Фурье дельта-функции имеет вид

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i2\pi ft} dt = 1 \quad \text{при всех } f, \quad (1.37)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} df = \delta(t). \quad (1.38)$$

### 1.2.5. Частные случаи преобразования Фурье

В табл. 1.1 приведены некоторые пары преобразований Фурье, удовлетворяющие уравнениям (1.19) и (1.21). Другие примеры легко найти в специальной литературе, посвященной рядам Фурье и интегралу Фурье.

<sup>1)</sup> Точнее,  $\varepsilon$  есть произвольная положительная величина. — Прим. перев.

### 1.3. Частотные характеристики физических систем

В этой книге корреляционные и спектральные функции применяются, как правило, для анализа различных физических систем. Ниже дается краткое описание важнейших свойств физических систем, которые нужно знать для понимания материала, приведенного в последующих главах. При этом основной упор делается на механические системы, которые будут чаще всего служить примерами в этой книге. Однако если воспользоваться стандартными аналогиями (см. [1.3]), то полученные здесь соотношения легко распространить и на системы другого типа.

#### 1.3.1. Импульсная переходная функция

Будем называть физическую систему идеальной, если она а) физически осуществима, б) устойчива, в) имеет постоянные параметры и г) линейна. Определения всех этих свойств будут даны ниже. Основные свойства такой идеальной физической системы описываются ее *импульсной переходной функцией*, или *весовой функцией*, которая представляет реакцию системы на возмущение в виде дельта-функции. Пусть, как показано на рис. 1.7, на вход системы поступает некоторая гладкая функция  $x(t)$ , а на выходе наблюдается гладкая функция  $y(t)$ . Импульсная переходная функция системы определяется уравнением

$$h(t) = y(t) \quad \text{при } x(t) = \delta(t), \quad (1.39)$$

причем отсчет времени  $t$  начинается с момента, когда на вход системы подается дельта-функция. Важная роль импульсной переходной функции как средства для описания свойств системы видна из следующего утверждения. Реакция  $y(t)$  системы на произвольный входной процесс  $x(t)$  определяется *интегралом свертки*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (1.40)$$

Другими словами, реакция системы  $y(t)$  есть взвешенная линейная сумма всех прошлых и будущих значений входного процесса  $x(t)$ .

*Физически осуществимая* система не может реагировать на возмущение до тех пор, пока оно не поступило на вход системы. Это означает, что

$$h(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau < 0. \quad (1.41)$$

Таблица 1.1

## Примеры преобразования Фурье

$x(t)$	$X(f)$
1	$\delta(f)$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$x(t - \tau_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f\tau_0}$
$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin 2\pi f_0 t$	$(1/2j) [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & t < 0, t > T \end{cases}$	$T \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right) e^{-j\pi f T}$
$2aB \left( \frac{\sin 2\pi Bt}{2\pi Bt} \right)$	$\begin{cases} a, & -B \leq f \leq B \\ 0, &  f  > B \end{cases}$
$aB \left( \frac{\sin \pi Bt}{\pi Bt} \right) \cos 2\pi f_0 t$	$\begin{cases} a, & f_0 - \frac{B}{2} \leq f \leq f_0 + \frac{B}{2} \\ 0, &  f - f_0  > \frac{B}{2} \end{cases}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
$e^{-a t } \cos 2\pi f_0 t, a > 0$	$\frac{a}{a^2 + 4\pi^2(f + f_0)^2} + \frac{a}{a^2 + 4\pi^2(f - f_0)^2}$
$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)du$	$X_1(f)X_2(f)$

Следовательно, для физически осуществимых систем нижний предел интегрирования в уравнении (1.40) равен нулю, а не минус бесконечности.

Говорят, что физическая система имеет *постоянные параметры*, если ее импульсная переходная функция не зависит от момента поступления вынуждающей силы на вход системы, т. е.

$$h(t, \tau) = h(\tau) \quad \text{при } -\infty < t < \infty. \quad (1.42)$$

Если параметры системы постоянны, то стационарный входной процесс всегда генерирует стационарный процесс на выходе системы (после затухания переходных процессов, возникающих при включении системы).

Физическая система называется *устойчивой*, если при произвольной допустимой ограниченной функции на ее входе функ-

ция на выходе также является ограниченной. Это условие выполняется, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty. \quad (1.43)$$

Рассматриваемые в этой книге соотношения между процессами на входе и выходе физических систем справедливы лишь в случае устойчивой системы.

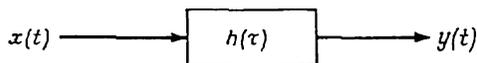


Рис. 1.7. Идеальная система с одним входным процессом и одним процессом на выходе.

*Линейная система* обладает свойствами аддитивности и однородности. Пусть входные процессы  $x_1$  и  $x_2$  генерируют выходные процессы  $y_1$  и  $y_2$  соответственно [см. формулу (1.40)]. Система называется *аддитивной*, если входной процесс  $x_1 + x_2$  генерирует на выходе системы процесс  $y_1 + y_2$ , и *однородной*, если входному процессу  $cx_1$  соответствует выходной процесс  $cy_1$  (здесь  $c$  — произвольная постоянная). Все это означает, что весовая функция  $h(\tau)$  не зависит от процесса  $x(t)$ , т. е.

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad \text{при всех } x(t). \quad (1.44)$$

Если система линейна, то случайный входной процесс с гауссовским распределением вероятностей (см. определение в гл. 2) порождает процесс на выходе также с гауссовским распределением вероятностей.

В практических ситуациях линейность относится к числу наиболее редко выполняемых свойств. В частности, значение входного случайного процесса может (хотя это маловероятно) измениться столь резко, что отклик системы не будет пропорционален значению входного процесса, как это требуется из условия однородности. Эта проблема особенно важна и сложна в тех случаях, когда речь идет об исследовании статистик экстремальных значений, как, например, при предсказании катастрофических разрушений конструкций под действием случайных нагрузок. Однако если изучаемая система не является сильно нелинейной, то рассматриваемые в этой книге методы корреляционного и спектрального анализа приведут в большинстве случаев к вполне осмысленным результатам, описывающим наилучшие (в среднеквадратичном смысле) линейные приближения для исследуемых систем.

### 1.3.2. Частотные характеристики

Динамические свойства физических систем принято описывать, как правило, не самой импульсной переходной функцией  $h(\tau)$ , а некоторым ее линейным преобразованием, причем вид преобразования зависит от конкретной задачи. Однако в случае идеальной системы удобнее всего пользоваться преобразованием Фурье, которое позволяет непосредственно описать динамические характеристики системы в частотной области. Преобразование Фурье импульсной переходной функции  $h(\tau)$ , удовлетворяющей условию  $h(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ , имеет вид

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (1.45)$$

и называется *частотной характеристикой* системы. В общем случае частотная характеристика является комплексной функцией частоты, так что ее можно представить в виде

$$H(f) = H_R(f) - jH_I(f), \quad (1.46)$$

где  $H_R(f)$  и  $H_I(f)$  — действительная и мнимая части функции  $H(f)$  соответственно, определенные равенствами

$$H_R(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau, \quad H_I(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau.$$

В дальнейшем мы также будем пользоваться полярной формой записи для частотной характеристики  $H(f)$ :

$$H(f) = |H(f)| e^{-j\varphi(f)},$$

где

$$|H(f)| = [H_R^2(f) + H_I^2(f)]^{1/2}, \quad \varphi(f) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{H_I(f)}{H_R(f)} \right]. \quad (1.47)$$

Модуль  $|H(f)|$  обычно называется *амплитудной характеристикой*, а аргумент  $\varphi(f)$  — *фазовой характеристикой*. Заметим, что в соответствии с принятой здесь системой обозначений фазовая характеристика определена таким образом, что ее значение всегда неотрицательно.

Частотная характеристика имеет очевидную физическую интерпретацию: если на вход идеальной системы, описанной в разд. 1.3.1, поступает гармоническое колебание с частотой  $f$ , то на выходе тоже будет наблюдаться гармоническое колебание с частотой  $f$ . Однако амплитуда выходного сигнала будет в общем случае отлична от амплитуды входного сигнала и, кроме того, выходной сигнал будет сдвинут по фазе относительно

входного. Другими словами, входной и выходной процессы определяются в этом случае равенствами

$$x(t) = X \sin 2\pi ft, \quad y(t) = Y \sin (2\pi ft - \theta). \quad (1.48)$$

Отношение амплитуд выходного и входного сигналов задает амплитудную характеристику, а сдвиг по фазе между  $x(t)$  и  $y(t)$  — фазовую характеристику системы:

$$|H(f)| = |Y(f)| / |X(f)|, \quad \varphi(f) = \theta(f). \quad (1.49)$$

Инженеры нередко называют частотную характеристику, определяемую уравнением (1.45), передаточной функцией. Однако, строго говоря, передаточная функция определяется преобразованием Лапласа импульсной переходной функции, т. е. имеет вид

$$H_1(p) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau, \quad p = a + jb, \quad (1.50)$$

где  $a$  (т. е. действительная часть комплексного числа  $p$ ) не обязательно равна нулю. При  $a \neq 0$  функции  $H(f)$  и  $H_1(p)$ , заданные уравнениями (1.45) и (1.50), не совпадают. Положив  $a = 0$  и  $b = 2\pi f$ , получим, что на мнимой оси  $H_1(j2\pi f) = H(f)$ . Таким образом, частотная характеристика и передаточная функция совпадают на мнимой оси, что и объясняет использование иногда обоих этих терминов.

### 1.3.3. Система, с одной степенью свободы

Для того чтобы получить более ясное представление о частотных характеристиках обычных физических систем, рассмотрим показанную на рис. 1.8 механическую систему с одной степенью свободы; система состоит из массы, пружины и демпфера. Пусть входной процесс  $F(t)$  есть приложенная к массе сила, которая вызывает на выходе системы смещение  $y(t)$ . В соответствии с законами Ньютона дифференциальное уравнение, описывающее реакцию системы, имеет вид

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t). \quad (1.51)$$

Для того чтобы найти частотную характеристику системы, положим  $F(t) = \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  — дельта-функция, определенная в разд. 1.2.4. Тогда, согласно уравнению (1.39), реакция системы есть  $y(t) = h(t)$ , и в соответствии с (1.45) ее преобразование Фурье имеет вид  $Y(f) = H(f)$ . Выполнив преобразование Фурье

обеих частей уравнения (1.51)<sup>1)</sup>, получим

$$[-(2\pi f)^2 m + j2\pi f c + k] Y(f) = 1,$$

так что

$$Y(f) = H(f) = [k - (2\pi f)^2 m + j2\pi f c]^{-1}. \quad (1.52)$$

Уравнение (1.52) целесообразно переписать в другой форме, введя обозначения:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.53)$$

В равенствах (1.53) величина  $\zeta$  называется *коэффициентом затухания системы*; она описывает степень затухания системы че-

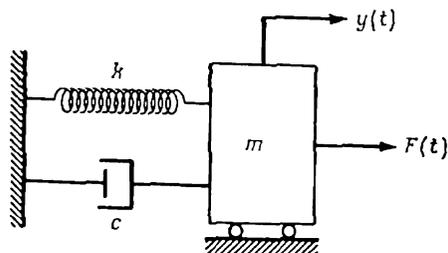


Рис. 1.8. Механическая система с одной степенью свободы.

рез критическое затухание  $c_c$ . Если масса выводится из равновесного положения и затем освобождается, то при  $\zeta = c_c$  она вернется в равновесное положение сразу и не будет больше колебаться. Для системы, показанной на рис. 1.8,  $c_c = 2\sqrt{km}$ . Величина  $f_n$  в (1.53) называется *собственной частотой незатухающих колебаний* системы. Если коэффициент затухания равен нулю, то после выведения массы из положения равновесия система будет совершать незатухающие колебания с частотой  $f_n$ . С учетом этих обозначений частотную характеристику, заданную выше уравнением (1.52), можно записать как

$$H(f) = \frac{1/k}{1 - (f/f_n)^2 + j2\zeta f/f_n}, \quad (1.54)$$

а амплитудная и фазовая характеристики, определенные уравнениями (1.47), примут вид

$$|H(f)| = \frac{1/k}{\sqrt{[1 - (f/f_n)^2]^2 + [2\zeta f/f_n]^2}}, \quad (1.55a)$$

$$\varphi(f) = \arctg \left[ \frac{2\zeta f/f_n}{1 - (f/f_n)^2} \right]. \quad (1.55b)$$

<sup>1)</sup> При  $F(t) = \delta(t)$ . — Прим. перев.

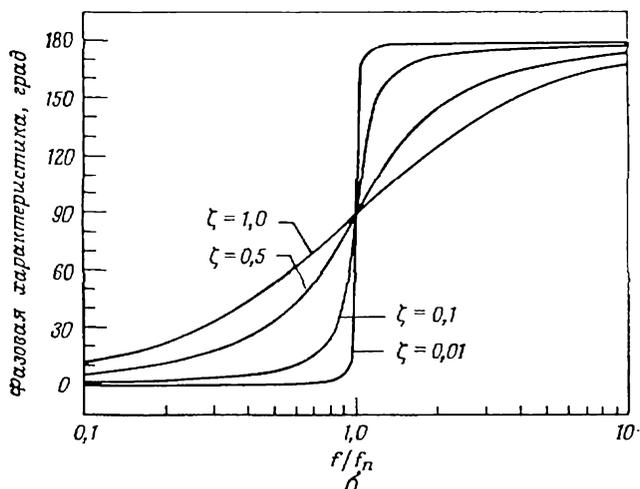
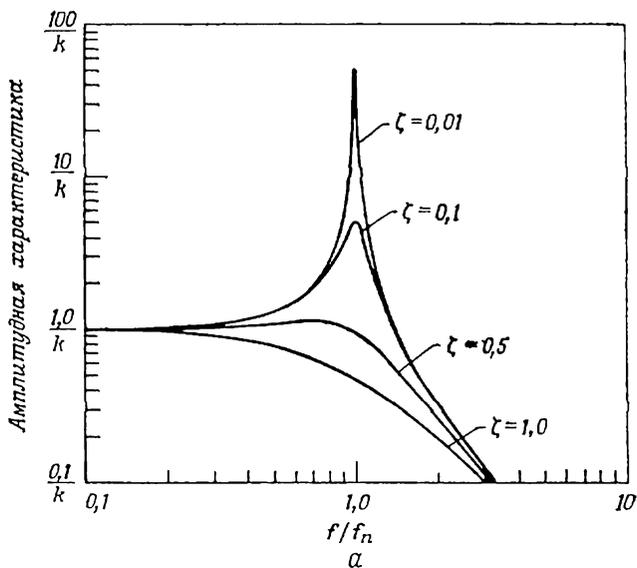


Рис. 1.9. Частотная характеристика системы с одной степенью свободы (входной процесс — сила, выходной процесс — смещение).  
 а — амплитудная характеристика; б — фазовая характеристика.

Графики функций  $|H(f)|$  и  $\varphi(f)$  приведены на рис. 1.9.

Интересно отметить две особенности графиков, представленных на рис. 1.9. Во-первых, при  $\zeta \leq 1/\sqrt{2}$  амплитудная характеристика имеет максимум на частоте, несколько меньшей собственной частоты  $f_n$ . Частота, на которой амплитудная характеристика достигает максимума, называется *резонансной частотой* системы. Определив минимальное значение знаменателя дроби в выражении (1.55а), можно показать, что резонансная частота

$$f_r = f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta^2 \leq 0,5, \quad (1.56)$$

и что пиковое значение амплитудной характеристики, достигаемое на резонансной частоте, равно

$$|H(f_r)| = \frac{1/k}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \zeta^2 \leq 0,5. \quad (1.57)$$

Вторая особенность графиков состоит в том, что фазовая характеристика меняется от  $0^\circ$  на частотах, много меньших  $f_n$ , до  $180^\circ$  на частотах, много больших  $f_n$ . Вид кривой  $\varphi(f)$  между этими крайними значениями фазового угла зависит от коэффициента затухания  $\zeta$ . Однако при  $f = f_n$  фаза  $\varphi(f)$  равна  $90^\circ$  независимо от величины  $\zeta$ .

Реальные физические системы часто обладают очень малыми коэффициентами затухания ( $\zeta \ll 1$ ). Например, коэффициенты затухания механических конструкций обычно оказываются менее 0,05. Поэтому на практике нередко встречаются физические системы, амплитудные характеристики которых имеют острый максимум, а фазовые характеристики резко изменяются на  $180^\circ$ . По существу, такие системы представляют собой узкополосные фильтры; диапазон пропускаемых ими частот принято определять *шириной полосы пропускания по уровню половинной энергии*:

$$B_r = f_2 - f_1, \quad \text{где } |H(f_1)|^2 = |H(f_2)|^2 = 1/2 |H(f_r)|^2. \quad (1.58)$$

Подставляя выражение (1.58) в формулу (1.55а), легко показать, что в обычной ситуации, когда коэффициент затухания системы относительно невелик,

$$B_r \approx 2\zeta f_r. \quad (1.59)$$

### 1.3.4. Системы с распределенными параметрами

Параметры физических систем обычно распределены в пространстве. Отсюда следует, что такие системы обладают не одной, а несколькими резонансными частотами. Рассмотрим, например, консольную балку постоянного сечения, показанную на

рис. 1.10. Если к балке приложить синусоидально меняющуюся нагрузку с постоянной амплитудой и с непрерывно возрастающей частотой, то при некоторой частоте реакция всех точек балки достигнет максимума. С ростом частоты вынуждающей силы реакция балки сначала убывает, затем снова достигает максимума и т. д. Каждый из таких максимумов соответствует некоторой резонансной частоте, связанной с *нормальной модой*

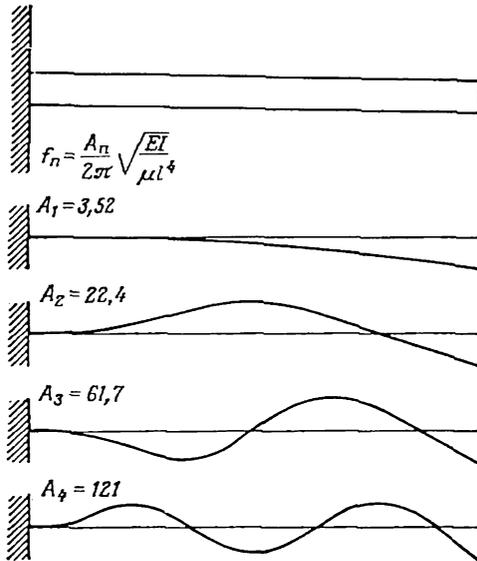


Рис. 1.10. Форма и частоты нормальных мод консольной балки.  
 $E$  — модуль Юнга,  $I$  — момент инерции,  $l$  — длина балки,  $\mu$  — масса на единицу длины.

колебаний балки, а каждая резонансная частота называется (в предположении, что коэффициент затухания балки равен нулю) *частотой нормальной моды*. Если после достижения резонанса действие вынуждающей силы прекращается, то балка продолжает совершать незатухающие свободные колебания; форма мгновенных отклонений балки от положения равновесия называется *формой нормальной моды*. Теоретически число таких нормальных мод, каждой из которых соответствуют своя частота и форма, бесконечно. Форма и частоты четырех первых нормальных мод консольной балки показаны на рис. 1.10.

В случае относительно простых конструкций, подобных, например, консольной балке, форму и частоты нормальных мод можно определить аналитически, решая соответствующие дифференциальные уравнения в частных производных, которые описывают реакцию системы на возбуждение [1.4]. Однако для

более сложных конструкций такой способ оказывается, как правило, трудно осуществимым, и поэтому для определения характеристик нормальных мод обычно применяются различные методы численного моделирования (например, метод конечных элементов [1.5]). Характеристики нормальных мод реальных конструкций, к которым можно прилагать естественную или искусственную нагрузку, определяются путем анализа соответствующих данных наблюдений; методы такого анализа основаны на принципах, которые излагаются в гл. 5 и разд. 7.4 этой книги.

Если форма и частоты нормальных мод конструкции известны, то теоретически в момент времени  $t$  реакция любой ее точки с координатой  $\xi$  имеет вид

$$y(\xi, t) = \sum_i \varphi_i(\xi) q_i(t), \quad i=1,2,3,\dots, \quad (1.60)$$

где  $\varphi_i(\xi)$  есть форма  $i$ -й нормальной моды, а  $q_i(t)$  — обобщенная координата, описывающая реакцию  $i$ -й нормальной моды. Предполагается, что обобщенная координата каждой моды удовлетворяет уравнению

$$M_i \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + C_i \frac{dq_i(t)}{dt} + K_i q_i(t) = F_i(t), \quad (1.61)$$

где

$$M_i = \int_0^l \varphi_i^2(\xi) m(\xi) d\xi \text{ — обобщенная масса,}$$

$$C_i = \int_0^l \varphi_i^2(\xi) c(\xi) d\xi \text{ — обобщенный коэффициент затухания,}$$

$$K_i = 4\pi^2 f_i^2 M_i \text{ — обобщенный коэффициент жесткости,}$$

$$F_i(t) = \int_0^l \varphi_i(\xi) p(\xi, t) d\xi \text{ — обобщенная сила.}$$

В уравнении (1.61) величины  $m(\xi)$  и  $c(\xi)$  представляют собой значения массы и коэффициента затухания конструкции в точке с координатой  $\xi$ ,  $p(\xi, t)$  — интенсивность нагрузки, прикладываемой в точке  $\xi$  в момент  $t$ . Заметим, что обобщенные масса, коэффициент жесткости, коэффициент затухания и сила, входящие в уравнение (1.61), различны для разных нормальных мод. Кроме того, из сопоставления уравнений (1.51) и (1.61) видно, что реакция любой точки системы совпадает с реакцией системы, обладающей одной степенью свободы (рис. 1.9). Таким

образом, частотную характеристику конструкции в точке с координатой  $\xi$  можно определить как весовую сумму частотных характеристик набора систем с одной степенью свободы и разными собственными частотами. Более подробно этот вопрос рассматривается в работе [1.4].

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1.1. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. — Успехи математических наук, 1952, т. 7, № 5 (55) с. 3—168.
- 1.2. Papoulis A. *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.
- 1.3. Bendat J. S., Piersol A. G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]
- 1.4. Stokey W. F. *Vibration of Systems Having Distributed Mass and Elasticity*, Ch. 7, in *Shock and Vibration Handbook*, 2nd Ed. (C. M. Harris, C. E. Crede, Eds.), McGraw-Hill, New York, 1976.
- 1.5. Huebner K. H. *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, New York, 1975.

## Глава 2

### ВЕРоятностные функции и средние ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Если изучаемое физическое явление случайно, то, как уже отмечалось в гл. 1, каждая его реализация  $x(t)$  осуществляется при вполне определенном комплексе условий, который едва ли повторится при других независимых наблюдениях этого же явления. Поэтому для полного описания свойств такого явления необходимо хотя бы умозрительно принимать во внимание все множество его возможных реализаций  $\{x(t)\}$  (см. рис. 1.1). Явления, с которыми приходится иметь дело в инженерной практике, обычно происходят в непрерывном времени, и для полного их описания приходится рассматривать бесконечное число реализаций, т. е.  $N \rightarrow \infty$ . Таким образом, значение реализации случайного явления в определенный момент  $t_1$  в будущем или же полученное в другом опыте не может быть вычислено по точной формуле, но должно быть описано в вероятностных терминах.

#### 2.1. Вероятностные функции

Вероятность можно определять по-разному, но, с точки зрения инженера, удобнее всего определить вероятность некоторого события как относительную частоту его наступления. Предположим, что некоторый эксперимент повторяется большое число раз в одинаковых условиях. Пусть  $A$  — интересующий нас исход эксперимента. Если эксперимент был повторен  $N$  раз, а исход  $A$  наступил  $N[A]$  раз, вероятность  $A$  определяется как

$$\text{Prob}[A] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N[A]}{N}. \quad (2.1)$$

Другими словами, вероятность события  $A$  равна пределу частоты наступления  $A$ , когда число испытаний стремится к бесконечности.

### 2.1.1. Функция распределения

Обратимся снова к ансамблю реализаций, изображенному на рис. 1.1, и предположим, что нас интересует событие, состоящее в том, что измеренное в момент  $t_1$  значение не превышает  $\xi$  единиц, т. е.  $A = \{x(t_1) \leq \xi\}$ . По определению (2.1) вероятность этого события равна

$$\text{Prob}[x(t_1) \leq \xi] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N[x(t_1) \leq \xi]}{N}, \quad (2.2)$$

где  $N[x(t_1) \leq \xi]$  — число реализаций, значения которых в момент  $t_1$  не превышают  $\xi$ . Если в равенстве (2.2) величине  $\xi$

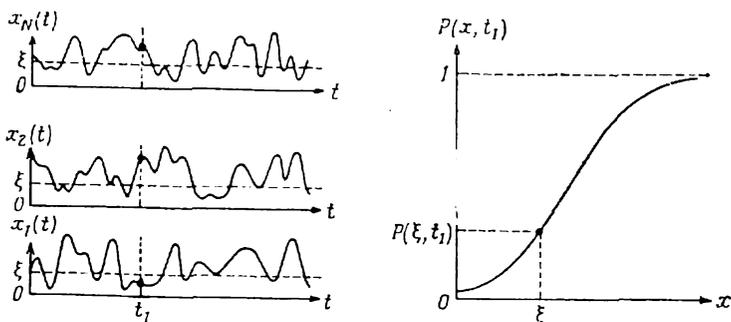


Рис. 2.1. Общий вид функции распределения.

придавать различные значения, то получим функцию от  $\xi$ , примерный вид которой приведен на рис. 2.1. Эта функция называется *функцией распределения* случайного процесса  $\{x(t)\}$  в момент  $t_1$  и обозначается как

$$P_x(\xi, t_1) = P(x, t_1) = \text{Prob}[x(t_1) \leq \xi]. \quad (2.3)$$

В дальнейшем для удобства будем пользоваться обозначением  $P(x, t_1)$ . Функция распределения задает вероятность того, что мгновенное значение  $x(t)$  в некоторый момент  $t_1$  не превышает данного значения  $\xi$ . Эта вероятность для нестационарных процессов зависит от времени  $t_1$ .

В случае когда случайный процесс стационарный и эргодический, функция распределения не зависит от времени и может быть определена по единственной реализации  $x(t)$  как

$$P(x) = \text{Prob}[x(t) \leq \xi] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T[x(t) \leq \xi]}{T}, \quad (2.4)$$

где  $T[x(t) \leq \xi]$  — общее время, в течение которого реализация  $x(t)$  находится не выше уровня  $\xi$  (рис. 2.2). В этом случае

функция распределения определяет вероятность того, что мгновенное значение  $x(t)$  в произвольный момент времени не превышает данного значения  $\xi$ .

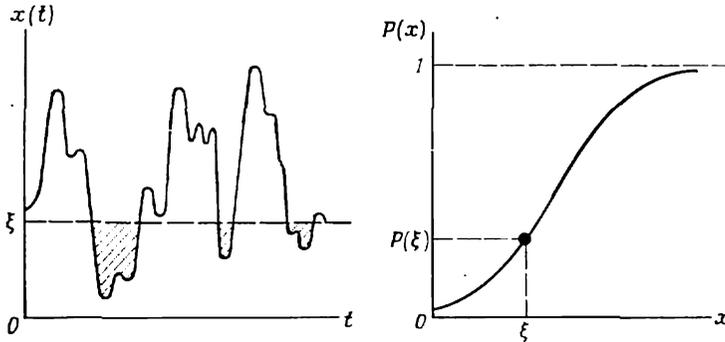


Рис. 2.2. Функция распределения стационарного процесса.

### 2.1.2. Плотность вероятности

При  $x \rightarrow -\infty$  функция распределения  $P(x) = P(x, t_1)$  стремится к нулю; при  $x \rightarrow \infty$  она стремится к единице. Именно по характеру изменения функции распределения от нуля до еди-

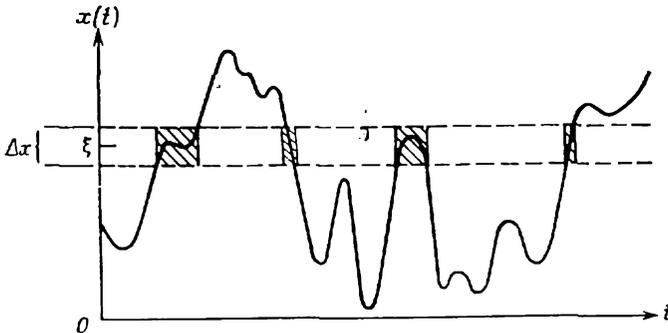


Рис. 2.3. Оценивание плотности вероятности.

ницы различаются случайные процессы с разной вероятностной структурой. По этой причине вероятностную структуру случайных процессов часто задают при помощи наклона функции распределения, равного производной

$$p(x, t_1) = \frac{dP(x, t_1)}{dx}, \quad (2.5)$$

которая называется *плотностью вероятности* случайного процесса  $\{x(t)\}$  в момент времени  $t_1$ . В частном случае стационарных

эргодических процессов, которым главным образом и посвящена эта книга, плотность не зависит от времени:  $p(x, t_1) = p(x)$ .

Другой способ задания плотности вероятности дает также метод оценивания ее значений. Выделим в области значений процесса небольшой интервал шириной  $\Delta x$  с центром в точке  $\xi$  (рис. 2.3). Вероятность того, что стационарный эргодический

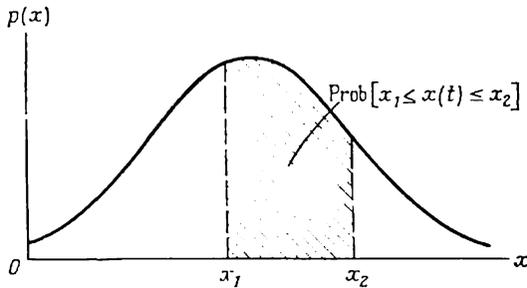


Рис. 2.4. Вычисление вероятности по плотности.

случайный процесс попадет в этот интервал в произвольный момент времени, определяется по (2.4) как

$$\text{Prob} [x(t) \in \Delta x_{\xi}] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T [x(t) \in \Delta x_{\xi}]}{T}, \quad (2.6)$$

где символ  $\in$  означает «принадлежность», а  $T[x(t) \in \Delta x_{\xi}]$  есть время, в течение которого случайный процесс  $x(t)$  остается в пределах интервала  $\Delta x$  с центром  $\xi$ . Тогда плотность вероятности получается путем деления левой части (2.6) на  $\Delta x$  и перехода к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е.

$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Prob} [x(t) \in \Delta x_{\xi}]}{\Delta x}. \quad (2.7)$$

Можно сказать, что плотность вероятности определяет скорость изменения функции распределения. Поэтому вероятность различных событий можно находить интегрированием плотности вероятности, т. е. вычисляя площадь под графиком  $p(x)$ , заключенную между данными значениями ординат (рис. 2.4). Вероятность того, что значение случайного процесса заключено между  $x_1$  и  $x_2$ , равна

$$\text{Prob} [x_1 \leq x(t) \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = P(x_2) - P(x_1). \quad (2.8)$$

При  $x_1 \rightarrow \infty$  получим

$$\text{Prob}[-\infty \leq x(t) \leq x_2] = \int_{-\infty}^{x_2} p(x) dx = P(x_2), \quad (2.9)$$

т. е. площадь под графиком плотности вероятности левее точки  $x_2$  равна значению функции распределения в точке  $x_2$ . Далее, если  $x_2 \rightarrow \infty$ , то

$$\text{Prob}[-\infty \leq x(t) \leq \infty] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad (2.10)$$

т. е. площадь всей области, ограниченной графиком плотности вероятности, равна единице, а значение случайного процесса в любой момент времени будет заключено между плюс и минус бесконечностью.

## 2.2. Моменты и средние значения

По причинам, которые станут ясными ниже, многие свойства реализаций случайных процессов хорошо описываются только двумя средними величинами, которые определяют положение центра рассеяния и меру рассеяния значений процесса. Эти средние характеристики можно либо вычислить теоретически, либо оценить путем усреднения реализаций случайного процесса.

### 2.2.1. Математическое ожидание и моменты

Математическое ожидание скалярной функции  $g(x)$  определяется как

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p(x) dx. \quad (2.11)$$

Другими словами, математическое ожидание  $g(x)$  есть среднее значение  $g(x)$ , взвешенное по вероятностям наступления события  $x$ , которые задаются плотностью вероятности. Взятие математического ожидания — линейная операция, т. е. она аддитивна и однородна:

$$E[g(x) + h(x)] = E[g(x)] + E[h(x)], \quad (2.12)$$

$$E[cg(x)] = cE[g(x)].$$

Моменты стационарного случайного процесса  $\{x(t)\}$ , описывающего некоторое интересующее нас случайное явление, опре-

деляются следующим образом:

$$\mu_k = E[x^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) dx, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (2.13)$$

где  $p(x)$  — плотность вероятности  $\{x(t)\}$ , а  $\mu_k$  называется  $k$ -м моментом. Нулевой момент ( $k=0$ ), очевидно, равен

$$\mu_0 = E[x^0] = \int_{-\infty}^{\infty} x^0 p(x) dx = 1; \quad (2.14)$$

этот случай тривиален. Первый момент ( $k=1$ ), равный

$$\mu_1 = E[x^1] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \mu, \quad (2.15)$$

называется *средним значением*  $\{x(t)\}$  и далее будет обозначаться как  $\mu$ . Второй момент ( $k=2$ ), равный

$$\mu_2 = E[x^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \psi^2, \quad (2.16)$$

называется *средним квадратом*  $\{x(t)\}$  и обозначается как  $\psi^2$ . Положительный квадратный корень из среднего квадрата процесса называется *среднеквадратичным значением* процесса, или *с. к. значением*. Второй и высшие моменты, вычисленные относительно среднего значения, называются *центрными моментами*; эти характеристики часто используются. Второй центральный момент, равный

$$\mu_2^c = E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx = \sigma^2, \quad (2.17)$$

называется *дисперсией*  $\{x(t)\}$  и обозначается как  $\sigma^2$ . Положительный квадратный корень из дисперсии называется *среднеквадратичным отклонением*. Вычисление моментов по формуле (2.13) может быть выполнено для сколь угодно больших  $k$ , но по причинам, которые будут разъяснены ниже, обычно достаточно знать только первые два момента процесса.

### 2.2.2. Центр рассеяния и рассеяние

Среднее значение  $\mu$  (первый момент) определяет положение центра рассеяния случайного процесса  $\{x(t)\}$ , а дисперсия  $\sigma^2$  (второй центральный момент) характеризует рассеяние значе-

ний  $\{x(t)\}$ . Средний квадрат  $\psi^2$  (второй момент) дает меру того и другого. Из формулы (2.17) находим

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(x - \mu)^2] = E[x^2 - 2\mu x + \mu^2] = \\ &= E[x^2] - 2\mu E[x] + \mu^2 = \psi^2 - \mu^2.\end{aligned}\quad (2.18)$$

Следовательно, средний квадрат равен

$$\psi^2 = \sigma^2 + \mu^2. \quad (2.19)$$

Дисперсия и средний квадрат совпадают, если среднее значение  $\mu$  равно нулю.

Полезно проследить аналогию между моментами случайного процесса, определенными уравнениями (2.15)–(2.17), и механическими моментами, характеризующими распределение массы некоторого тела. Если распределение массы тела задано плотностью  $m(x)$ , то центр рассеяния массы, называемый центром тяжести (Ц. Т.), определяется выражением

$$\text{Ц. Т.} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x m(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} m(x) dx}, \quad (2.20)$$

тогда как рассеяние характеризует квадрат радиуса инерции

$$K^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 m(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} m(x) dx}. \quad (2.21)$$

Квадрат радиуса инерции относительно центра тяжести равен

$$K_0^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \text{Ц. Т.})^2 m(x) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} m(x) dx}. \quad (2.22)$$

Нетрудно убедиться, что имеет место тождество, аналогичное (2.18):

$$K^2 = K_0^2 + (\text{Ц. Т.})^2. \quad (2.23)$$

Если теперь плотность массы заменить плотностью вероятности  $p(x)$ , то равенства (2.20)–(2.23) превращаются в равенства

(2.15) — (2.18) соответственно. Таким образом, существует прямая аналогия между средним значением, среднеквадратичным значением и среднеквадратичным отклонением, с одной стороны, и центром тяжести, радиусом инерции и радиусом инерции относительно центра тяжести — с другой.

### 2.2.3. Оценивание средних значений

Среднее значение, средний квадрат и дисперсия, задаваемые соответственно формулами (2.15), (2.16), (2.17), могут быть определены и непосредственным усреднением реализаций случайного процесса  $\{x(t)\}$ . Если обратиться снова к ансамблю реализаций (рис. 1.1), то в общем нестационарном случае среднее значение в фиксированный момент  $t_1$  определяется следующим образом:

$$\mu(t_1) = E[x(t_1)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t_1). \quad (2.24)$$

Другими словами, просто вычисляется среднее значение реализаций в фиксированный момент времени  $t_1$  по ансамблю  $N$  реализаций (в идеальном случае как предел при  $N \rightarrow \infty$ ). Аналогично средний квадрат находится как среднее квадратов значений реализаций в фиксированный момент  $t_1$  по всему ансамблю, т. е.

$$\psi^2(t_1) = E[x^2(t_1)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2(t_1); \quad (2.25)$$

дисперсия вычисляется точно так же, только перед возведением в квадрат из значения реализации вычитается среднее:

$$\sigma^2(t_1) = E[\{x(t_1) - \mu(t_1)\}^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{x_i(t_1) - \mu(t_1)\}^2. \quad (2.26)$$

В частном случае стационарных эргодических процессов моменты разного типа не зависят от времени и могут быть вычислены по единственной реализации  $x(t)$  по формулам

$$\mu = E[x(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (2.27)$$

$$\psi^2 = E[x^2(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt, \quad (2.28)$$

$$\sigma^2 = E[\{x(t) - \mu\}^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu\}^2 dt. \quad (2.29)$$

### 2.3. Некоторые специальные плотности вероятности

В настоящее время при анализе случайных явлений используется чрезвычайно большое число различных плотностей вероятности. Однако для целей данной книги достаточно знать три плотности, которые хорошо описывают широкий класс практически важных случайных явлений. К ним относятся плотности: а) нормального (гауссовского) шума, б) гармонического процесса и в) гармонического процесса в случайном шуме. Поскольку эти три плотности хорошо известны, изложение ведется без подробных выкладок. С деталями можно познакомиться, воспользовавшись работой [2.1].

#### 2.3.1. Нормальный (гауссовский) шум

Плотности большого числа случайных процессов, описывающих практически важные физические явления, хорошо аппроксимируются выражением вида

$$p(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad (2.30)$$

где  $\mu$  и  $\sigma$  — соответственно среднее значение и среднеквадратичное отклонение. Функция (2.30) впервые была получена в 1733 г. как приближение биномиального распределения и обычно называется *нормальной*, или *гауссовской*, плотностью. Для удобства обычно табулируется и графически изображается плотность нормированной случайной величины

$$z = (x - \mu) / \sigma. \quad (2.31)$$

с нулевым средним и единичным среднеквадратичным отклонением. Этим простым преобразованием выражение (2.30) приводится к виду

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}. \quad (2.32)$$

Функция  $p(z)$  называется нормированной нормальной или гауссовской плотностью. Нормированное нормальное распределение, согласно формуле (2.9), имеет вид

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt. \quad (2.33)$$

Графики нормированного нормального распределения и его плотности приведены на рис. 2.5, а таблицы их значений можно найти во многих пособиях, включая [2.2].

Важность нормального распределения определяется применимостью на практике центральной предельной теоремы теории вероятностей, которая не строго формулируется следующим образом: если случайная величина  $x$  есть сумма  $n$  статистически независимых случайных величин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  с произвольными плотностями, то плотность  $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  приближается к нормальной плотности (2.30), если  $n$  стремится к бесконечности. Случайные явления очень часто действительно являются результатом воздействия многих независимых случайных факторов, поэтому нормальное распределение часто служит хорошей аппроксимацией плотностей случайных процессов.

По двум причинам очень желательно иметь возможность предполагать, что случайные процессы имеют нормальное распределение. Во-первых, как следует из формулы (2.30), нормальное распределение полностью определяется двумя параметрами — средним значением  $\mu$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma$ . Поэтому для определения нормальной плотности достаточно оценить только эти два параметра процесса. Во-вторых, все линейные операции над нормально распределенными случайными величинами приводят к нормально распределенной случайной величине [2.3]. Это значит, что различные линейные операции, встречающиеся в математике, такие, как интегрирование и преобразование Фурье, выполняемые над нормально распределенными случайными величинами, дают в результате нормально распре-

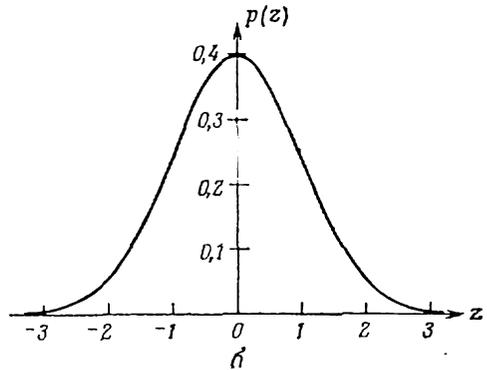
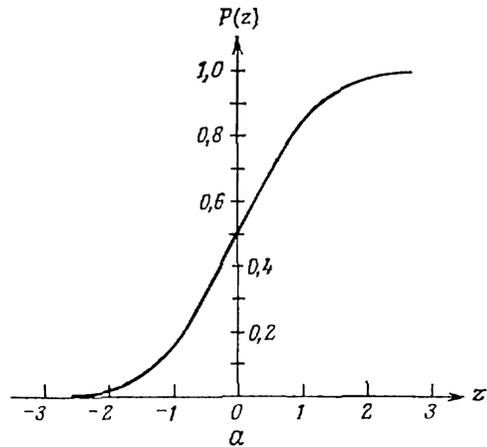


Рис. 2.5. Нормированная гауссовская функция распределения и ее плотность.  
 $a$  — функция распределения;  $b$  — плотность.

деленные величины. Более того, если линейная операция уменьшает частотную полосу процесса, то она подавляет возможные отклонения от гауссовского вида плотности, если только в процессе отсутствуют детерминированные составляющие<sup>1)</sup>.

Следует, однако, отметить, что нормальная случайная величина, задаваемая плотностью (2.30), теоретически не ограничена, т. е. она с положительной вероятностью может превысить как угодно высокий уровень или оказаться ниже сколь угодно низкого уровня. Но все физические явления и представляющие их случайные процессы ограничены по величине как в положительном, так и в отрицательном направлении, поэтому никакой реальный случайный процесс не может быть в точности гауссовским. Это замечание особенно важно для приложений, связанных с оценкой экстремальных значений, например при предсказании экстремальных значений ветровой нагрузки или высоты морских волн, грозящих катастрофическими последствиями. В этом случае предположение о том, что распределение вероятностей является нормальным, не состоятельно, так как распределения крайних значений ветровой нагрузки и высоты волн резко отклоняются от гауссовского. Но в большинстве приложений, о которых идет речь в этой книге, предположение, что встречающиеся случайные процессы имеют нормальное распределение вероятностей, вполне уместно, если только эти процессы не содержат детерминированных составляющих.

### 2.3.2. Гармонический процесс

Наиболее распространенный вид детерминированных процессов — это периодические процессы, разлагаемые на гармонические составляющие. Для описания одной такой составляющей не требуется вероятностных понятий, поскольку ее точное значение в любой момент времени вычисляется по формуле  $x(t) = X \sin(2\pi ft + \theta)$ . Но если начальная фаза  $\theta$  — равномерно распределенная на  $(-\pi, \pi)$  случайная величина, то этот гармонический процесс случайный и, как показано в работе [2.1], его плотность вероятности имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} (\pi \sqrt{2\sigma^2 - x^2})^{-1}, & |x| < X; \\ 0, & |x| \geq X, \end{cases} \quad (2.34)$$

где  $\sigma = X/\sqrt{2}$  — среднеквадратичное отклонение гармонического процесса. График этой плотности при  $\sigma = 1$ , изображенный на

<sup>1)</sup> Это важное свойство сильноинерционных линейных систем также является следствием центральной предельной теоремы. Доказательство этого утверждения и примеры нормализации негауссовских случайных процессов можно найти, например, в книге: Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966. — Прим. перев.

рис. 2.6, помогает понять, почему плотность гармонического процесса имеет чашеобразную форму. Согласно формуле (2.7), плотность можно рассматривать как результат предельной операции над вероятностью того, что  $x(t)$  попадет в интервал шириной  $\Delta x$ , которая в свою очередь равна относительной доле времени, в течение которого  $x(t)$  находится в пределах интервала  $\Delta x$ . Из рис. 2.6 видно, что при любой ширине интервала

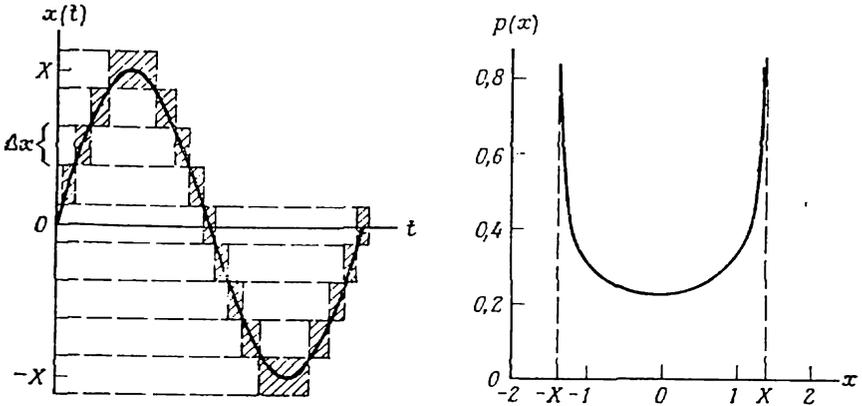


Рис. 2.6. Нормированная плотность вероятности гармонического процесса.

$\Delta x$  гармонический процесс на каждом периоде наибольшее время находится вблизи крайних значений  $\pm X$  и наименьшее — вблизи среднего значения  $\mu=0$ .

Как и гауссовская плотность, плотность гармонического процесса полностью определяется средним значением и среднеквадратичным отклонением. Но в отличие от гауссовской плотности, среднее значение которой наиболее вероятно (см. рис. 2.5, а), плотность гармонического процесса достигает минимума в точке с координатой, равной среднему, т. е. значения, близкие к среднему, наименее вероятны. Это является главным отличием гармонического процесса от узкополосного шума, который обычно является гауссовским, каким бы узким ни был его спектр.

### 2.3.3. Гармонический процесс в гауссовском шуме

Пусть теперь реализации стационарного эргодического случайного процесса имеют вид  $x(t) = n(t) + s(t)$ , где  $n(t)$  — гауссовский случайный шум, а  $s(t)$  — гармонический процесс,  $s(t) = = S \sin (2\pi ft + \theta)$ <sup>1)</sup>. Плотность вероятности этого процесса рав-

<sup>1)</sup> Случайный процесс  $s(t)$  — не эргодический, но к выводу формулы (2.35) этот факт отношения не имеет. — Прим. перев.

на свертке плотностей слагаемых, задаваемых формулами (2.30) и (2.34). Считая, что средние обоих процессов равны нулю, можно показать [2.1], что

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_n \pi \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi \exp \left[ - \left( \frac{x - S \cos \theta}{4\sigma_n} \right)^2 \right] d\theta, \quad (2.35)$$

где  $\sigma_n$  — среднеквадратичное отклонение гауссовского шума  $n(t)$ ;  $S$  и  $\theta$  — соответственно амплитуда и начальная фаза гар-

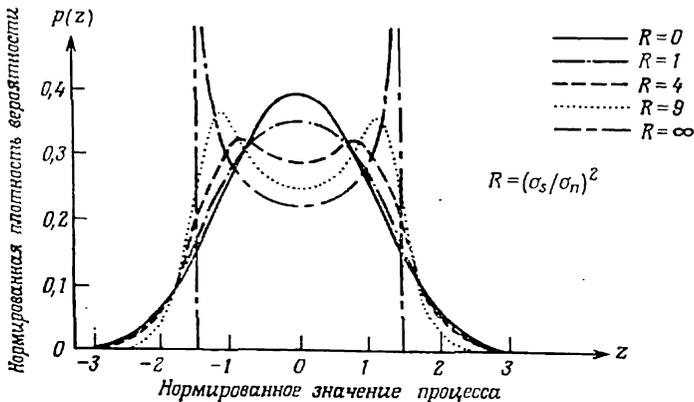


Рис. 2.7. Нормированная плотность вероятности гармонического процесса в гауссовском шуме.

монического процесса. Графики  $p(x)$  для различных значений отношения дисперсии гармонического процесса к дисперсии шума ( $R = \sigma_s^2 / \sigma_n^2$ ) приведены на рис. 2.7.

#### 2.4. Погрешности выборочных оценок

Формулы (2.6) и (2.7) из разд. 2.1.2 определяют плотность вероятности в соответствии со способом ее оценивания. Аналогично формулы (2.24) — (2.29) из разд. 2.2.3, определяющие среднее, средний квадрат и дисперсию, указывают также и метод оценивания этих величин. Но все эти определения содержат операцию перехода к пределу, которая на практике не осуществима; очевидно, нельзя обработать бесконечное число реализаций или одну реализацию бесконечной длины. Невозможность фактически выполнить предельный переход приводит к выборочной изменчивости оценок, полученных при обработке данных. Другими словами, анализ случайных процессов дает только выборочные оценки истинных значений интересующих нас параметров. Поэтому очень важно уметь оценивать величину

возможной ошибки при интерпретации и применении полученных оценок. Следует подчеркнуть, что здесь речь идет только об ошибках, связанных с выборочной изменчивостью оценок. Как уже отмечалось в разд. 1.1.3, существует много других потенциальных источников ошибок в ходе получения и предварительной обработки данных. Будем предполагать, что ошибки такого рода уже учтены.

#### 2.4.1. Систематические и случайные ошибки

Ошибки, появляющиеся при обработке случайных процессов, можно разделить на два типа. Ошибки первого типа, называемые *случайными*, являются следствием разброса значений оценок, полученных по разным выборкам для одного и того же

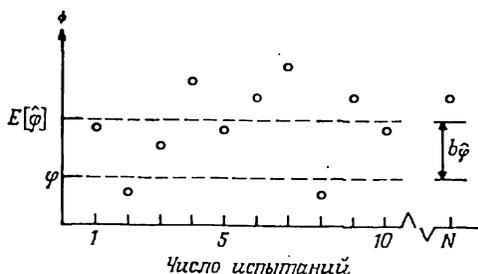


Рис. 2.8. Случайная и систематическая ошибки при оценивании параметра.

случайного процесса. Эти ошибки — прямое следствие конечности числа реализаций  $N$  или конечности длины  $T$  доступной наблюдению реализации. По этой причине случайные ошибки неизбежны. Ошибки второго типа — это систематические ошибки. При переходе от одной выборки к другой сохраняется величина и знак ошибки этого типа; такая ошибка называется также *смещением*. Смещение часто появляется при приближенном вычислении производных, например при оценивании плотностей. Теоретически  $p(x)$  из (2.7) определялась как предел при  $\Delta x \rightarrow 0$ , но практически  $\Delta x$  должна быть конечна.

Поясним подробнее смысл этих двух типов ошибок. Пусть оценивание некоторого параметра  $\varphi$  по независимым выборкам дает набор оценок  $\hat{\varphi}_i$ ,  $i=1, 2, 3, \dots$  (рис. 2.8). Смещение оценки  $\varphi$  равно математическому ожиданию оценки (среднему нескольких оценок) минус истинное значение оцениваемого параметра, т. е.

$$\text{Смещение} = b_{\hat{\varphi}} = E[\hat{\varphi}] - \varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\varphi}_i - \varphi. \quad (2.36)$$

Случайная ошибка оценки  $\varphi$  равна среднеквадратичному отклонению оценки  $\hat{\varphi}$ , т. е.

$$\text{Случайная ошибка} = \sigma_{\hat{\varphi}} = \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{\hat{\varphi}_i - E[\hat{\varphi}]\}^2 \right]^{1/2}. \quad (2.37)$$

Ошибки удобно выражать в относительных единицах. Такие нормированные ошибки будем обозначать буквой  $\varepsilon$  и определим следующим образом:

$$\varepsilon_b = b_{\hat{\varphi}}/\varphi, \quad \varepsilon_r = \sigma_{\hat{\varphi}}/\varphi. \quad (2.38)$$

Например, если  $\varepsilon_b = 0,1$ , то это значит, что оценка в среднем на 10% больше, чем  $\varphi$ . Если  $\varepsilon_r = 0,1$ , то это значит, что разброс  $\hat{\varphi}$  относительно среднего значения оценки имеет среднеквадратичное отклонение, равное 10% значения  $\varphi$ . Нормированная ошибка  $\varepsilon_r$  часто называется *коэффициентом вариации* оценки.

Плотность вероятности выборочной оценки называется обычно *выборочной плотностью* оценки и часто имеет очень сложный вид. Но если случайная ошибка не очень велика, скажем  $\varepsilon_r < 0,2$ , то приближенно можно считать, что выборочное распределение с приемлемой точностью аппроксимируется нормальным распределением, определенным формулой (2.30), со средним  $\mu_{\hat{\varphi}} = (1 + \varepsilon_b)\varphi$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma_{\hat{\varphi}} = \varepsilon_r\varphi$ , т. е.

$$p(\hat{\varphi}) \approx \frac{1}{\varepsilon_r\varphi\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[\hat{\varphi} - (1 + \varepsilon_b)\varphi]^2}{2(\varepsilon_r\varphi)^2} \right\}. \quad (2.39)$$

#### 2.4.2. Ошибки при оценивании моментов

Оценки среднего значения и среднего квадрата несмещенные, если только они верно вычислены по формулам (2.24) и (2.25) по конечному числу реализаций  $N$  или по формулам (2.27) и (2.28) по одной реализации конечной длины  $T$ . Случайные ошибки этих оценок хорошо известны; они вычислены в работе [2.2] и приведены в табл. 2.1. Для оценок, получаемых усреднением по ансамблю статистически независимых реализаций, в табл. 2.1 приведены точные значения ошибок. В случае же оценок, полученных усреднением по времени, формулы для ошибок применимы только к процессам, энергия которых равномерно распределена в полосе частот шириной  $B$ . Тогда можно показать [2.1], что  $N \approx 2BT$ . Поскольку такие процессы встречаются на практике редко, приведенные формулы нельзя использовать для вычисления ошибок; они могут служить только для ориентировочной оценки порядка ошибки.

Отметим две особенности выражений для ошибок, приведенных в табл. 2.1, которые очень важны из-за их типичности

Таблица 2.1

Случайные ошибки оценивания среднего значения и среднего квадрата

Способ оценивания	Оценки и соответствующие случайные нормированные ошибки $\epsilon_r$			
	Оценки среднего		Оценки среднего квадрата	
	Оценка $\hat{\mu}_x$	Нормированная ошибка $\epsilon_r$	Оценка $\hat{\Psi}_x^2$	Нормированная ошибка $\epsilon_r$
Среднее по ансамблю	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	$\frac{\sigma_x}{\mu_x \sqrt{N}}$	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$	$\sqrt{\frac{2}{N}}$
Среднее по времени	$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$	$\frac{\sigma_x}{\mu_x \sqrt{2BT}}$	$\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$	$\frac{1}{\sqrt{BT}}$

для всех оценок параметров, встречающихся в этой книге. Во-первых, случайная ошибка  $\epsilon_r$  обратно пропорциональна корню квадратному из числа реализаций  $N$  или длины реализации  $T$ . Поэтому для уменьшения  $\epsilon_r$  вдвое  $N$  или  $T$  нужно увеличить в четыре раза. Во-вторых, при получении оценок усреднением по времени ширина полосы  $B$  влияет на эффективный размер выборки в той же степени, что и длина реализации. Это значит, что при анализе широкополосных процессов, например в задачах связи, даже сравнительно короткая реализация может обеспечить очень высокую точность. С другой стороны, в применении к узкополосным процессам, таким, как атмосферная турбулентность или морское ветровое волнение, для получения приемлемой точности нужны очень длинные реализации.

#### 2.4.3. Ошибки оценивания плотности вероятности

Ранее уже отмечалось, что оценивание плотности вероятности по формулам (2.6) и (2.7) с использованием интервала конечной ширины  $\Delta x$  и реализации длины  $T$  связано с наличием как систематической, так и случайной ошибок. Систематическая ошибка является следствием конечности  $\Delta x$ , в силу чего формула (2.7) дает среднее значение плотности по интервалу  $x_0 \pm \Delta x/2$ . Значение оценки  $\hat{p}(x_0)$  привязывается к середине интервала лишь по соображениям удобства. Но в действительности  $\hat{p}(x_0)$  не равно  $p(x_0)$ , если только первая производная  $p(x)$  по  $x$  не равна постоянной,  $p'(x) = dp(x)/dx \neq c$ . Рис. 2.9 иллю-

стрирует эту особенность. Смещение оценки  $\hat{p}(x)$  в первом приближении равно [2.2]

$$\epsilon_b[\hat{p}(x)] \approx \frac{(\Delta x)^2}{24} \frac{p''(x)}{p(x)}. \quad (2.40)$$

где  $p''(x)$  есть вторая производная  $p(x)$  по  $x$ .

Если оценка  $p(x)$  получена усреднением по ансамблю  $N$  статистически независимых реализаций, то случайная ошибка приближенно равна [2.2]

$$\epsilon_r[\hat{p}(x)] \approx \frac{1}{\sqrt{N\Delta x p(x)}}. \quad (2.41)$$

Если  $\hat{p}(x)$  вычисляется усреднением по времени одной реализации длины  $T$  при равномерном распределении энергии по ин-

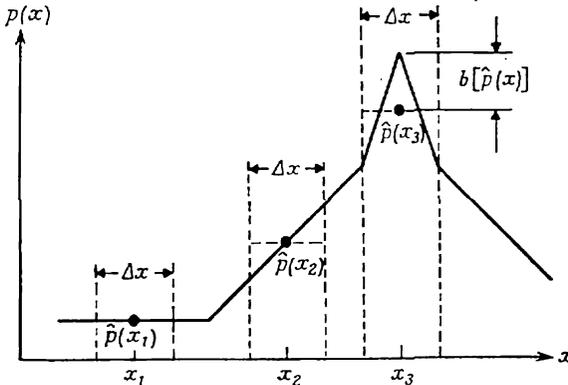


Рис. 2.9. Смещение оценки плотности вероятности.

тервалу частот ширины  $B$ , то нормированная случайная ошибка оценки  $p(x)$  приближенно равна

$$\epsilon_r[\hat{p}(x)] \approx \frac{1}{\sqrt{2BNT\Delta x p(x)}}. \quad (2.42)$$

Как и формулы из табл. 2.1, это выражение дает только порядок ошибки, поскольку случайные процессы с таким свойством встречаются редко.

Формулы (2.41) и (2.42) отражают ту же самую зависимость случайной ошибки от  $N$ ,  $T$  и  $B$ , что и аналогичные формулы для оценок среднего значения и среднего квадрата из табл. 2.1. Но в этом случае в знаменателе  $\epsilon_r$  появляется дополнительный член, а именно ширина интервала  $\Delta x$ , а в формуле для систематической ошибки (2.40)  $\Delta x$  стоит в числителе. Поэтому при выборе значения  $\Delta x$  для оценивания плотности всегда

приходится прибегать к компромиссному решению. Разумеется,  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_b$  могут быть сделаны одновременно сколь угодно малыми соответствующим увеличением длины реализации  $T$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 2.1. Bendat J. S. Principles and Applications of Random Noise Theory. Wiley, New York, 1958. Reprinted by Krieger Publishing Co., New York, 1977. [Имеется перевод: Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. — М.: Советское радио, 1965.]
- 2.2. Bendat J. S., Piersol A. G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]
- 2.3. Papoulis A. Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGraw-Hill, New York, 1965.

## Глава 3

### КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПЛОТНОСТИ

Широкий круг инженерных приложений теории случайных процессов связан с выявлением линейных зависимостей между двумя или более совокупностями данных. Такие линейные зависимости определяются обычно либо через корреляционные функции, либо через их преобразования Фурье, называемые спектральными плотностями. Корреляционные функции и спектральные плотности в принципе содержат одинаковую информацию, но исторически эти два понятия появились и развивались независимо. Корреляционные функции использовались в основном математиками и статистиками, тогда как спектральные плотности применялись главным образом в инженерных исследованиях. В некоторых случаях удобнее пользоваться корреляционными функциями, но в последнее время в инженерных приложениях более широкое применение находят спектральные плотности.

#### 3.1. Корреляционные функции

Прежде чем перейти к изложению основного материала этой главы, полезно напомнить классическое определение корреляционной функции, известное из элементарного курса статистики. Затем это классическое понятие легко распространить на случайные процессы путем введения нового параметра — сдвига времени.

##### 3.1.1. Классическое понятие корреляции

Пусть в некотором эксперименте получены два множества результатов измерений:  $x_i$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, N$ , и  $y_i$ ,  $i=1, 2, 3, \dots, N$ . Например,  $x_1$  — нагрузка, приложенная к конструкции,  $y_1$  — вызванное ею напряжение,  $x_2$  и  $y_2$  — другая нагрузка и вызванное ею напряжение соответственно. Такие измерения, сделанные при различных значениях нагрузки, приводят к зависимостям типа показанных на рис. 3.1. В идеальном случае измере-

ния дают точную линейную зависимость, как на рис. 3.1, а. Тогда сразу можно записать уравнение

$$y = a + bx, \quad (3.1)$$

где  $a$  — значение линейной функции при  $x=0$ ,  $b$  — наклон прямой. Неправильная постановка эксперимента может привести

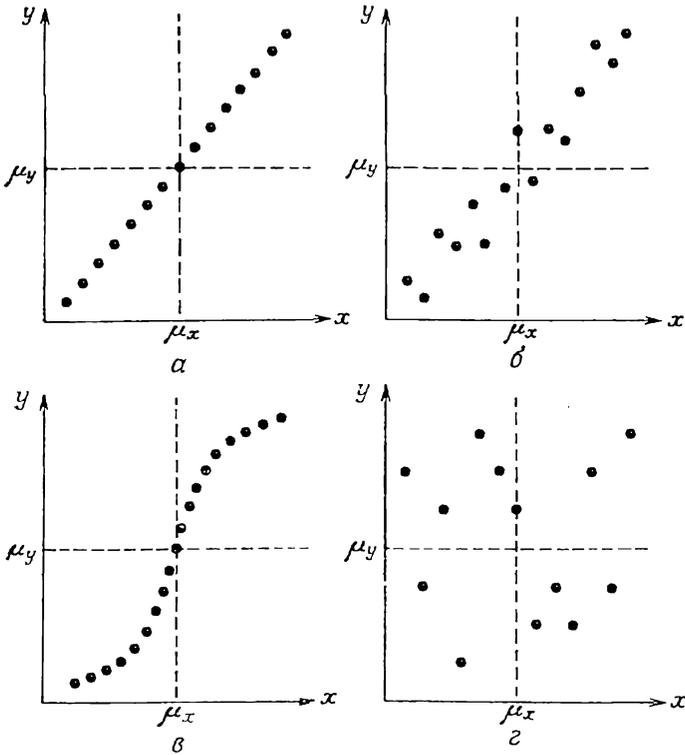


Рис. 3.1. Различные степени корреляции.

а — точная линейная корреляция; б — умеренная линейная корреляция; в — нелинейная корреляция; г — отсутствие корреляции.

к другой крайности, когда между нагрузкой и напряжением нет никакой связи; в результате получается зависимость типа показанной на рис. 3.1, г. На практике обычно приходится иметь дело с зависимостями промежуточного вида, такими, как показаны на рис. 3.1, б, в. На рис. 3.1, б угадывается линейная связь между  $x$  и  $y$ , но точного аналитического выражения для нее дать нельзя из-за случайного характера этой связи и (или) ошибок измерений. На рис. 3.1, в между  $x$  и  $y$  существует точная аналитическая зависимость, но она нелинейна.

Меру линейности связи  $x$  и  $y$  можно задать как усредненное произведение  $x - \mu_x$  и  $y - \mu_y$ . Если размер выборки  $N$  стремится к  $\infty$ , то предел этого усредненного произведения определяет корреляцию  $x$  и  $y$ , т. е.

$$\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y). \quad (3.2)$$

Если  $x$  и  $y$  не связаны между собой, как на рис. 3.1, *г*, то сумма положительных произведений  $x_i - \mu_x$  и  $y_i - \mu_y$  равна сумме отрицательных произведений, поэтому усредненное произведение  $\sigma_{xy} = 0$ . В случае, представленном на рис. 3.1, *а*,  $x_i - \mu_x$  и  $y_i - \mu_y$  одновременно либо положительны, либо отрицательны; следовательно, их произведение всегда положительно и усредненное произведение равно

$$\sigma_{xy} = \sigma_x \sigma_y. \quad (3.3)$$

Скоро будет показано, что равенство (3.3) задает наибольшее возможное значение корреляции двух случайных величин. По этой причине в качестве меры коррелированности обычно берут отношение

$$\rho_{xy} = \sigma_{xy} / \sigma_x \sigma_y, \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1, \quad (3.4)$$

которое называется коэффициентом корреляции. Величина  $\rho_{xy}$  характеризует меру линейной зависимости между двумя переменными  $x$  и  $y$  и меняется между  $-1$  и  $+1$ ;  $\rho_{xy} = -1$  означает, что положительным значениям  $x - \mu_x$  соответствуют отрицательные значения  $y - \mu_y$ . Рис. 3.1, *б*, *в* дают примеры зависимости с коэффициентом корреляции, заключенным между нулем и  $\pm 1$ .

Неравенство (3.4) можно доказать следующим образом. Для любых действительных чисел  $a$  и  $b$  математическое ожидание

$$E\{[a(x - \mu_x) + b(y - \mu_y)]^2\} \geq 0. \quad (3.5)$$

Из неравенства (3.5), раскрывая скобки, получаем

$$\begin{aligned} E[a^2(x - \mu_x)^2 + 2ab(x - \mu_x)(y - \mu_y) + b^2(y - \mu_y)^2] = \\ = a^2\sigma_x^2 + 2ab\sigma_{xy} + b^2\sigma_y^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Предположим, что  $b \neq 0$ , и разделим обе части (3.6) на  $b^2$ . В результате получим

$$(a/b)^2\sigma_x^2 + 2(a/b)\sigma_{xy} + \sigma_y^2 \geq 0. \quad (3.7)$$

Левая часть (3.7) представляет собой квадратное уравнение относительно  $a/b$ , не имеющее различных действительных корней. Поэтому дискриминант этого уравнения не превосходит нуля, т. е.

$$\text{Дискриминант} = 4\sigma_{xy}^2 - 4\sigma_x^2\sigma_y^2 \leq 0. \quad (3.8)$$

Следовательно,  $\sigma_{xy}^2 \leq \sigma_x^2 \sigma_y^2$ ,  
 $-1 \leq \sigma_{xy} / \sigma_x \sigma_y \leq 1$ ,

что и утверждается в (3.4).

Важное соотношение, включающее коэффициент корреляции, можно получить в тех случаях, когда можно принять, что  $y$  является результатом линейных операций над  $x$  плюс статистически независимый шум  $n$  (который учитывает и нелинейные эффекты), т. е.

$$y = a + bx + n. \quad (3.9)$$

В этом случае линейный вклад  $x$  в дисперсию  $y$ , который обозначим через  $\sigma_{y:x}^2$ , равен

$$\sigma_{y:x}^2 = \rho_{xy}^2 \sigma_y^2. \quad (3.10)$$

Другими словами, квадрат коэффициента корреляции между  $x$  и  $y$  определяет, какая доля дисперсии  $y$  внесена линейной зависимостью от  $x$ . Следовательно, вклад всех остальных факторов (включая и нелинейные) в дисперсию  $y$  равен

$$\sigma_{y:n}^2 = (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2. \quad (3.11)$$

Соотношение (3.10), которое иногда называется соотношением для линейно обусловленной мощности (выхода), доказывается следующим образом. Из уравнения (3.9) находим дисперсию  $y$  в предположении, что шум  $n$  имеет нулевое среднее:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= E[(y - \mu_y)^2] = E[\{b(x - \mu_x) + n\}^2] = \\ &= E[b^2(x - \mu_x)^2 + 2b(x - \mu_x)n + n^2] = b^2\sigma_x^2 + \sigma_n^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Очевидно, что в формуле (3.12)  $b^2\sigma_x^2$  представляет собой вклад  $x$  в дисперсию  $y$ , а  $\sigma_n^2$  — вклад  $n$ , поэтому

$$\sigma_{y:x}^2 = b^2\sigma_x^2, \quad \sigma_{y:n}^2 = \sigma_n^2. \quad (3.13)$$

Ковариация  $x$  и  $y$  задается соотношением (3.2):

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = E[(x - \mu_x)\{b(x - \mu_x)\}] = \\ &= bE[(x - \mu_x)^2] = b\sigma_x^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из формул (3.4) и (3.13) следует, что

$$\rho_{xy}^2 \sigma_y^2 = \frac{b^2 \sigma_x^4}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \sigma_y^2 = b^2 \sigma_x^2 = \sigma_{y:x}^2,$$

как и утверждается в (3.10). Далее из формулы (3.12) получаем

$$(1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 = \sigma_y^2 - b^2 \sigma_x^2 = \sigma_{y:n}^2,$$

что доказывает справедливость равенства (3.11).

## 3.1.2. Обобщение на случайные процессы

Пусть теперь интересующие нас данные являются результатами измерения двух случайных процессов  $\{x(t)\}$  и  $\{y(t)\}$  в непрерывном времени, которые предполагаются стационарными и эргодическими, так что их можно описать индивидуальными реализациями  $x(t)$  и  $y(t)$ . Введенное в предыдущем разделе понятие корреляции можно применить и в этом случае, если только ввести дополнительную переменную  $\tau$  — запаздывание  $y(t)$  относительно  $x(t)$ . Как уже отмечалось в гл. 1, в зависимости от условий задачи вместо времени может фигурировать любая другая независимая переменная, например расстояние.

По аналогии с формулой (3.2) определим *корреляционную функцию*  $x(t)$  и  $y(t)$  для произвольного сдвига времени  $\tau$  как

$$C_{xy}(\tau) = E[\{x(t) - \mu_x\} \{y(t + \tau) - \mu_y\}] = \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\} \{y(t + \tau) - \mu_y\} dt = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y, \quad (3.15)$$

где 
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt. \quad (3.16)$$

В общем случае, когда процессы  $\{x(t)\}$  и  $\{y(t)\}$  различны,  $R_{xy}(\tau)$  из (3.16) называется *взаимной ковариационной функцией*  $x(t)$  и  $y(t)$ . В частном случае  $\{y(t)\} = \{x(t)\}$

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{x(t) - \mu_x\} \{x(t + \tau) - \mu_x\} dt = R_{xx}(\tau) - \mu_x^2, \quad (3.17)$$

где 
$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (3.18)$$

называется *ковариационной функцией*  $x(t)$ . Следует отметить, что в некоторых работах ковариационной функцией называют величину, определенную в (3.15)<sup>1)</sup>. Поскольку эти две функции связаны соотношением  $R_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau) + \mu_x \mu_y$ , то  $R_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau)$ , если только средние обих случайных процессов равны нулю.

По определению ковариационная функция — всегда четная функция  $\tau$ , т. е.

$$R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau). \quad (3.19)$$

<sup>1)</sup> В переводе применяется терминология, принятая в отечественной литературе. — *Прим. перев.*

В то же время взаимная ковариационная функция не обладает свойством четности или нечетности, но удовлетворяет соотношению

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau). \tag{3.20}$$

Из формул (2.27) — (2.29)<sup>1)</sup> следует, что значение ковариационной функции в нуле равно среднему квадрату процесса, т. е.

$$R_{xx}(0) = \psi_x^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2. \tag{3.21}$$

Если случайный процесс не содержит иных детерминированных компонент, кроме ненулевого среднего, то с ростом  $\tau$  ковариационная

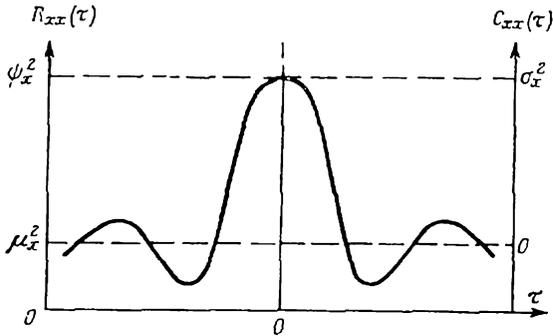


Рис. 3.2. Свойства ковариационной и корреляционной функций.

ционная функция стремится к квадрату среднего, т. е.

$$R_{xx}(\infty) = \mu_x^2. \tag{3.22}$$

Рис. 3.2 иллюстрирует эти свойства корреляционной и ковариационной функций.

Способом, подобным использованному при доказательстве соотношения (3.4), можно показать, что для взаимной ковариационной функции имеет место неравенство

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}, \tag{3.23}$$

называемое *неравенством для взаимных ковариационных функций*. Это же неравенство справедливо и для корреляционных и взаимных корреляционных функций и позволяет ввести *нормированную корреляционную функцию*

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{\sqrt{C_{xx}(0)C_{yy}(0)}} = \frac{R_{xy}(\tau) - \mu_x\mu_y}{\sqrt{[R_{xx}(0) - \mu_x^2][R_{yy}(0) - \mu_y^2]}}, \tag{3.24}$$

причем  $|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1$  для всех  $\tau$ . Соотношение (3.20) показывает, что взаимная ковариационная функция, вообще говоря, не

<sup>1)</sup> С учетом соотношений (3.17) и (3.18). — *Прим. перев.*

является четной, а  $R_{xy}(0)$  не связана каким-либо определенным образом со средним квадратом реализаций. График типичной взаимной ковариационной функции приведен на рис. 3.3.

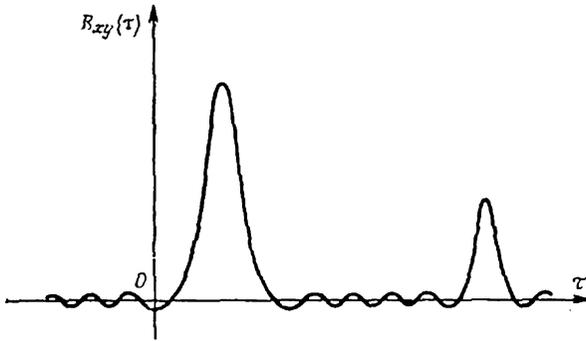


Рис. 3.3. Типичная взаимная ковариационная функция.

### 3.2. Спектральные плотности

Как уже отмечалось, спектральную плотность можно ввести как преобразование Фурье ковариационной функции. Однако ее можно определить и посредством обобщенного анализа Фурье или же в терминах более близкой к практике аналоговой фильтрации.

#### 3.2.1. Определение спектральной плотности через ковариационную функцию

Спектральная плотность двух реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$  стационарных эргодических случайных процессов  $\{x(t)\}$  и  $\{y(t)\}$  определяется как преобразование Фурье их ковариационной функции:

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (3.25)$$

В общем случае процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  различны и  $S_{xy}(f)$  из (3.25) называется *взаимной спектральной плотностью* или, проще говоря, *взаимным спектром*  $x(t)$  и  $y(t)$ . В частном случае  $\{y(t)\} = \{x(t)\}$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (3.26)$$

и  $S_{xx}(f)$  называется *спектральной плотностью* или *спектром*  $x(t)$ , а иногда, главным образом в теории связи, — *спектральной плотностью мощности*<sup>1)</sup> в силу ряда исторических причин.

Спектральные плотности в (3.25) и (3.26) определены для всех частот, как положительных, так и отрицательных, и, чтобы подчеркнуть этот факт, мы будем называть их *двусторонними* спектрами. Из свойств симметрии ковариационных функций, описываемых соотношениями (3.19) и (3.20), следует, что

$$S_{xx}(-f) = S_{xx}(f), \quad (3.27)$$

$$S_{xy}(-f) = S_{xy}^*(f) = S_{yx}(f). \quad (3.28)$$

Двусторонние спектральные плотности удобны для аналитического изучения, но практически удобнее иметь дело со спектрами, определенными только для неотрицательных частот. Такие спектры называются *односторонними* и, как следует из формул (3.25) и (3.26), задаются следующим образом:

$$G_{xy}(f) = \begin{cases} 2S_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, & f \geq 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} 2S_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, & f \geq 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Всюду в этой книге при рассмотрении прикладных задач будем пользоваться односторонними спектрами и обозначать их как  $G(f)$ , а при теоретическом анализе — двусторонними спектрами и обозначать их как  $S(f)$ . Связь между ними дается соотношением (3.30), а рис. 3.4 иллюстрирует эту связь.

Так как ковариационные функции всегда четные функции  $\tau$ , то очевидно, что спектры задаются только действительной частью преобразования Фурье (3.26). Поэтому

$$G_{xx}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau = 4 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau. \quad (3.31)$$

Обратное преобразование дает, естественно, ковариационную функцию

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) \cos 2\pi f\tau df. \quad (3.32)$$

<sup>1)</sup> Иногда говорят также «автоспектральная плотность» или «автоспектр». — Прим. перев.

Из уравнений (3.21) и (3.32) при  $\tau=0$  получаем

$$R_{xx}(0) = \int_0^{\infty} G_{xx}(f) df = \psi_x^2 = \sigma_x^2 + \mu_x^2. \quad (3.33)$$

Другими словами, общая площадь под графиком спектральной плотности равна сумме дисперсии процесса и квадрата его сред-

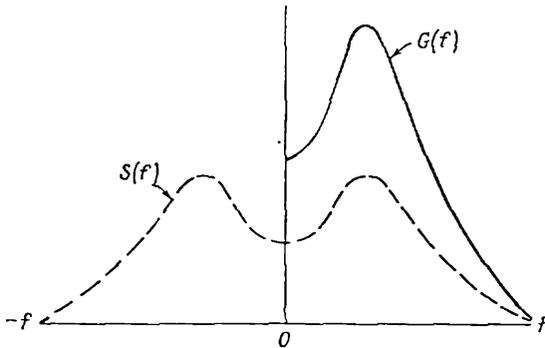


Рис. 3.4. Односторонняя и двусторонняя спектральные плотности.

него значения. Далее, из формулы (3.17) следует, что

$$R_{xx}(\tau) = C_{xx}(\tau) + \mu_x^2, \quad (3.34)$$

и с учетом соотношения (3.26) получаем

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + \mu_x^2 \delta(f), \quad (3.35)$$

где  $\delta(f)$  — дельта-функция, определенная в разд. 1.2.4. Следовательно, ненулевое среднее значение входит в спектральную плотность как дельта-функция при  $f=0$  с масштабирующим множителем  $\mu_x^2$ . Наконец, площадь под графиком спектра, заключенная между двумя произвольными значениями частоты  $f_1$  и  $f_2$ , равна среднему квадрату процесса в этой полосе частот спектра, т. е.

$$\psi_x^2(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} G_{xx}(f) df. \quad (3.36)$$

Рис. 3.5 иллюстрирует эти свойства спектральной плотности.

Взаимная ковариационная функция  $R_{xy}(\tau)$  равна обратному преобразованию Фурье двустороннего взаимного спектра

$S_{xy}(f)$  из формулы (3.25), т. е.

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (3.37)$$

В случае одностороннего спектра  $G_{xy}(f)$  соотношение (3.25) принимает вид

$$G_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = C_{xy}(f) - jQ_{xy}(f). \quad (3.38)$$

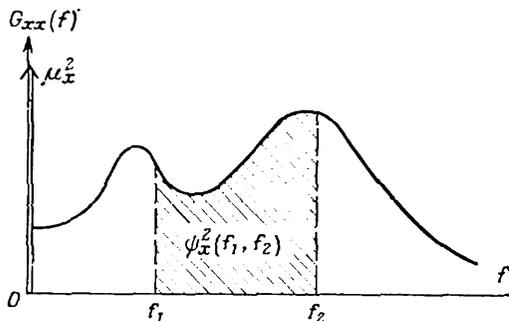


Рис. 3.5. Свойства спектральной плотности.

Действительная часть

$$C_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau. \quad (3.39a)$$

называется *коспектральной плотностью* или, кратко, *коспектрором*, а мнимая часть

$$Q_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau. \quad (3.39b)$$

называется *квадратурной спектральной плотностью* или *квадратурным спектром*. Через  $C_{xy}(f)$  и  $Q_{xy}(f)$  соотношение (3.37) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= 1/2 \int_0^{\infty} G_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df + 1/2 \int_0^{\infty} G_{xy}^*(f) e^{-j2\pi f\tau} df = \\ &= \int_0^{\infty} [C_{xy}(f) \cos 2\pi f\tau + Q_{xy}(f) \sin 2\pi f\tau] df. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Заметим, что, зная  $C_{xy}(f)$ , можно найти  $R_{xy}(0)$ . Удобно (и общепринято на практике) выражать взаимные спектры через модуль и фазовый угол следующим образом:

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| e^{-i\theta_{xy}(f)}, \quad (3.41)$$

где

$$|G_{xy}(f)| = \sqrt{C_{xy}^2(f) + Q_{xy}^2(f)}, \quad (3.41a)$$

$$\theta_{xy}(f) = \text{arctg}[Q_{xy}(f)/C_{xy}(f)]. \quad (3.41б)$$

График типичной взаимной спектральной плотности приведен на рис. 3.6.

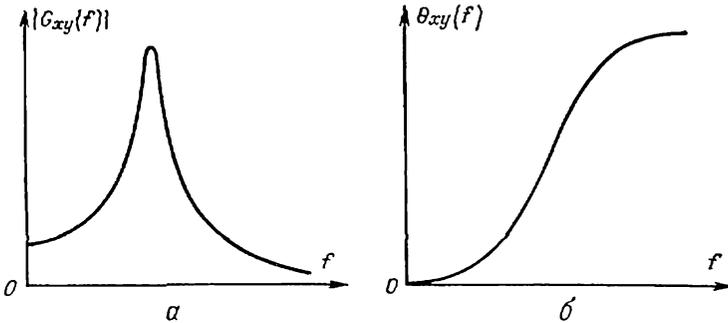


Рис. 3.6. Типичная взаимная спектральная плотность.  
а — модуль; б — фаза.

Знаки  $C_{xy}(f)$  и  $Q_{xy}(f)$  могут быть положительными или отрицательными и определяют квадрант, в котором находится фазовый угол  $\theta_{xy}(f)$ . Эти знаки, кроме того, определяют, следует ли процесс  $y(t)$  за  $x(t)$ , т. е. выполняется ли соотношение  $y(t) = x(t - \tau_0)$  при некотором  $\tau_0 > 0$  — положительном запаздывании сигнала, передаваемого из точки  $x$  в точку  $y$  на частоте  $f$ . Если сигналы в этих двух точках измеряются в одной шкале времени, то из равенства  $y(t) = x(t - \tau_0)$  следует, что  $y(0)$  вызвано  $x(-\tau_0)$ , а  $y(\tau_0)$  вызвано  $x(0)$ . Положительное значение  $\theta_{xy}(f)$  соответствует запаздыванию  $y(t)$  относительно  $x(t)$  на частоте  $f$ , тогда как отрицательное значение  $\theta_{xy}(f)$  указывает, что  $y(t)$  опережает  $x(t)$  на частоте  $f$ .

Модуль взаимного спектра входит в важное неравенство для взаимных спектров

$$|G_{xy}(f)|^2 \leq G_{xx}(f) G_{yy}(f). \quad (3.42)$$

Это неравенство, которое будет доказано в следующем разделе, аналогично неравенству для взаимных ковариационных функ-

ций (3.23) и позволяет определить функцию когерентности

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f)G_{yy}(f)}, \quad 0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1, \quad (3.43)$$

которая аналогична квадрату нормированной корреляционной функции, определенной в (3.24)<sup>1)</sup>. Как мы увидим ниже, функция когерентности (иногда называемая квадратом когерентности) играет в приложениях более значительную роль, чем нормированная корреляционная функция.

### 3.2.2. Определение спектральных плотностей посредством преобразования Фурье

Второй способ введения спектральных плотностей — это непосредственное преобразование Фурье случайных процессов. Пусть  $\{x(t)\}$  и  $\{y(t)\}$  — два стационарных эргодических случайных процесса. Финитные преобразования Фурье  $k$ -х реализаций длины  $T$  каждого процесса определяются в виде

$$X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad (3.44)$$

$$Y_k(f, T) = \int_0^T y_k(t) e^{-i2\pi ft} dt.$$

Двусторонняя взаимная спектральная плотность этих двух случайных процессов определяется тогда с использованием  $X^*Y$ , но не  $XY^*$ , соотношением

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [X_k^*(f, T) Y_k(f, T)], \quad (3.45)$$

где оператор математического ожидания  $E$  обозначает операцию усреднения по индексу  $k$ . Односторонние взаимные спектральные и спектральные плотности определяются следующим образом:

$$G_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E [X_k^*(f, T) Y_k(f, T)], \quad (3.46)$$

$$G_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E [|X_k(f, T)|^2]. \quad (3.47)$$

Функции  $S_{xy}(f)$ ,  $S_{xx}(f)$ ,  $G_{xy}(f)$  и  $G_{xx}(f)$ , определенные формулами (3.45) — (3.47), идентичны соответствующим функциям,

<sup>1)</sup> Эта аналогия действительно существует, но нужно помнить, что функция когерентности зависит от частоты. — Прим. перев.

определенным соотношениями (3.25), (3.26), (3.29) и (3.30) как преобразования Фурье ковариационных функций. Это утверждение обычно называется *теоремой Винера — Хинчина*. Доказательство этой теоремы можно найти в работе [3.1]. Следовательно, все соотношения и свойства, приведенные в разд. 3.2.1, справедливы и в этом случае.

Используя определение спектральной плотности (3.45), можно доказать неравенство (3.42) для взаимных спектров следующим образом. Если заданы финитные преобразования Фурье вида (3.44), то для любых действительных чисел  $a$  и  $b$  и фазы взаимного спектра  $\theta_{xy}(f)$  выполняется неравенство

$$\frac{1}{T} E [ |aX_k(f, T) + bY_k(f, T) e^{j\theta_{xy}(f)}|^2 ] \geq 0. \quad (3.48)$$

Раскрывая выражение в скобках, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} E [ a^2 |X_k(f, T)|^2 + abX_k^*(f, T) Y_k(f, T) e^{j\theta_{xy}(f)} + \\ + abX_k(f, T) Y_k^*(f, T) e^{-j\theta_{xy}(f)} + b^2 |Y_k(f, T)|^2 ] \geq 0. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Переход к пределу в (3.49) при  $T \rightarrow \infty$  дает с учетом (3.45)

$$a^2 S_{xx}(f) + ab [S_{xy}(f) e^{j\theta_{xy}(f)} + S_{yx}(f) e^{-j\theta_{xy}(f)}] + b^2 S_{yy}(f) \geq 0. \quad (3.50)$$

Но в силу соотношения (3.28)  $S_{yx}(f) = S_{xy}^*(f)$ , поэтому

$$S_{xy}(f) = |S_{xy}(f)| e^{-j\theta_{xy}(f)}, \quad S_{yx}(f) = |S_{xy}(f)| e^{j\theta_{xy}(f)}. \quad (3.51)$$

Подставляя выражения (3.51) в формулу (3.50), получаем

$$a^2 S_{xx}(f) + 2ab |S_{xy}(f)| + b^2 S_{yy}(f) \geq 0. \quad (3.52)$$

Положив  $b \neq 0$ , разделим обе части неравенства (3.52) на  $b^2$ . В результате приходим к неравенству

$$(a/b)^2 S_{xx}(f) + 2(a/b) |S_{xy}(f)| + S_{yy}(f) \geq 0, \quad (3.53)$$

левая часть которого есть квадратное уравнение относительно  $a/b$ , не имеющее действительных различных корней, которое аналогично уравнению (3.7) в доказательстве неравенства для взаимных ковариационных функций. Дискриминант этого уравнения также не может быть положительным, т. е.

$$4 |S_{xy}(f)|^2 - 4 S_{xx}(f) S_{yy}(f) \leq 0, \quad (3.54)$$

откуда

$$|S_{xy}(f)|^2 \leq S_{xx}(f) S_{yy}(f). \quad (3.55)$$

Из формул (3.29) и (3.30) следует

$$|G_{xy}(f)|^2 \leq G_{xx}(f) G_{yy}(f),$$

что и доказывает справедливость соотношений (3.42) и (3.43).

### 3.2.3. Определение спектральных плотностей посредством аналоговой фильтрации

До широкого внедрения в практику цифровых способов обработки сигналов спектральные плотности, главным образом автоспектры, оценивались при помощи аналоговых анализаторов так, как схематично показано на рис. 3.7. Многие устройства подобного типа все еще используются. Принцип их действия состоит в следующем. Реализация случайного процесса  $x(t)$  проходит через узкополосный фильтр с полосой пропускания  $\Delta f$  и частотой среза  $f$

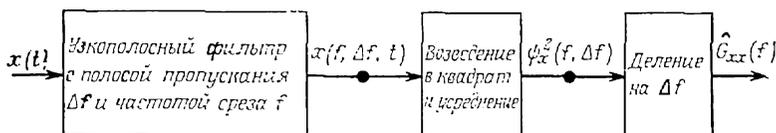


Рис. 3.7. Определение спектральной плотности при помощи аналоговой фильтрации.

ния  $\Delta f$  и изменяемой частотой среза  $f$ . Выходной сигнал этого фильтра  $x(f, \Delta f, t)$  возводится в квадрат, усредняется по времени и делится на  $\Delta f$ ; при этом получается оценка спектральной плотности вида

$$\hat{G}_{xx}(f) = \frac{1}{(\Delta f)T} \int_0^T x^2(f, \Delta f, t) dt. \quad (3.56)$$

Если в оценке (3.56) перейти к пределу при  $T \rightarrow \infty$ ,  $\Delta f \rightarrow 0$  так, что  $(\Delta f)T \rightarrow \infty$ , то в результате получим одностороннюю спектральную плотность, определенную ранее формулами (3.30) и (3.47) т. е.

$$G_{xx}(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta f} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(f, \Delta f, t) dt \right]. \quad (3.57)$$

Справедливость этого равенства доказывается в работе [3.1].

### 3.3. Общие интерпретации

Последующие главы этой книги посвящены непосредственно применениям корреляционных функций и спектральных плотностей к различным инженерным задачам. Сводка общих интерпретаций этих функций представляет собой полезное введение в этот материал. Типичные единицы измерения некоторых важных величин приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

## Основные величины и типичные единицы их измерения

Величина	Единица измерения
$t, \Delta t, \tau$	Секунда (или другие подходящие единицы)
$x(t), y(t)$	Вольт (или другие подходящие единицы)
$B, B_c, B_r$	Герц
$C_{xx}(\tau), C_{xy}(\tau)$	(Вольт) <sup>2</sup>
$f, \Delta f$	Герц
$G_{xx}(f),  G_{xy}(f) $	(Вольт) <sup>2</sup> · (Секунда) = (Вольт) <sup>2</sup> /Герц
$R_{xx}(\tau), R_{xy}(\tau)$	(Вольт) <sup>2</sup>
$S_{xx}(f),  S_{xy}(f) $	(Вольт) <sup>2</sup> · (Секунда) = (Вольт) <sup>2</sup> /Герц
$T, T_{\text{общ}}$	Секунда
$X(f, T), Y(f, T)$	(Вольт) · (Секунда)
$ X(f, T) ^2,  Y(f, T) ^2$	(Вольт) <sup>2</sup> · (Секунда) <sup>2</sup>
$\gamma^2_{xy}(f),  \gamma_{xy}(f) $	Безразмерная
$\epsilon_b, \epsilon_r, \epsilon$	Безразмерная
$\theta_{xy}(f)$	Радиян
$\mu_x, \mu_y$	Вольт
$\rho_{xy}, \rho_{xy}(\tau)$	Безразмерная
$\sigma^2_x, \sigma^2_y, \sigma_{xy}$	(Вольт) <sup>2</sup>
$\psi^2_x, \psi^2_y$	(Вольт) <sup>2</sup>

## 3.3.1. Ковариационные функции

Ковариационная функция случайного процесса обычно интерпретируется как мера того, в какой степени знание прошлого случайного процесса позволяет предсказать его будущее. Разумеется, если известна плотность случайного процесса  $p(x)$ , то, как показано в разд. 2.1.2, всегда можно определить вероятность того, что его будущие значения попадут в заданный интервал. Однако если ковариационная функция при данном сдвиге  $\tau$  отлична от  $\mu^2$  (или отлична от нуля, если  $\mu=0$ ), то можно надеяться, что знание поведения реализации процесса  $x(t)$  на интервале  $0 \leq t \leq T$  позволит улучшить прогноз  $x(t)$  для момента времени  $t = T + \tau$  по сравнению с общими вероятностными утверждениями, которые можно сделать на основе знания  $p(x)$ . Чтобы показать это, рассмотрим четыре общих типа случайных процессов, которые часто встречаются на прак-

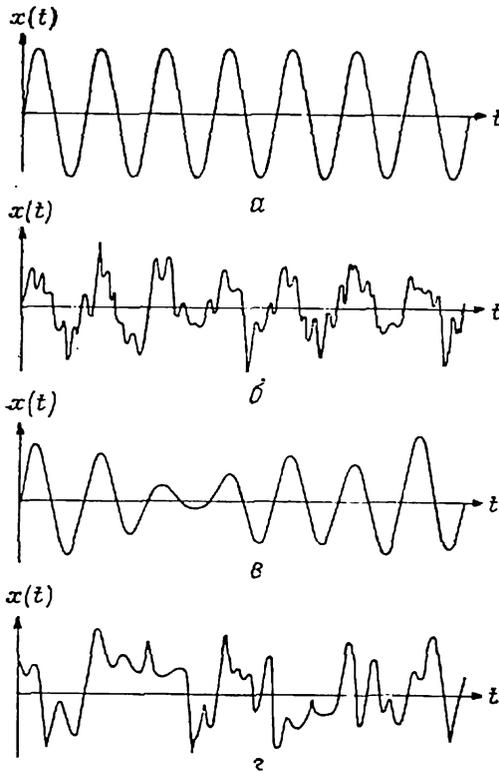


Рис. 3.8. Четыре примера реализаций случайных процессов. а — гармонический процесс; б — гармонический процесс плюс случайный шум; в — узкополосный случайный шум; г — широкополосный случайный шум.

тике: а) гармонический процесс; б) гармонический процесс плюс широкополосный случайный шум; в) узкополосный случайный шум; г) широкополосный случайный шум. Типичные реализации этих процессов приведены на рис. 3.8.

Рассмотрим сначала гармонический процесс, реализация которого показана на рис. 3.8, а. Его можно представить как стационарный эргодический случайный процесс с реализациями

$$x_k(t) = X \sin(2\pi f_0 t + \theta_k), \tag{3.58}$$

где  $\theta_k$  распределены равномерно на интервале  $[0, 2\pi]$ , т. е.

$$p(\theta) = 1/2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{3.59}$$

Согласно формуле (3.15), ковариационная функция гармонического процесса определяется как

$$R_{xx}(\tau) = E[x_k(t) x_k(t + \tau)]. \tag{3.60}$$

Подставляя выражение (3.58) и усредняя по  $\theta$  с учетом (3.59), получаем

$$R_{xx}(\tau) = (X^2/2\pi) \int_0^{2\pi} \sin(2\pi f_0 t + \theta) \sin[2\pi f_0(t + \tau) + \theta] d\theta = \\ = (X^2/2) \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (3.61)$$

Следовательно, ковариационная функция гармонического процесса есть косинусоида (рис. 3.9, *a*), амплитуда которой равна среднему квадрату гармонического процесса. Главный вывод, который следует из вышеизложенного, заключается в том, что огибающая ковариационной функции гармонического процесса не зависит от сдвига времени; это наводит на мысль, что знание прошлого такого процесса позволяет точно предсказать его будущее. И действительно, возвращаясь к рис. 3.8, *a*, мы

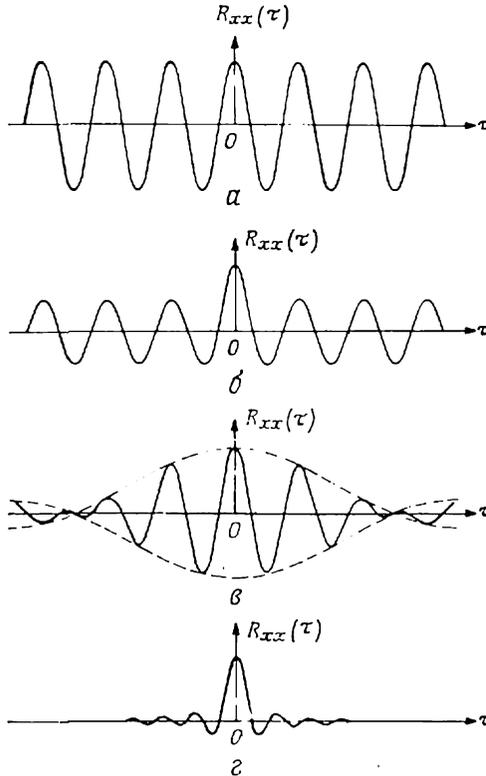


Рис. 3.9. Идеализированные ковариационные функции.

*a* — гармонический процесс; *b* — гармонический процесс в случайном шуме; *c* — узкополосный случайный шум; *d* — широкополосный случайный шум.

видим, что, наблюдая реализацию такого процесса на отрезке длины  $T$ , легко предсказать точное значение этой реализации для любого момента времени в будущем в предположении, что процесс остается стационарным.

Рассмотрим теперь широкополосный случайный шум, одна из реализаций которого изображена на рис. 3.8, *г*. Предположим, что его спектральная плотность постоянна в широкой полосе частот  $B$ , т. е.

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} G, & 0 \leq f \leq B; \\ 0, & f > B. \end{cases} \quad (3.62)$$

Тогда из формулы (3.32) следует, что его ковариационная функция имеет вид

$$R_{xx}(\tau) = \int_0^B G \cos 2\pi f \tau df = GB \left( \frac{\sin 2\pi B \tau}{2\pi B \tau} \right). \quad (3.63)$$

Как видно из рис. 3.9, *г*, эта ковариационная функция убывает очень быстро, первый раз пересекая ось абсцисс в точке  $\tau = 1/(2B)$ . Напрашивается вывод, что в этом случае знание поведения процесса в прошлом (от 0 до  $T$ ) мало что дает для предсказания его будущего, кроме ближайших к концу интервала наблюдения моментов времени, а именно отстоящих не далее чем на  $1/(2B)$  от конца интервала наблюдения. Из рис. 3.8, *г* видно, что этот вывод находится в согласии с видом реализаций широкополосного случайного шума, т. е. хаотический характер этих реализаций позволяет существенно улучшить прогноз значений процесса на основе наблюдений его прошлого только для ближайшего будущего.

Обращаясь к узкополосному процессу, ограничимся идеальным случаем, когда спектральная плотность постоянна в узкой полосе частот  $B$  с центром в  $f_0$ , т. е.

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} G, & f_0 - B/2 \leq f \leq f_0 + B/2; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.64)$$

Используя снова соотношение (3.32), получим ковариационную функцию для этого случая

$$R_{xx}(\tau) = GB \left( \frac{\sin \pi B \tau}{\pi B \tau} \right) \cos 2\pi f_0 \tau. \quad (3.65)$$

Как видно из рис. 3.9, *в*, огибающая этой ковариационной функции убывает медленно, поскольку  $B$  мало, и первый раз пересекает ось абсцисс в точке  $\tau = 1/B$ . Это дает основание считать, что знание реализации процесса от 0 до  $T$  может помочь предсказать будущие значения процесса  $x(t)$ , правда, с уменьшающейся точностью. То, что это действительно так, следует из

почти периодического характера реализаций. Медленное изменение огибающей реализации позволяет улучшить прогноз, но чем дальше это будущее, тем хуже будет прогноз из-за случайных колебаний этой огибающей.

Рассмотрим, наконец, гармонический процесс в случайном широкополосном шуме. На рис. 3.8, б представлена типичная реализация такого процесса. В этом случае ковариационная функция равна сумме ковариационных функций гармонического процесса и широкополосного шума, задаваемых формулами (3.61) и (3.63) соответственно, т. е.

$$R_{xx}(\tau) = \frac{X^2}{2} \cos 2\pi f_0 \tau + GB \left( \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau} \right), \quad (3.66)$$

где  $X$  — амплитуда гармонического процесса,  $G$  — спектральная плотность шума. Характерный график такой ковариационной функции представлен на рис. 3.9, б. Заметим, что ковариационная функция быстро сходится к косинусоидальному члену, соответствующему гармонической составляющей процесса. Это позволяет заключить, что прогноз на отдаленное будущее возможен с большей точностью по сравнению с прогнозом, сделанным на основе знания только плотности вероятности. Из рис. 3.8, б видно, что это заключение находится в согласии с характером реализаций процесса.

Ковариационные функции можно интерпретировать также и с помощью доминирующих частот процесса, но информацию такого рода удобнее получать из спектральных плотностей. Не следует также забывать о важных для общей интерпретации ковариационных функций соотношениях (3.21) и (3.22), связывающих ковариационные функции со средним квадратом по всей полосе частот, средним значением и дисперсией случайного процесса. Наконец, важно знать, что ковариационная функция не содержит никакой информации о фазе. Например, ковариационная функция гармонического процесса (3.61) есть косинусоида, фаза которой равна нулю независимо от начальной фазы гармонического процесса.

### 3.3.2. Спектральные плотности

Поскольку спектральная плотность является функцией частоты, то обычно она интерпретируется как распределение среднего квадрата процесса по частотам, т. е. как скорость изменения среднего квадрата в зависимости от частоты. Ключевое соотношение для интерпретации дается равенством (3.26), а именно

$$\psi_x^2(f_1, f_2) = \int_{f_1}^{f_2} G_{xx}(f) df, \quad (3.67)$$

где  $\psi_x^2(f_1, f_2)$  есть средний квадрат процесса в полосе частот  $(f_1, f_2)$ . Для иллюстрации этого важного свойства рассмотрим опять четыре типа случайных процессов, реализации которых изображены на рис. 3.8. Спектры данных процессов показаны на рис. 3.10. Полезно сравнить эти спектральные плотности с соответствующими ковариационными функциями (рис. 3.9).

Обратимся сначала к гармоническому процессу. Как следует из формул (3.31) и (3.61), его спектральная плотность имеет вид

$$G_{xx}(f) = 4 \int_0^{\infty} \frac{X^2}{2} \times \cos 2\pi f_0 \tau \cos 2\pi f \tau d\tau = \frac{X^2}{2} \times \delta(f - f_0), \quad (3.68)$$

где  $\delta(f - f_0)$  — дельта-функция, находящаяся в точке  $f = f_0$  (рис. 3.10, а). По определению дельта-функции из разд. 1.2.4

$$G_{xx}(f) = \begin{cases} \infty, & f = f_0; \\ 0, & f \neq f_0, \end{cases} \quad (3.69)$$

$$\int_{f_0-\varepsilon}^{f_0+\varepsilon} G_{xx}(f) df = \frac{X^2}{2},$$

где  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число. Таким образом, весь средний квадрат гармонического процесса, равный  $\psi_x^2 = X^2/2$ , сосредоточен на единственной частоте  $f = f_0$ . Такой процесс обычно подсказывает существование циклического физического явления. Конечно, идеальная спектральная плотность (3.68) никогда не реализуется, поскольку не существует таких явлений, которые бы описывались идеальной синусоидой на всем временном интервале. Тем не менее спектральная плотность (3.68) служит хорошим приближением многих циклических явлений, например вибрационных явлений во вращающихся

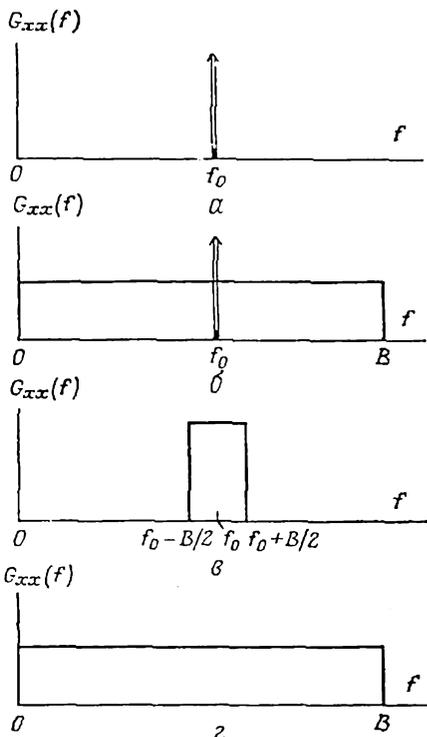


Рис. 3.10. Идеализированные спектральные плотности.

а — гармонический процесс; б — гармонический процесс в случайном шуме; в — узкополосный случайный шум; г — широкополосный случайный шум.

ся механизмах или акустического шума, порождаемого вентилятором.

Перейдем теперь к широкополосному шуму, спектральная плотность которого определена формулой (3.62), а график изображен на рис. 3.10, *г*. Общая интерпретация такого процесса очевидна. Средний квадрат процесса распределен равномерно по широкой полосе частот, что свидетельствует о полной случайности явления; примером может служить турбулентность. Случайный процесс, спектральная плотность которого равномерно распределена на полосе частот от 0 до  $B$ , называется *ограниченным по частоте белым шумом* (рис. 3.10, *г*). На практике обычно наблюдаются некоторые колебания спектральной плотности, но идеальный ограниченный по частоте белый шум является хорошим средством в теоретических исследованиях и приложениях и будет использоваться в последующих главах.

Средний квадрат узкополосного шума равномерно распределен в узкой полосе частот, а не сосредоточен на одной частоте, как в случае гармонического процесса. График спектральной плотности такого процесса изображен на рис. 3.10, *в*, а сама она определена формулами (3.64) и является, конечно, идеализацией, которая в некоторых случаях все же может быть использована на практике как приближение первого порядка. Более реалистичные узкополосные спектральные плотности, хорошо описывающие реакцию некоторых конструкций, будут построены в гл. 5.

Когда гармонический процесс смешивается с широкополосным шумом, то результирующий спектр равен сумме спектров слагаемых (рис. 3.10, *б*). Обычно это указывает на то, что циклическое явление наблюдается на случайном фоне. На практике часто бывает трудно отличить этот случай от узкополосного шума из-за конечной разрешающей способности анализа случайных процессов (см. разд. 3.4.2).

### 3.3.3. Взаимные ковариационные функции

Наиболее простую интерпретацию взаимных ковариационных функций можно получить при решении задач, связанных с анализом распространения сигнала. Пусть некоторый физический процесс  $x(t)$  распространяется по бездисперсному линейному тракту, смешивается со статистически независимым от него шумом  $n(t)$  и вызывает наблюдаемую реакцию  $y(t)$  (рис. 3.11). В этом простом случае частотная характеристика тракта равна константе ( $H(f) = H$ ) и если  $d$  — длина пути, а  $c$  — скорость распространения, то

$$y(t) = Hx(t - (d/c)) + n(t).$$

Из равенств (3.16) и (3.18) получаем

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \left[ Hx\left(t - \frac{d}{c} + \tau\right) + n(t + \tau) \right] dt = \\ = HR_{xx}\left(\tau - \frac{d}{c}\right). \quad (3.71)$$

Другими словами, в этом идеальном случае взаимная ковариационная функция равна ковариационной функции  $x(t)$ ,

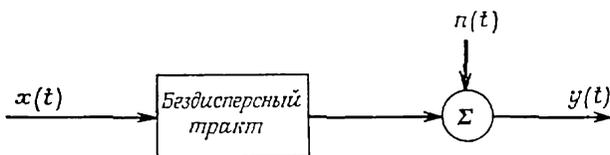


Рис. 3.11. Модель бездисперсного распространения.

умноженной на  $H$  и смещенной во времени так, что ее пик приходится на точку  $\tau_1 = d/c$ . Следовательно, если известна одна из величин — расстояние  $d$  или скорость  $c$ , то другая может быть определена по взаимной ковариационной функции. Более того, соотношение для линейно обусловленной мощности выходного сигнала (3.10) и определение нормированной корреляционной функции (3.24) позволяют определить полный вклад процесса  $x(t)$  в дисперсию  $y(t)$ :

$$\sigma_{y;x}^2 = \rho_{xy}^2(d/c) \sigma_y^2, \quad \text{где} \quad (3.72) \\ \rho_{xy}^2\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{[R_{xy}(d/c) - \mu_x \mu_y]^2}{[R_{xx}(0) - \mu_x^2][R_{yy}(0) - \mu_y^2]} = H^2 \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}.$$

Таким образом, взаимная ковариационная функция позволяет установить, какую долю энергии вносит  $x(t)$  в  $y(t)$ .

Приведенная выше интерпретация взаимной ковариационной функции сразу ведет к приложениям, включающим задачи локализации (определение  $d$  при данном  $c$ ) и измерения скорости (определение  $c$  при данном  $d$ ). Задачи такого типа рассмотрены в гл. 7. Особенно интересен для приложений случай, когда  $x(t)$  может проходить по нескольким трактам, но наблюдается лишь суммарная реакция  $y(t)$ . Предполагая, что процесс распространения сигнала широкополосный и бездисперсный (скорость не зависит от частоты), можно показать, что взаимная ковариационная функция имеет набор пиков, каждый из которых соответствует одному из трактов распространения процесса (рис. 3.12). Подробно приложения этого типа рассматриваются в гл. 6. Взаимные ковариационные функции могут быть

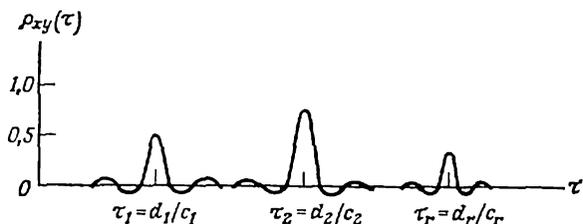
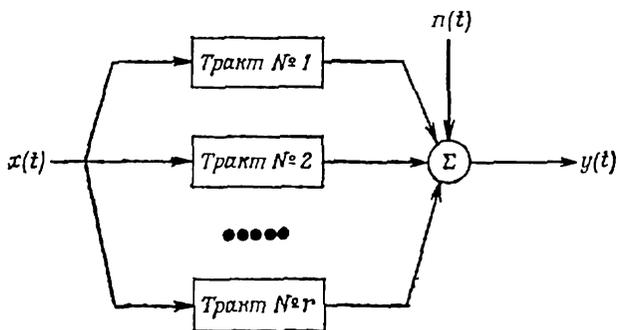


Рис. 3.12. Типичная взаимная ковариационная функция в случае бездисперсного распространения по нескольким трактам.

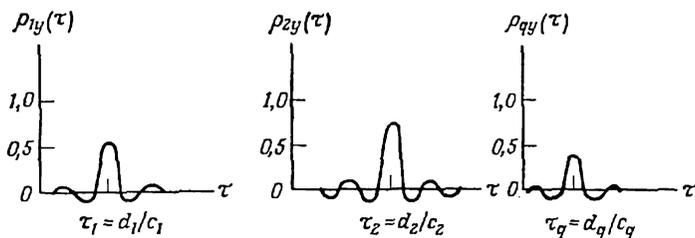
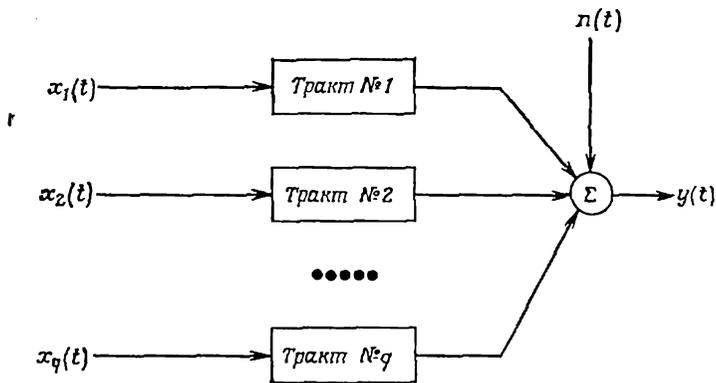


Рис. 3.13. Типичная взаимная ковариационная функция в случае бездисперсного распространения из нескольких источников.

также использованы для определения вклада каждого из нескольких независимых источников возбуждения в суммарный наблюдаемый эффект (рис. 3.13), но задачи такого рода обычно исследуются методами спектрального анализа.

### 3.3.4. Взаимные спектральные плотности

Взаимные ковариационные функции и взаимные спектральные плотности интерпретируются сходным образом, но последние дают желаемые результаты в виде функции от частоты, а не через точечные моменты. Этот факт очень сильно расширяет диапазон возможных интерпретаций и в последние годы привел к росту применений спектрального анализа к инженерным задачам в тех областях, где ранее использовались корреляционные методы.

Для иллюстрации общей интерпретации взаимных спектральных плотностей рассмотрим простую задачу распространения сигнала в бездисперсной среде (рис. 3.11). В гл. 4 будет показано, что взаимная спектральная плотность входного сигнала  $x(t)$  и выходного сигнала  $y(t)$  подобна взаимной ковариационной функции, заданной формулой (3.71), и имеет вид

$$G_{xy}(f) = H(f) G_{xx}(f) = H G_{xx}(f) e^{-i2\pi f d/c}. \quad (3.73)$$

Таким образом, время распространения  $\tau_1 = d/c$  входит во взаимную спектральную плотность как линейный фазовый сдвиг в соответствии с формулой (3.41):

$$\theta_{xy}(f) = 2\pi f \tau_1 = 2\pi f (d/c). \quad (3.74)$$

Важным преимуществом взаимного спектрального анализа по сравнению с корреляционным является то, что для получения значимых результатов не надо требовать, чтобы среда была бездисперсной. При фиксированном расстоянии  $d$  скорость распространения сигнала  $c$  вычисляется как функция  $f$  по формуле

$$c(f) = 2\pi f d / \theta_{xy}(f), \quad (3.75)$$

где  $\theta_{xy}(f)$  задается в радианах и не обязательно линейно зависит от частоты.

Корреляционный анализ имеет определенные преимущества по сравнению со спектральными методами при решении задач идентификации трактов типа иллюстрированной рис. 3.12 (см. гл. 6). Но при решении задач локализации источников типа иллюстрированной рис. 3.13 в настоящее время почти исключительно используются методы спектрального анализа. Спектральным аналогом соотношения для линейно обусловленной мощ-

ности выходного сигнала (3.71) служит соотношение для когерентного спектра выхода

$$G_{y,x}(f) = \gamma_{xy}^2(f) G_{yy}(f). \quad (3.76)$$

Использование функции когерентности вместо нормированной корреляционной функции позволяет оценить вклад входного сигнала  $x(t)$  в измеряемый сигнал  $y(t)$  как функцию от  $f$ , а не через точечные моменты. Приложения этого типа рассматриваются в гл. 9. Наконец, спектральные плотности дают удобные средства для прямого оценивания свойств физических систем по наблюдениям над величинами на входе и выходе, которые легко распространяются на многомерные системы. Эти вопросы исследуются в гл. 4 и 5, а более сложные применения — в гл. 8 и 10.

### 3.4. Способы оценивания и ошибки

Способы оценивания ковариационных функций и спектральных плотностей при помощи аналоговых устройств и цифровых ЭВМ детально описаны в [3.1]. Здесь же оценивание рассматривается с точки зрения возможных ошибок. Все оценки приводятся в виде выражений, содержащих интегралы, которые легко заменить суммами и тем самым преобразовать к виду, удобному для вычисления на ЦВМ. Нужно только обратить внимание на следующие замечания, связанные с особенностями выборки из случайных процессов, о которых говорилось в разд. 1.2.3. Во-первых, непрерывная реализация длины  $T$  превращается в последовательность  $N$  равноотстоящих выборочных значений без существенной потери информации, если

$$N \geq 2BT, \quad (3.77)$$

где  $B$  — ширина частотного спектра процесса ( $B$  измеряется в герцах, если  $T$  выражается в секундах). Если разрешение по времени равно  $\Delta t$ , то

$$T = N\Delta t. \quad (3.78)$$

Далее, самая высокая частота, которая может присутствовать в данных, так называемая частота Найквиста, равна

$$f_c = 1/2\Delta t, \quad (3.79)$$

где  $f_c$  выражается в герцах, если  $\Delta t$  измеряется в секундах. Во избежание серьезных ошибок, связанных с маскировкой частот, перед преобразованием данных в удобную для вычислений форму нужно убедиться в том, что на частоты выше  $f_c$  не приходится существенная часть переносимой случайным процессом

энергии. Наконец, максимальное разрешение по частоте, которое позволяет получить выборка, определяется по формуле

$$\Delta f = B_e = 1/T = 1/N\Delta t, \quad (3.80)$$

где  $\Delta f$  выражается в герцах, если единицей измерения  $T$  и  $\Delta t$  служит секунда.

### 3.4.1. Оценивание функции ковариации

Уравнение (3.18) дает несмещенную оценку ковариационной функции стационарного эргодического случайного процесса  $\{x(t)\}$  по одной выборочной функции  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , а именно

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (3.81)$$

Аналогично из уравнения (3.16) получаем несмещенную оценку взаимной ковариационной функции двух стационарных эргодических процессов  $\{x(t)\}$  и  $\{y(t)\}$  по двум реализациям  $x(t)$  и  $y(t)$ , измеренным на одном и том же временном интервале  $0 \leq t \leq T$ :

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t)y(t+\tau) dt. \quad (3.82)$$

Хотя выражения (3.81) и (3.82) и дают прямой метод оценивания ковариационных функций, современные устройства цифровой обработки сигналов позволяют более эффективно оценивать ковариационные функции путем вычисления финитного обратного преобразования Фурье оценок спектральной плотности, и поэтому этот способ в настоящее время более распространен. Используя соотношения (3.32) и (3.40), получаем

$$\hat{R}_{xx}^c(\tau) = \int_0^{f_c} \hat{G}_{xx}(f) \cos 2\pi f\tau df, \quad (3.83)$$

$$\hat{R}_{xy}^c(\tau) = \int_0^{f_c} [\hat{C}_{xy}(f) \cos 2\pi f\tau + \hat{Q}_{xy}(f) \sin 2\pi f\tau] df, \quad (3.84)$$

где  $\hat{G}_{xx}(f)$ ,  $\hat{C}_{xy}(f)$  и  $\hat{Q}_{xy}(f)$  — «несглаженные» оценки спектральной, коспектральной и квадратурной плотностей соответственно. Эти оценки будут проанализированы в следующем разделе.

Оценки ковариации  $\hat{R}^c(\tau)$ , определенные выражениями (3.83) и (3.84), смещены из-за влияния так называемого цик-

лического эффекта в ходе вычислений, что отмечено индексом  $c$ . Финитное обратное преобразование Фурье на самом деле представляет собой обращение ряда Фурье, в силу чего вместо желаемой оценки  $\hat{R}(\tau)$  из формул (3.81) и (3.82) появляется циклическая оценка ковариационной функции  $\hat{R}^c(\tau)$ , равная

$$\hat{R}^c(\tau) = \frac{T-\tau}{T} \hat{R}(\tau) + \frac{\tau}{T} \hat{R}(T-\tau). \quad (3.85)$$

Рис. 3.14 иллюстрирует это явление.

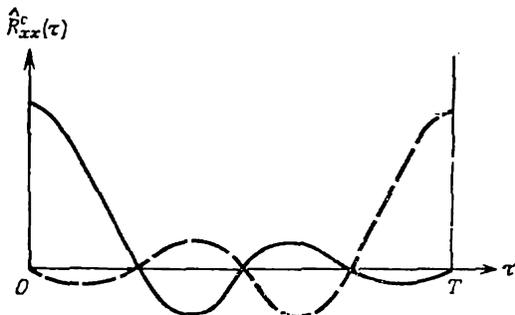


Рис. 3.14. Циклическая ковариационная функция.

Обычный способ устранения циклического эффекта при оценивании ковариации (а также взаимной ковариации) состоит в продолжении реализации  $x(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ , нулем (или же величиной  $\hat{\mu}_x$ , если последняя отлична от нуля) на дополнительный отрезок длины  $T$ . Другими словами, если среднее равно нулю, то новая реализация  $w(t)$  длины  $2T$  строится следующим образом:

$$w(t) = \begin{cases} x(t), & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & T < t \leq 2T. \end{cases} \quad (3.86)$$

Ковариационная функция, вычисленная как обратное преобразование Фурье спектра такой продолженной реализации, имеет вид

$$\hat{R}^s(\tau) = \begin{cases} \frac{T-\tau}{T} \hat{R}(\tau), & 0 \leq \tau \leq T; \\ \frac{\tau-T}{T} \hat{R}(2T-\tau), & T < \tau \leq 2T. \end{cases} \quad (3.87)$$

Следовательно, требуемая ковариационная функция и ее зеркальное отражение (рис. 3.14) окажутся разделенными, как показано на рис. 3.15. Отбрасывая значения оценки при  $\tau > T$ , получим оценку ковариации на интервале  $0 \leq \tau \leq T$  с устраненным

циклическим эффектом. Однако необходима еще одна коррекция для того, чтобы избавиться от смещения, вызванного наличием линейного коэффициента перед  $\hat{R}(\tau)$  в выражении (3.87).

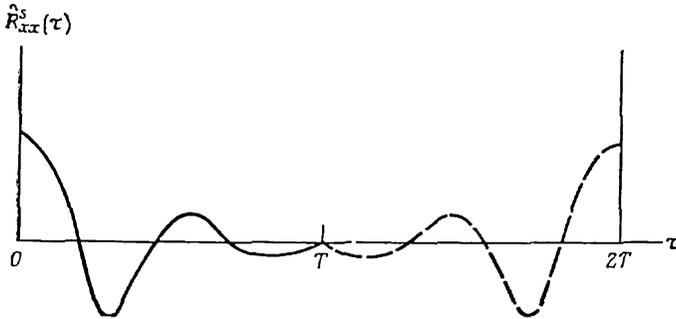


Рис. 3.15. Циклическая ковариационная функция для продолженной нулем реализации.

Итак, несмещенная оценка  $\hat{R}(\tau)$  на интервале  $0 \leq \tau \leq T$  имеет вид

$$\hat{R}(\tau) = \frac{T}{T-\tau} \hat{R}^s(\tau). \quad (3.88)$$

Оценка  $\hat{R}(\tau)$  из формулы (3.88) статистически эквивалентна оценкам ковариации (3.81) и (3.82), полученным прямым путем.

### 3.4.2. Оценивание спектральных плотностей

Спектральные плотности можно оценивать, применяя финитное преобразование Фурье либо к ковариационным функциям на основе формул (3.29) и (3.30), либо непосредственно к реализациям случайного процесса с использованием формул (3.46) и (3.47). С момента появления в 1965 г. алгоритмов быстрого преобразования Фурье [3.2] последний подход стал преобладающим. При таком подходе на практике операцию нахождения математического ожидания в уравнениях (3.46) и (3.47) нужно выполнять путем оценивания спектральных величин для каждого набора реализаций, а затем полученные результаты усреднять по всем наборам. В случае стационарного эргодического случайного процесса требуемые наборы реализаций можно получить из одной реализации путем разбиения ее на части нужной длины (рис. 3.16). Если имеется набор из  $n_d$  таких реализаций  $x_k(t)$ ,  $(k-1)T \leq t \leq kT$ ,  $k=1, 2, \dots, n_d$ , стационарного эргодического случайного процесса  $\{x(t)\}$ , то оценка спектраль-

ной плотности с учетом формулы (3.47) имеет вид

$$\hat{G}_{xx}(f) = \frac{2}{n_d T} \sum_{k=1}^{n_d} |X_k(f, T)|^2. \quad (3.89)$$

Общая длина анализируемой реализации равна  $T_{\text{общ}} = n_d T$ . Аналогично для пары наборов реализаций  $x_k(t)$  и  $y_k(t)$ ,  $(k-1)T \leq t \leq kT$ ,  $k=1, 2, \dots, n_d$ , двух стационарных эргодических

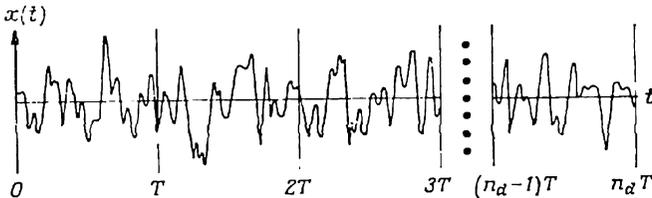


Рис. 3.16. Разбienie процесса на  $n_d$  реализаций длиной  $T$  каждая.

случайных процессов  $\{x(t)\}$  и  $\{y(t)\}$  на основе уравнения (3.46) получаем следующую оценку взаимной спектральной плотности:

$$\hat{G}_{xy}(f) = \frac{2}{n_d T} \sum_{k=1}^{n_d} X_k^*(f, T) Y_k(f, T), \quad (3.90)$$

где  $X_k(f, T)$  и  $Y_k(f, T)$  в оценках (3.89) и (3.90) — финитные преобразования Фурье  $x_k(t)$  и  $y_k(t)$ , ранее определенные уравнениями (3.44) и (1.27).

Как следует из формулы (3.43), функция когерентности оценивается путем деления  $|\hat{G}_{xy}(f)|^2$  на произведение  $\hat{G}_{xx}(f)$  и  $\hat{G}_{yy}(f)$ :

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = \frac{|\hat{G}_{xy}(f)|^2}{\hat{G}_{xx}(f) \hat{G}_{yy}(f)}. \quad (3.91)$$

Если  $n_d=1$ , то получается бессмысленный результат:  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = 1$  для всех  $f$ . Заметим, что оценки (3.89)–(3.91) определены для дискретных значений частоты, отстоящих друг от друга на

$$B_e = 1/T, \quad (3.92)$$

где  $B_e$  характеризует максимальное разрешение по частоте. Следует подчеркнуть, что максимальное разрешение по частоте определяется длиной реализации  $T$ , а не общей длиной анализируемых данных  $T_{\text{общ}} = n_d T$ .

Финитное преобразование Фурье, заданное выражением (3.44), можно рассматривать как преобразование Фурье неограниченной реализации  $v(t)$ , умноженной на «прямоугольное» временное окно  $u(t)$ , т. е.

$$u(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.93)$$

Другими словами, реализацию  $x(t)$  можно считать произведением

$$x(t) = u(t)v(t). \quad (3.94)$$

Следовательно, преобразование Фурье  $x(t)$  есть свертка преобразований Фурье  $u(t)$  и  $v(t)$ :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\alpha)V(f-\alpha)d\alpha. \quad (3.95)$$

Для «прямоугольной» функции вида (3.93) в табл. 1.1 находим ее преобразование Фурье:

$$U(f) = T \left( \frac{\sin \pi f T}{\pi f T} \right) e^{-i\pi f T}. \quad (3.96)$$

Графики  $u(t)$  и  $|U(f)|$  приведены на рис. 3.17. Вид спектрального окна  $|U(f)|$  имеет решающее значение для анализа. Боль-

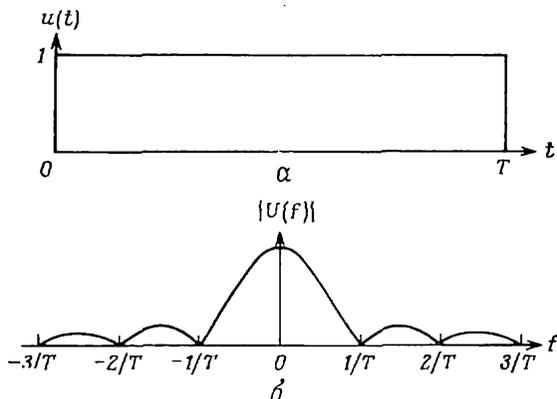


Рис. 3.17. Прямоугольное окно.  
 а — временное; б — спектральное.

шие боковые лепестки  $|U(f)|$  приводят к утечке мощности на частотах, далеких от главного лепестка спектрального окна, и могут вызвать значительные искажения оцениваемых спектров, особенно в случае гармонических или узкополосных процессов,

Для того чтобы избежать этого, на практике используют временные окна, которые сглаживают данные так, чтобы обеспечить постепенные вход и выход анализируемой реализации. Известно большое число таких окон, но одним из наиболее ранних и распространенных является окно Ханна, представляющее собой одну волну косинусоиды, а именно

$$u_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} \right), & 0 \leq t \leq T; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (3.97)$$

Преобразование Фурье функции (3.97) равно

$$U_h(f) = \frac{1}{2}U(f) - \frac{1}{4}U(f-f_1) - \frac{1}{4}U(f+f_1), \quad (3.98)$$

где  $f_1 = 1/T$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} U(f-f_1) &= -T \left[ \frac{\sin \pi (f-f_1)T}{\pi (f-f_1)T} \right] e^{-i\pi fT}, \\ U(f+f_1) &= -T \left[ \frac{\sin \pi (f+f_1)T}{\pi (f+f_1)T} \right] e^{-i\pi fT}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Графики  $u_h(t)$  и  $|U_h(f)|$  приведены на рис. 3.18.

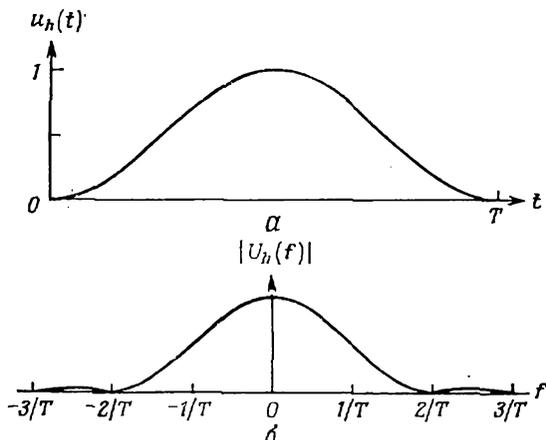


Рис. 3.18. Окна Ханна.  
 $a$  — временное;  $b$  — спектральное.

Рассмотрим теперь произвольную функцию  $v(t)$ , такую, что  $T$  не является ее периодом, и пусть

$$x(t) = u_h(t) v(t). \quad (3.100)$$

Найдем преобразование Фурье функции (3.100):

$$X(f) = \int_0^T x(t) e^{-j2\pi ft} dt. \quad (3.101)$$

Для дискретных значений частоты  $f_k = k/T$  получаем при  $k = 0, 1, 2, \dots, N/2$

$$X(f_k) = \frac{1}{2}V(f_k) - \frac{1}{4}V(f_{k-1}) - \frac{1}{4}V(f_{k+1}), \quad (3.102)$$

где

$$V(f_k) = \int_0^T v(t) e^{-j2\pi kt/T} dt. \quad (3.103)$$

Предположим, что  $v(t)$  ведет себя подобно ограниченному по частоте белому шуму с шириной полосы  $\Delta f = 1/T$ . Тогда математическое ожидание произведения  $V^*(f)$  и  $V(g)$ , вычисленное для любых частот вида  $k\Delta f = k/T$ , равно

$$E[V^*(f)V(g)] = \begin{cases} 0 & \text{при } f \neq g; \\ 1 & \text{при } f = g. \end{cases} \quad (3.104)$$

С учетом этого из уравнения (3.102) получаем

$$E[|X(f_k)|^2] = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{8} \quad (3.105)$$

при любых  $f_k = k/T$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, N/2$ . Эта величина характеризует потери, вызванные использованием окна Ханна (3.97) для оценки спектральной плотности при помощи финитного преобразования Фурье. Поэтому при оценивании спектральных плотностей по формулам (3.89) и (3.90) выражение (3.102) нужно умножить на масштабный множитель  $\sqrt{8/3}$ . Кроме того, заметим, что

$$\int_0^T u_h^2(t) dt \int_0^T u^2(t) dt = \frac{3}{8} \quad (3.106)$$

для  $u(t)$  и  $u_h(t)$ , определенных формулами (3.93) и (3.97).

В заключение этого краткого обзора способов спектрального анализа отметим, что существует большое число других операций и процедур, которые используются на практике для улучшения качества оценок спектральных плотностей и когерентности. В их число входят так называемое наплывающее преобразование Фурье<sup>1)</sup>, позволяющее проводить спектральный ана-

<sup>1)</sup> Этот метод называется также методом комплексной демодуляции; см. Гренджер К., Хатанака М. Спектральный анализ временных рядов в экономике. — М.: Статистика, 1972. — *Прим. перев.*

лиз на высоких частотах с очень высоким разрешением, и оценивание путем усреднения перекрывающихся реализаций, частично улучшающее статистическую точность, которая уменьшается из-за утечки энергии через боковые лепестки при использовании спектральных окон. Детали содержатся в работах [[3.3—3.5].

### 3.4.3. Ошибки оценивания

Систематические и случайные ошибки, характерные для оценок ковариационных функций и спектральных плотностей, исследованы в работах [3.1, 3.6, 3.7]. В табл. 3.2 дана их сводка. Статистические ошибки для более сложных функций анализируются в гл. 11. Выражения для более сложных функций оценивания ковариационных функций, приведенные в табл. 3.2, могут служить лишь ориентиром, поскольку они получены в предположении, что спектр постоянен по всей полосе шириной  $B$ . Величина смещения для оценки взаимного спектра является оценкой сверху. Если обе реализации имеют спектральный пик на одной и той же частоте, то нужно брать наименьшее  $B_r$ . Нако-

Таблица 3.2

Ошибки оценивания ковариационных функций и спектральных плотностей

Оцениваемая функция	Способ оценивания	Смещение $\epsilon_b$	Среднеквадратичная случайная ошибка $\epsilon_r$
Взаимная ковариация или ковариация, $\hat{R}_{xy}(\tau)$ или $\hat{R}_{xx}(\tau)$	Формулы (3.81) и (3.82)	0	$\left[ \frac{1 + \hat{\rho}^2_{xy}(\tau)}{2BT_{\text{общ}}} \right]^{1/2}$
	Формулы (3.83)—(3.88)	0	$\left[ \frac{1 + \hat{\rho}^2_{xy}(\tau)}{Nn_d} \right]^{1/2}$
Спектр $\hat{G}_{xx}(f)$	Формула (3.89)	$-\frac{1}{3} \left( \frac{B_\epsilon}{B_r} \right)^2$	$\frac{1}{\sqrt{Nn_d}}$
Взаимный спектр $ \hat{G}_{xy}(f) $	Формула (3.90)	$-\frac{1}{3} \left( \frac{B_\epsilon}{B_r} \right)^2$	$\frac{1}{ \hat{\gamma}_{xy}(f)  \sqrt{Nn_d}}$
Функция когерентности $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$	Формула (3.91)	Не определено	$\frac{\sqrt{2} [1 - \hat{\gamma}^2_{xy}(f)]}{ \hat{\gamma}_{xy}(f)  \sqrt{Nn_d}}$

$B$  — спектральная ширина случайного процесса (в предположении, что он является ограниченным по частоте белым шумом);

$B_\epsilon$  — разрешение по частоте, определенное формулой (3.92);

$B_r$  — ширина полосы пропускания по уровню половинной энергии, определена формулой (1.58);

$n_d$  — число усреднений (см. рис. 3.16);

$N$  — число выборочных значений в одной реализации.

нец, величина смещения оценки функции когерентности, вызванного недостаточным разрешением по частоте, в некоторых случаях имеет очень сложный вид и может быть чрезвычайно большой (см. разд. 5.2.3). В работе [3.3] показано, что при оценивании функции когерентности появляется смещение из-за ограниченности выборки, но эта ошибка пренебрежимо мала по сравнению со случайными ошибками.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 3.1. Bendat J. S., Piersol A. G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]
- 3.2. Cooley J. W., Tukey J. W. An Algorithm for Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Mathematics of Computation*, **19**, No. 90, 297 (April 1965).
- 3.3. Carter J. C., Knapp C. H., Nuttall A. H. Estimation of the Magnitude-Squared Coherence via Overlapped Fast Fourier Transform Processing, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, **AU-21**, No. 4, 337 (August 1973).
- 3.4. Enochson L. D. Digital Techniques in Data Analysis, *Noise Control Engineering*, **9**, No. 2, 138 (November — December 1977).
- 3.5. Otnes R. K., Enochson L. D. *Applied Time Series Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1978. [Имеется перевод: Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов: Основные методы. — М.: Мир, 1982.]
- 3.6. Bendat J. S. *Principles and Applications of Random Noise Theory*, Wiley, New York, 1958. Reprinted by Krieger Publishing Co., New York, 1977. [Имеется перевод: Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. М.: Советское радио, 1965.]
- 3.7. Bendat J. S. Statistical Errors in Measurement of Coherence Functions and Input/Output Quantities, *Journal of Sound and Vibration*, **59**, No. 3, 405 (1978).

## СИСТЕМЫ С ОДНИМ ВХОДОМ И ОДНИМ ВЫХОДОМ

Исследование входных и выходных процессов систем — главная область применений спектрального и корреляционного анализа к инженерным задачам. В этой главе выведены основные соотношения для систем с одним входом и одним выходом. Предполагается, что на вход системы поступают реализации стационарного эргодического или переходного случайных процессов с нулевым средним, а система линейная и имеет постоянные параметры (см. гл. 1). Аналогичные соотношения для систем со многими входами и выходами выводятся в гл. 7, 8 и 10.

## 4.1. Анализ идеальных систем

Пусть линейная система с постоянными параметрами задается весовой функцией  $h(\tau)$  и частотной характеристикой  $H(f)$ , которые были определены и исследованы в разд. 1.3. Пред-

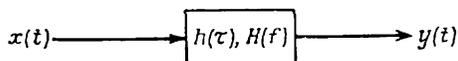


Рис. 4.1. Идеальная система с одним входом и одним выходом.

положим, что воздействие на систему одного входного сигнала  $x(t)$  вызывает один вполне определенный выходной сигнал  $y(t)$  (рис. 4.1). При идеальных условиях, сформулированных в разд. 1.3.1, выходной процесс системы, изображенной на рис. 4.1, задается сверткой

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau, \quad (4.1)$$

где  $h(\tau) = 0$  при  $\tau < 0$ , если система физически осуществима.

## 4.1.1. Стационарный входной процесс

Допустим, что на вход системы (рис. 4.1) поступает реализация  $x(t)$  стационарного эргодического случайного процесса  $\{x(t)\}$ , определенного в разд. 1.1. После затухания переходных

процессов, вызванных включением системы, реакция  $y(t)$  также будет реализацией стационарного процесса  $\{y(t)\}$ . Используя формулу (4.1), найдем произведение  $y(t)y(t+\tau)$ :

$$y(t)y(t+\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi)h(\eta)x(t-\xi)x(t+\tau-\eta)d\xi d\eta. \quad (4.2)$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей равенства (4.2), получим с учетом формулы (3.15) соотношение, устанавливающее *связь между ковариационными функциями выходного и входного процессов*:

$$R_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\xi)h(\eta)R_{xx}(\tau+\xi-\eta)d\xi d\eta. \quad (4.3)$$

Аналогично определяется и произведение  $x(t)y(t+\tau)$ :

$$x(t)y(t+\tau) = \int_0^{\infty} h(\xi)x(t)x(t+\tau-\xi)d\xi. \quad (4.4)$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей этого равенства, получим *взаимную ковариационную функцию входного и выходного процессов*:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} h(\xi)R_{xx}(\tau-\xi)d\xi. \quad (4.5)$$

Заметим, что свертка в формуле (4.5) имеет тот же вид, что и в (4.1).

Применение преобразования Фурье к соотношениям (4.3) и (4.5) после ряда алгебраических преобразований с учетом результатов разд. 3.2.1 позволяет показать, что двусторонние спектральные плотности  $S_{xx}(f)$ ,  $S_{yy}(f)$  и  $S_{xy}(f)$  удовлетворяют следующим важным соотношениям:

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f), \quad (4.6)$$

$$S_{xy}(f) = H(f) S_{xx}(f). \quad (4.7)$$

Здесь  $f$  положительна или отрицательна. Заметим, что выражение (4.6) действительное и содержит только амплитудную характеристику системы  $|H(f)|$ . В то же время выражение (4.7) комплексное и может быть разбито на две формулы, содержащие соответственно амплитудную  $|H(f)|$  и фазовую  $\varphi(f)$  характеристики системы. Формула (4.6) называется *соотношением между спектрами входного и выходного процессов*, а формула (4.7) — *соотношением для взаимного спектра входного и вы-*

ходного процессов. Эти формулы применимы только в идеальном случае — при отсутствии внешнего шума на входе или на выходе, когда характеристики системы линейны и не меняются во времени. Интерпретировать эти спектральные соотношения в частотной области значительно легче, чем соответствующие корреляционные соотношения во временной области [4.1].

Соотношения (4.6) и (4.7) можно записать через физически измеримые односторонние спектральные плотности, определенные в разд. 3.2.1:

$$G_{yy}(f) = |H(f)|^2 G_{xx}(f), \quad (4.8)$$

$$G_{xy}(f) = H(f) G_{xx}(f). \quad (4.9)$$

При использовании полярного представления комплексных чисел

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| e^{-i\theta_{xy}(f)}, \quad (4.10)$$

$$H(f) = |H(f)| e^{-i\varphi(f)}$$

уравнение (4.9) принимает вид

$$|G_{xy}(f)| = |H(f)| G_{xx}(f), \quad (4.11)$$

$$\theta_{xy}(f) = \varphi(f).$$

Формула (4.8) дает возможность вычислить средний квадрат выходного процесса:

$$\psi_y^2 = \int_0^{\infty} G_{yy}(f) df = \int_0^{\infty} |H(f)|^2 G_{xx}(f) df. \quad (4.12)$$

Формула (4.8), кроме того, позволяет определить  $G_{xx}(f)$  по известным  $G_{yy}(f)$  и  $|H(f)|$  или же  $|H(f)|$  по известным  $G_{xx}(f)$  и  $G_{yy}(f)$ , но из формулы (4.8) нельзя найти полностью частотную характеристику  $H(f)$  системы, так как она не содержит информации о фазе. Полностью восстановить амплитудную и фазовую характеристику системы можно из формул (4.9)—(4.11), когда известны  $G_{xy}(f)$ , и  $G_{xx}(f)$ . Подробнее это изложено в гл. 5.

Формулы (4.8) и (4.9) можно вывести и без предварительного нахождения ковариационных соотношений (4.3) и (4.5). Для любой пары усеченных реализаций достаточно большой длины  $T$  соотношение (4.1) эквивалентно следующему равенству:

$$Y(f, T) = H(f) X(f, T), \quad (4.13)$$

где  $X(f, T)$  и  $Y(f, T)$  — финитные преобразования Фурье  $x(t)$  и  $y(t)$  соответственно, которые ранее были определены формулой (3.44). Тогда

$$\begin{aligned} Y^*(f, T) &= H^*(f) X^*(f, T), \\ |Y(f, T)|^2 &= |H(f)|^2 |X(f, T)|^2, \\ X^*(f, T) Y(f, T) &= H(f) |X(f, T)|^2. \end{aligned}$$

Если теперь последние два равенства усреднить по ансамблю реализаций, умножить на  $2/T$  и устремить  $T$  к бесконечности, то из соотношений (3.46) и (3.47) получим формулы (4.8) и (4.9):

$$\begin{aligned} G_{yy}(f) &= |H(f)|^2 G_{xx}(f), \\ G_{xy}(f) &= H(f) G_{xx}(f). \end{aligned}$$

#### 4.1.2. Переходные входные процессы

При анализе реализаций переходных случайных процессов длиной  $T$  вместо спектральных плотностей «мощности»  $G_{xx}(f)$ ,  $G_{yy}(f)$  и  $G_{xy}(f)$  удобнее пользоваться «энергетическими» спектрами  $\mathcal{G}_{xx}(f)$ ,  $\mathcal{G}_{yy}(f)$  и  $\mathcal{G}_{xy}(f)$ . Они связаны формулой  $\mathcal{G}_{xy}(f) = T G_{xy}(f)$ , где предполагается, что реализации переходных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  существуют только на интервале  $0 \leq t \leq T$ . Вместо формул (4.8) и (4.9) имеем

$$\mathcal{G}_{yy}(f) = |H(f)|^2 \mathcal{G}_{xx}(f), \quad (4.14a)$$

$$\mathcal{G}_{xy}(f) = H(f) \mathcal{G}_{xx}(f),$$

где  $f$  неотрицательна. Если положить  $\mathcal{S}_{xy}(f) = 1/2 \mathcal{G}_{xy}(f)$  для  $f \geq 0$  и  $\mathcal{S}_{xy}(-f) = \mathcal{S}_{xy}^*(f)$ , то получим двусторонние плотности. В частности, при  $x(t) = y(t)$  имеем  $\mathcal{S}_{xx}(f) = 1/2 \mathcal{G}_{xx}(f)$  для  $f \geq 0$  и  $\mathcal{S}_{xx}(-f) = \mathcal{S}_{xx}(f)$ . Поэтому

$$\mathcal{S}_{yy}(f) = |H(f)|^2 \mathcal{S}_{xx}(f), \quad (4.14b)$$

$$\mathcal{S}_{xy}(f) = H(f) \mathcal{S}_{xx}(f).$$

Заметим, что эти формулы как для двусторонних спектров, так и для односторонних отличаются от соответствующих формул для стационарных процессов только масштабным коэффициентом.

#### 4.1.3. Влияние ненулевого среднего значения

Предположим теперь, что среднее значение  $\mu_x$  входного стационарного случайного процесса  $\{x(t)\}$  отлично от нуля. Тогда по формуле (4.1) среднее значение  $\mu_y$  выходного процесса

$\{y(t)\}$  также отлично от нуля и равно

$$\mu_y = \int_0^{\infty} h(\tau) \mu_x d\tau = H(0) \mu_x, \quad (4.15)$$

где  $H(0)$  — предел  $H(f)$  при стремлении  $f$  к нулю справа. Если  $\mu_x$  и  $\mu_y$  оцениваются по усеченным реализациям длины  $T$ , то их финитные преобразования Фурье (Ф.Т.) можно представить в виде

$$\text{Ф.Т. } [\mu_x] = \mu_x \delta_1(f), \quad \text{Ф.Т. } [\mu_y] = \mu_y \delta_1(f), \quad (4.16)$$

где  $\delta_1(f)$  — финитная дельта-функция, определяемая следующим образом:

$$\delta_1(f) = \begin{cases} T, & -1/2T \leq f \leq 1/2T; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.17)$$

Соответствующие двусторонние спектры тогда имеют вид

$$S_{xx}(f) = (1/T) E [ |\mu_x \delta_1(f)|^2 ] = \mu_x^2 \delta_1(f), \quad (4.18)$$

$$S_{yy}(f) = (1/T) E [ |\mu_y \delta_1(f)|^2 ] = \mu_y^2 \delta_1(f),$$

где  $\delta_1(f)$  удовлетворяет формулам (4.17). Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df = \int_{-1/2T}^{1/2T} \mu_x^2 \delta_1(f) df = \mu_x^2, \quad (4.19)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(f) df = \int_{-1/2T}^{1/2T} \mu_y^2 \delta_1(f) df = \mu_y^2.$$

Определим односторонние спектры следующим образом:

$$G_{xx}(f) = 2\mu_x^2 \delta_1(f), \quad f \geq 0, \quad (4.20)$$

$$G_{yy}(f) = 2\mu_y^2 \delta_1(f), \quad f \geq 0,$$

причем интеграл от  $G_{xx}(f)$  равняется  $\mu_x^2$ , т. е.

$$\int_0^{\infty} G_{xx}(f) df = \int_0^{1/2T} 2\mu_x^2 \delta_1(f) df = \mu_x^2, \quad (4.21)$$

$$\int_0^{\infty} G_{yy}(f) df = \int_0^{1/2T} 2\mu_y^2 \delta_1(f) df = \mu_y^2.$$

Произвольную входную реализацию  $x(t)$  длиной  $T$  представим в виде суммы двух членов.  $[x(t) - \mu_x]$  и  $\mu_x$ . Тогда вместо формулы (4.13) получим соотношение

$$Y(f, T) + \mu_y \delta_1(f) = H(f) X(f, T) + H(0) \mu_x \delta_1(f), \quad (4.22)$$

где  $X(f, T)$  и  $Y(f, T)$  — финитные преобразования Фурье  $[x(t) - \mu_x]$  и  $[y(t) - \mu_y]$  соответственно, а  $\delta_1(f)$  удовлетворяет формулам (4.17). Поступая, как и раньше, вместо соотношений (4.8) и (4.9) получим

$$G_{yy}(f) + 2\mu_y^2 \delta_1(f) = |H(f)|^2 G_{xx}(f) + 2H^2(0) \mu_x^2 \delta_1(f), \quad (4.23)$$

$$G_{xy}(f) = H(f) G_{xx}(f).$$

Заметим, что формула для взаимной спектральной плотности не изменилась по сравнению с формулой (4.9), а соотношение для спектральных плотностей не совпадает с уравнением (4.8) только в точках, где  $\delta_1(f) \neq 0$ . В частности, если  $f$  принимает дискретные равноотстоящие значения с шагом  $B_e = 1/T$ , то  $\delta_1(f) = 0$  во всех точках, кроме  $f = 0$ , где  $\delta_1(0) = T$ .

С учетом ненулевого среднего соотношение (4.12) для общего среднего квадрата выходного процесса преобразуется к виду

$$\Psi_{xy}^2 = \int_0^{\infty} |H(f)|^2 G_{xx}(f) df + \mu_y^2, \quad (4.24)$$

где  $\mu_y^2 = H^2(0) \mu_x^2$ . Эти результаты показывают, что влияние ненулевого среднего легко учесть путем простого добавления подходящих членов. В случае необходимости случайный процесс можно преобразовать к процессу с ненулевым средним. Будем считать в дальнейшем, что это сделано.

#### 4.1.4. Обычная функция когерентности

Обычная функция когерентности между  $x(t)$  и  $y(t)$  — это действительная величина, которая уже была определена формулой (3.43):

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f) G_{yy}(f)} = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f) S_{yy}(f)}, \quad (4.25)$$

где буквой  $G$  обозначены односторонние спектры, а буквой  $S$  — соответствующие двусторонние спектры. В разд. 3.2.2 доказано, что

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1. \quad (4.26)$$

Перед вычислением  $\gamma_{xy}^2(f)$  нужно вычесть из процесса ненулевое среднее, чтобы избежать скачкообразного поведения функции когерентности в начале отсчета. Разумеется, нужно также позаботиться и о том, чтобы  $G_{xx}(f)$  и  $G_{yy}(f)$  были больше нуля, и тем самым избежать деления на нуль или появления неопределенности типа нуль на нуль, когда  $G_{xy}(f)$  также близка к нулю.

В идеальном случае, описываемом соотношениями (4.6) — (4.9), для всех  $f$  справедливо равенство

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|H(f)G_{xx}(f)|^2}{G_{xx}(f)|H(f)|^2G_{xx}(f)} = 1. \quad (4.27)$$

С другой стороны, если  $x(t)$  и  $y(t)$  совершенно не коррелированы, т. е.  $G_{xy}(f) = 0$  для всех  $f$ , то функция когерентности  $\gamma_{xy}^2(f) = 0$  для всех  $f$ .

Когда же функция когерентности отлична от нуля, но меньше единицы, то практически может иметь место одна или несколько из следующих возможностей:

- 1) в измерениях присутствует внешний шум;
- 2) оценки спектров смещены из-за недостаточного разрешения по частоте;
- 3) система, преобразующая  $x(t)$  в  $y(t)$ , нелинейна;
- 4) на выходной процесс  $y(t)$  влияют и другие входные процессы кроме  $x(t)$ .

Когда внешний шум  $n(t)$  имеется только на выходе, то общий наблюдаемый выходной спектр  $G_{yy}(f)$  состоит из суммы идеального линейного выхода  $G_{vv}(f)$ , порожденного преобразованием  $x(t)$  посредством  $H(f)$ , и шума на выходе  $G_{nn}(f)$ , т. е.

$$G_{yy}(f) = G_{vv}(f) + G_{nn}(f), \quad (4.28)$$

где

$$G_{vv}(f) = |H(f)|^2 G_{xx}(f). \quad (4.29)$$

Следовательно,

$$G_{vv}(f) = |G_{xy}(f)/G_{xx}(f)|^2 G_{xx}(f) = \gamma_{xy}^2(f) G_{yy}(f). \quad (4.30)$$

Поэтому

$$\gamma_{xy}^2(f) = G_{vv}(f)/G_{yy}(f). \quad (4.31)$$

Произведение  $\gamma_{xy}^2(f)$  на  $G_{yy}(f)$  в формуле (4.30) называется когерентным спектром (мощности) выходного процесса. Уравнение (4.31) позволяет истолковать функцию когерентности как долю выходного спектра  $y(t)$ , обусловленную линейным преобразованием  $x(t)$  на частоте  $f$ . Выходной спектр шума  $G_{nn}(f) = G_{yy}(f) - G_{vv}(f)$  тогда равен

$$G_{nn}(f) = [1 - \gamma_{xy}^2(f)] G_{yy}(f) \quad (4.32)$$

и может быть интерпретирован как часть выходного спектра, не связанная с линейными операциями над  $x(t)$  на частоте  $f$ .

Подстановка выражения (4.28) в формулу (4.31) дает

$$\gamma_{xy}^2(f) = [G_{yy}(f) - G_{nn}(f)] / G_{yy}(f) = 1 - G_{nn}(f) / G_{yy}(f). \quad (4.33)$$

Таким образом, функция когерентности непосредственно задает отношение  $G_{nn}(f)$  к общему измеренному спектру  $G_{yy}(f)$  на частоте  $f$ . Как легко видеть,  $\gamma_{xy}^2(f)$  стремится к единице, если  $G_{nn}(f)/G_{yy}(f)$  стремится к нулю, и, наоборот,  $\gamma_{xy}^2(f)$  стремится к нулю, если  $G_{nn}(f)/G_{yy}(f)$  стремится к единице. Соотношения (4.31) и (4.32) позволяют найти отношение шума на выходе  $G_{nn}(f)$  к сигналу  $G_{vv}(f)$ :

$$G_{nn}(f) / G_{vv}(f) = [1 - \gamma_{xy}^2(f)] / \gamma_{xy}^2(f). \quad (4.34)$$

Из этой формулы следует, что  $G_{nn}(f)/G_{vv}(f)$  стремится к бесконечности, если  $\gamma_{xy}^2(f)$  стремится к нулю, и стремится к нулю, если  $\gamma_{xy}^2(f)$  стремится к единице.

Если внешний шум  $m(t)$  присутствует только на входе, то наблюдаемый входной процесс имеет вид  $x(t) = u(t) + m(t)$ , где  $u(t)$  — истинный входной сигнал. Наблюдаемый входной спектр  $G_{xx}(f)$  тогда состоит из суммы  $G_{uu}(f)$  и  $G_{mm}(f)$  в предположении, что  $u(t)$  и  $m(t)$  не коррелированы, т. е.

$$G_{xx}(f) = G_{uu}(f) + G_{mm}(f). \quad (4.35)$$

Из формул (4.8) и (4.9) находим

$$G_{yy}(f) = |H(f)|^2 G_{uu}(f), \quad (4.36)$$

$$G_{xy}(f) = H(f) G_{uu}(f).$$

Следовательно,

$$\gamma_{xy}^2(f) G_{xx}(f) = |G_{xy}(f)|^2 / G_{yy}(f) = G_{uu}(f). \quad (4.37)$$

Поэтому

$$\gamma_{xy}^2(f) = G_{uu}(f) / G_{xx}(f) = 1 - G_{mm}(f) / G_{xx}(f). \quad (4.38)$$

Важное и полезное свойство функции когерентности заключается в том, что она сохраняется при линейных преобразованиях. Предположим, что  $\gamma_{xy}^2(f)$  — функция когерентности  $x(t)$  и  $y(t)$ , которую мы хотим определить. Пусть  $x_1(t)$  — линейное преобразование  $x(t)$ , а  $y_1(t)$  — линейное преобразование  $y(t)$ ; тогда  $\gamma_{x_1 y_1}^2(f) = \gamma_{xy}^2(f)$ . Поэтому для измерения  $\gamma_{xy}^2(f)$  можно использовать наблюдение  $x_1(t)$  вместо  $x(t)$  и (или) наблюдение  $y_1(t)$  вместо  $y(t)$ , если только по каким-либо причинам это удобнее в конкретной задаче (см. гл. 9).

## 4.2. Влияние шума

Рассмотрим теперь более реалистичную модель, учитывающую влияние шума на наблюдения входного и выходного процессов. Пусть  $u(t)$  и  $v(t)$  — истинные сигналы, а  $m(t)$  и  $n(t)$  — шумы на входе и выходе соответственно (рис. 4.2).

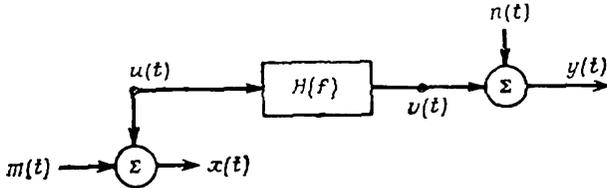


Рис. 4.2. Система с одним входом и одним выходом при наличии внешнего шума.

#### 4.2.1. Некоррелированные входной и выходной шумы

Если шум присутствует на входе и на выходе, то наблюдаемые реализации входных и выходных процессов имеют вид

$$x(t) = u(t) + m(t), \quad (4.39)$$

$$y(t) = v(t) + n(t),$$

причем предполагается, что взаимные спектральные плотности

$$G_{um}(f) = G_{vn}(f) = G_{mn}(f) = 0. \quad (4.40)$$

Следовательно, шумы не коррелированы между собой и с сигналами. Случай  $G_{mn}(f) \neq 0$  рассматривается в разд. 4.2.3. Из соотношений (4.8) и (4.9) получаем

$$G_{vv}(f) = |H(f)|^2 G_{uu}(f), \quad (4.41)$$

$$G_{uv}(f) = H(f) G_{uu}(f).$$

Однако в действительности наблюдаются спектральные плотности  $G_{xx}(f)$ ,  $G_{yy}(f)$  и  $G_{xy}(f)$ , где

$$G_{xx}(f) = G_{uu}(f) + G_{mm}(f) \geq G_{uu}(f), \quad (4.42)$$

$$G_{yy}(f) = G_{vv}(f) + G_{nn}(f) \geq G_{vv}(f), \quad (4.43)$$

$$G_{xy}(f) = G_{uv}(f),$$

так как  $G_{mm}(f) \geq 0$  и  $G_{nn}(f) \geq 0$  для всех  $f$ .

Далее, истинная функция когерентности равна

$$\gamma_{uv}^2(f) = |G_{uv}(f)|^2 / G_{uu}(f) G_{vv}(f), \quad (4.44)$$

а наблюдаемая функция когерентности имеет вид

$$\gamma_{xy}^2(f) = |G_{xy}(f)|^2 / G_{xx}(f) G_{yy}(f). \quad (4.45)$$

Из формул (4.41) — (4.43) находим

$$|G_{xy}(f)|^2 = |G_{uv}(f)|^2 = |H(f)|^2 G_{uu}^2(f) = G_{uu}(f) G_{vv}(f). \quad (4.46)$$

Поэтому функция когерентности равна

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{G_{uu}(f) G_{vv}(f)}{[G_{uu}(f) + G_{mm}(f)] [G_{vv}(f) + G_{nn}(f)]} \leq 1. \quad (4.47)$$

Неравенство строгое, если  $G_{mm}(f) > 0$  или  $G_{nn}(f) > 0$ , что на практике всегда имеет место. Из определения когерентного спектра мощности выходного процесса формулой (4.30) следует

$$\gamma_{xy}^2(f) G_{yy}(f) = G_{vv}(f) \left[ \frac{G_{uu}(f)}{G_{uu}(f) + G_{mm}(f)} \right]. \quad (4.48)$$

Таким образом, когерентный спектр мощности выходного процесса определяет  $G_{vv}(f)$ , если только  $G_{mm}(f) = 0$  независимо от спектра шума на выходе  $G_{nn}(f)$ .

Соотношение (4.8) позволяет оценить квадрат амплитудной характеристики по спектрам

$$|H(f)|_a^2 = G_{yy}(f)/G_{xx}(f). \quad (4.49)$$

Эту величину можно оценить иначе — по взаимному спектру:

$$|H(f)|_c^2 = |G_{xy}(f)|^2 / G_{xx}^2(f). \quad (4.50)$$

Отношение выражений (4.50) и (4.49) дает функцию когерентности

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|H(f)|_c^2}{|H(f)|_a^2} = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{G_{xx}(f) G_{yy}(f)}. \quad (4.51)$$

На практике обычно  $\gamma_{xy}^2(f) < 1$ , поэтому оценивание амплитудной характеристики по взаимному спектру дает меньшую величину по сравнению с оцениванием по спектрам. Более того, подстановка выражений (4.42) в (4.49) дает

$$|H|_a^2 = \frac{G_{vv} + G_{nn}}{G_{uu} + G_{mm}} = |H|^2 \left[ \frac{1 + G_{nn}/G_{vv}}{1 + G_{mm}/G_{uu}} \right], \quad (4.52)$$

где зависимость от  $f$  опущена для упрощения обозначений. Поэтому, если даже  $G_{mm} \ll G_{uu}$ ,  $|H|_a$  всегда дает смещенную оценку, когда  $G_{nn} \neq 0$ . Однако, подставляя выражения (4.42) и (4.43) в (4.50), получаем

$$|H|_c = \frac{|G_{uv}|}{G_{uu} + G_{mm}} = |H| \left[ \frac{1}{1 + G_{mm}/G_{uu}} \right]. \quad (4.53)$$

Следовательно,  $|H|_c$  — несмещенная оценка  $|H|$ , если  $G_{mm} \ll \ll G_{uu}$  независимо от значения  $G_{nn}$ .

Соотношения (4.52) и (4.53) позволяют заключить, что взаимно-спектральные методы имеют преимущество над спектральными в том случае, когда на выходе есть независимый шум, что почти всегда имеет место на практике. Дальнейшее развитие этого материала см. в гл. 5 и 11.

## 4.2.2. Наличие шума только на входе системы

Наличие шума на входе системы приводит к смещенной оценке  $H(f)$ , если пользоваться формулой (4.9), так как знаменатель не равен в этом случае истинному входному спектру. В зависимости от того, проходит ли этот неизвестный шум  $m(t)$  через систему или он присутствует только в измерениях  $x(t)$ ,

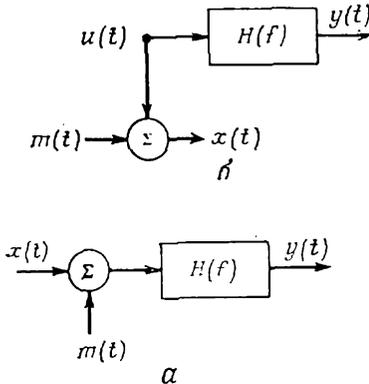


Рис. 4.3. Два типа воздействия шума на входной процесс системы. а — шум проходит через систему; б — шум не проходит через систему.

возможны два разных случая. Рис. 4.3 иллюстрирует обе эти ситуации, причем в обоих случаях наблюдаемыми величинами являются  $x(t)$  и  $y(t)$ .

Исследуем сначала первый случай, когда входной шум проходит через систему. Во многих физических задачах неизвестный и (или) ненаблюдаемый шум  $m(t)$  коррелирован с наблюдаемым входным процессом  $x(t)$ . Тогда финитное преобразование Фурье выражения (4.1) при длине реализации  $T$  дает

$$Y(f, T) = H(f) [X(f, T) + M(f, T)], \quad (4.54)$$

и с учетом формулы (3.46) получаем

$$G_{xy}(f) = H(f) [G_{xx}(f) + G_{xm}(f)]. \quad (4.55)$$

Поэтому

$$H(f) = \frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f) + G_{xm}(f)} = \text{Истинная частотная характеристика}, \quad (4.56)$$

$$H_{xy}(f) = \frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f)} = \text{Наблюдаемая частотная характеристика}. \quad (4.57)$$

Из формул (4.56) и (4.57) получаем

$$H_{xy}(f) = H(f) [1 + G_{xm}(f)/G_{xx}(f)]. \quad (4.58)$$

Итак, в общем случае  $H_{xy}(f)$  будет смещенной оценкой  $H(f)$  как по амплитуде, так и по фазе. Но если  $G_{xm}(f) = 0$ , т. е. если

$x(t)$  и  $m(t)$  некоррелированы, то  $H_{xy}(f)$  будет несмещенной оценкой  $H(f)$ .

Рассмотрим теперь второй случай, когда входной шум не проходит через систему. Тогда разумно предположить, что  $m(t)$  и  $u(t)$  не коррелированы, а значит, не коррелированы и  $m(t)$  и  $y(t)$ . Имеют место следующие соотношения:

$$X(f, T) = U(f, T) + M(f, T), \quad (4.59)$$

$$G_{xy}(f) = G_{uy}(f), \quad (4.60)$$

$$G_{xx}(f) = G_{uu}(f) + G_{mm}(f), \quad (4.61)$$

$$H(f) = \frac{G_{uy}(f)}{G_{uu}(f)} = \text{Истинная частотная характеристика}, \quad (4.62)$$

$$H_{xy}(f) = \frac{G_{xy}(f)}{G_{xx}(f)} = \text{Наблюдаемая частотная характеристика}. \quad (4.63)$$

Из формул (4.62) и (4.63) следует, что

$$H_{xy}(f) = H(f) [1 + G_{mm}(f)/G_{uu}(f)]^{-1}. \quad (4.64)$$

Таким образом,  $H_{xy}(f)$  всегда дает смещенную оценку  $H(f)$  по амплитуде (но не по фазе) и является функцией отношения шума к сигналу  $G_{mm}(f)/G_{uu}(f)$ . Однако взаимный спектр  $G_{xy}(f)$  всегда дает несмещенную оценку  $G_{uy}(f)$  как по амплитуде, так и по фазе.

#### 4.2.3. Коррелированные входной и выходной шумы

Предположим теперь, что  $m(t)$  и  $n(t)$  коррелированы между собой, но не с сигналами, так что их функция когерентности удовлетворяет неравенству

$$0 < \gamma_{mn}^2(f) < 1. \quad (4.65)$$

Определим входное  $\alpha(f)$  и выходное  $\beta(f)$  отношения шума к сигналу формулами

$$\alpha(f) = G_{mm}(f)/G_{uu}(f), \quad \beta(f) = G_{nn}(f)/G_{vv}(f). \quad (4.66)$$

Тогда соотношения (4.42) и (4.43) записываются следующим образом:

$$G_{xx}(f) = G_{uu}(f) [1 + \alpha(f)], \quad (4.67)$$

$$G_{yy}(f) = G_{vv}(f) [1 + \beta(f)],$$

$$G_{xy}(f) = G_{uv}(f) + G_{mn}(f). \quad (4.68)$$

Общее выражение (4.45) для наблюдаемой функции когерентности имеет вид

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|G_{uv}(f) + G_{mn}(f)|^2}{G_{uu}(f) G_{vv}(f) [1 + \alpha(f)] [1 + \beta(f)]}. \quad (4.69)$$

Применение этой формулы требует некоторых дополнительных предположений и допущений (см. [4.2]).

Можно получить несколько полезных результатов, если потребовать, чтобы модуль взаимного спектра  $|G_{uv}(f)|$  сигналов  $u(t)$  и  $v(t)$  был такой, что

$$|G_{mn}(f)| < |G_{uv}(f)|. \quad (4.70)$$

Рассмотрим два частных случая: модуль  $|G_{mn}(f)|$  параллелен  $|G_{uv}(f)|$  или же  $|G_{mn}(f)|$  перпендикулярен  $|G_{uv}(f)|$ . Получим оценки для  $\gamma^2_{xy}(f)$ , определяемой формулой (4.69), для этих двух случаев.

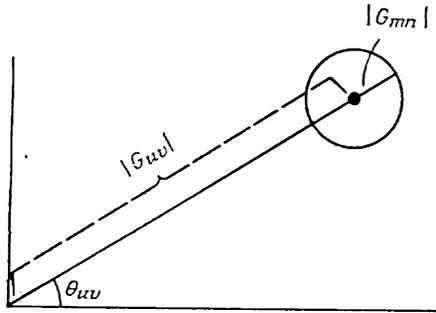


Рис. 4.4. Коррелированный шум; модуль  $|G_{mn}(f)|$  параллелен  $|G_{uv}(f)|$ .

Во-первых, если модуль  $|G_{mn}(f)|$  параллелен  $|G_{uv}(f)|$ , то

$$|G_{xy}(f)| = |G_{uv}(f) + G_{mn}(f)| = |G_{uv}(f)| \pm |G_{mn}(f)| \quad (4.71)$$

(рис. 4.4). Наблюдаемый фазовый угол  $\theta_{xy}(f) = \theta_{uv}(f)$ . По определению

$$|G_{mn}(f)|^2 = \gamma^2_{mn}(f) G_{mm}(f) G_{nn}(f), \quad (4.72)$$

где  $\gamma^2_{mn}(f)$  — функция когерентности между  $m(t)$  и  $n(t)$ . Кроме того,

$$|G_{uv}(f)|^2 = G_{uu}(f) G_{vv}(f). \quad (4.73)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |G_{xy}(f)|^2 &= |G_{uv}(f)|^2 [1 \pm |G_{mn}(f)|/|G_{uv}(f)|]^2 = \\ &= G_{uu}(f) G_{vv}(f) [1 \pm \gamma_{mn}(f) [\alpha(f) \beta(f)]^{1/2}]^2. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Отсюда

$$\gamma^2_{xy}(f) = \frac{[1 \pm \gamma_{mn}(f) [\alpha(f) \beta(f)]^{1/2}]^2}{[1 + \alpha(f)][1 + \beta(f)]}. \quad (4.75)$$

Наблюдаемая функция когерентности примет минимальное значение, если в числителе выбрать знак минус, а  $\gamma_{mn}(f)$  устре-

Таблица 4.1

Минимальные значения  $\gamma^2_{xy}(f)$  как функции  $\alpha(f)$ , полученные по формуле (4.76)

$\alpha(f)$	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250
$\gamma^2_{xy}(f)$	0,819	0,669	0,546	0,444	0,360

мить к единице. Наименьшее возможное значение этой функции в предположении  $\alpha(f) = \beta(f)$  равно

$$\gamma^2_{xy}(f) = \{[1 - \alpha(f)]/[1 + \alpha(f)]\}^2. \quad (4.76)$$

Величина  $\gamma^2_{xy}(f)$  как функция  $\alpha(f)$  приведена в табл. 4.1.

Рассмотрим теперь второй случай, когда модуль  $|G_{mn}(f)|$  перпендикулярен  $|G_{uv}(f)|$ . Тогда

$$|G_{xy}(f)|^2 = |G_{uv}(f)|^2 + |G_{mn}(f)|^2, \quad (4.77)$$

как показано на рис. 4.5. В этом случае наблюдаемый фазовый угол  $\theta_{xy}(f) = \theta_{uv}(f) \pm \Delta\theta_{mn}(f)$ . Используя соотношения (4.66) —

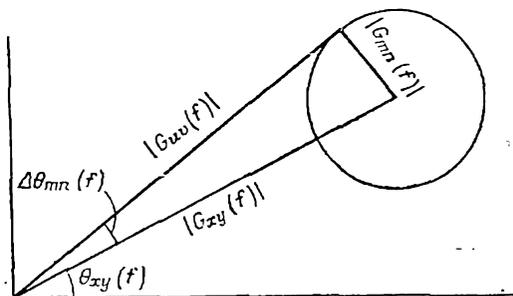


Рис. 4.5. Коррелированный шум; модуль  $|G_{mn}(f)|$  перпендикулярен  $|G_{uv}(f)|$ .

(4.68), получаем

$$|G_{xy}(f)|^2 = G_{uv}(f) G_{\infty}(f) [1 + \gamma^2_{mn}(f) \alpha(f) \beta(f)], \quad (4.78)$$

откуда 
$$\gamma^2_{xy}(f) = \frac{1 + \gamma^2_{mn}(f) \alpha(f) \beta(f)}{[1 + \alpha(f)] [1 + \beta(f)]}. \quad (4.79)$$

Заметим теперь, что наблюдаемая функция когерентности принимает наименьшее значение при приближении  $\gamma_{mn}(f)$  к нулю. Наименьшее возможное значение этой функции в предположении  $\alpha(f) = \beta(f)$  равно

$$\gamma^2_{xu}(f) = 1/[1 + \alpha(f)]^2, \quad (4.80)$$

Таблица 4.2

Минимальные значения  $\gamma^2_{xy}(f)$  как функции  $\alpha(f)$ , вычисленные по формуле (4.80)

$\alpha(f)$	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250
$\gamma^2_{xy}(f)$	0,907	0,826	0,756	0,694	0,640

что всегда больше величины  $\gamma^2_{xy}(f)$  из формулы (4.76). Значения  $\gamma^2_{xy}(f)$  как функции  $\alpha(f)$  приведены в табл. 4.2.

### 4.3. Системы с обратной связью

Рассмотрим идеальную систему с отрицательной обратной связью. Схема этой системы показана на рис. 4.6, где  $H_1(f)$  — линейная частотная характеристика прямого тракта,  $H_2(f)$  —

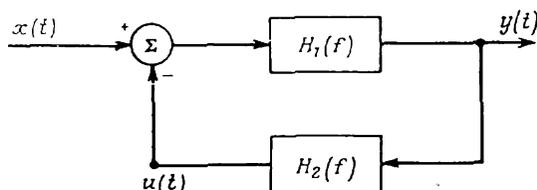


Рис. 4.6. Идеальная система с одним входом и одним выходом и цепью обратной связи.

линейная частотная характеристика тракта обратной связи,  $x(t)$  — входной процесс,  $y(t)$  — выходной. Если  $H_2(f) = 0$ , то эта модель сводится к системе с одним входом и одним выходом, изображенной на рис. 4.1. Ниже будут приведены некоторые соотношения, которые продемонстрируют изменения, вносимые такой схемой в прежние результаты, что потребует новых интерпретаций полученных результатов. Дополнительные полезные сведения можно найти в работе [4.3].

#### 4.3.1. Соотношения при отсутствии внешнего шума

Пусть  $u(t)$  — выходной процесс тракта обратной связи с частотной характеристикой  $H_2(f)$ , которая на практике, как правило, не наблюдается. Согласно формуле (4.1), финитные преобразования Фурье  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $u(t)$  при достаточно большой длине реализации  $T$  связаны между собой соотношениями

$$Y(f, T) = H_1(f) [X(f, T) - U(f, T)], \quad (4.81)$$

$$U(f, T) = H_2(f) Y(f, T).$$

Поэтому

$$Y(f, T) = H_1(f) [X(f, T) - H_2(f) Y(f, T)], \quad (4.82)$$

откуда

$$H(f) = Y(f, T) / X(f, T) = H_1(f) / [1 + H_1(f) H_2(f)].$$

Величина  $H(f)$  — общая частотная характеристика линейной системы с цепью обратной связи, связывающая  $x(t)$  и  $y(t)$ , которая может быть определена по наблюдениям только  $x(t)$  и  $y(t)$ . При этом, конечно, произведение  $H_1(f)H_2(f)$  не должно равняться  $-1$  на всех частотах. Экспериментальное определение  $H_1(f)$  и  $H_2(f)$  невозможно, если величина  $u(t)$  не наблюдается. Разумеется, если  $H_1(f)$  или  $H_2(f)$  известна или есть основания предполагать, что  $H_1(f)$  или  $H_2(f)$  имеет тот или иной вид, то тогда другую величину можно найти.

Например, пусть  $H_2(f) = c$  есть известная положительная константа. Тогда

$$H(f) = H_1(f) / [1 + cH_1(f)], \quad H_1(f) = H(f) / [1 - cH(f)]. \quad (4.83)$$

В стационарном случае  $H(f)$  можно найти по взаимному спектру

$$H(f) = G_{xy}(f) / G_{xx}(f). \quad (4.84)$$

Поэтому

$$H_1(f) = G_{xy}(f) / [G_{xx}(f) - cG_{xy}(f)]. \quad (4.85)$$

Очевидно, было бы ошибкой считать, что  $H(f)$  и  $H_1(f)$  совпадают, когда  $c$  не равно нулю.

#### 4.3.2. Влияние внешнего шума

Предположим теперь, что неизвестный внешний шум  $n(t)$  попадает в систему с обратной связью (рис. 4.7). Определим в этой схеме  $v(t)$  как выходной процесс прямого тракта с частотной характеристикой  $H_1(f)$ , который в этом случае не может быть измерен. Вместо него наблюдается  $y(t) = v(t) + n(t)$ , где

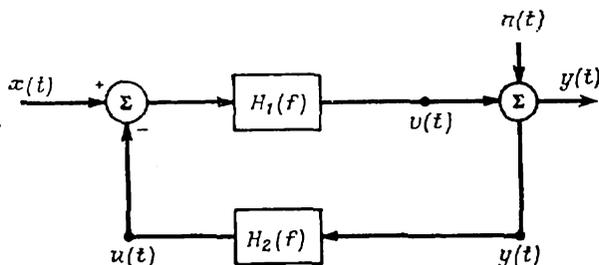


Рис. 4.7. Система с обратной связью при наличии шума на ее выходе.

$n(t)$  не коррелирован с  $v(t)$ . Предположим, что  $u(t)$  — выходной процесс тракта обратной связи с частотной характеристикой  $H_2(f)$  — непосредственно не может быть измерен. Применяв к реализациям достаточно большой длины  $T$  финитное преобразование Фурье, получим следующие соотношения:

$$Y(f, T) = V(f, T) + N(f, T), \quad (4.86)$$

$$V(f, T) = H_1(f) [X(f, T) - H_2(f) Y(f, T)].$$

Поэтому

$$Y(f, T) = H_1(f) [X(f, T) - H_2(f) Y(f, T)] + N(f, T). \quad (4.87)$$

Тогда реакция системы с обратной связью равна

$$Y(f, T) = \frac{H_1(f) X(f, T)}{1 + H_1(f) H_2(f)} + \frac{N(f, T)}{1 + H_1(f) H_2(f)} \quad (4.88)$$

и имеет две составляющие — сигнал и шум. Если  $H_2(f) = 0$ , то обратная связь отсутствует, и реакция равна

$$Y(f, T) = H_1(f) X(f, T) + N(f, T), \quad (4.89)$$

причем члены, описывающие сигнал и шум, входят в разные слагаемые. Обе эти формулы дают одно и то же отношение сигнала к шуму на выходе системы:

$$\text{Сигнал/шум} = H_1(f) X(f, T) / N(f, T), \quad (4.90)$$

которое является функцией от  $H_1(f)$ , но не зависит от  $H_2(f)$ . Поэтому отношение сигнала к шуму растет с увеличением  $H_1(f)$  при фиксированном  $H_2(f)$ , что представляет собой полезное свойство систем с обратной связью.

Возвращаясь теперь к формуле (4.88), видим, что она может быть представлена в виде

$$Y(f, T) = H(f) X(f, T) + M(f, T), \quad (4.91)$$

$$\text{где } H(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f) H_2(f)}, \quad M(f, T) = \frac{N(f, T)}{1 + H_1(f) H_2(f)}. \quad (4.92)$$

В стационарном случае  $H(f)$  и  $G_{mm}(f)$  определяются по формулам для систем с одним входом и одним выходом:

$$H(f) = G_{xy}(f) / G_{xx}(f), \quad (4.93)$$

$$G_{mm}(f) = [1 - \gamma_{xy}^2(f)] G_{yy}(f). \quad (4.94)$$

Суммарный выходной спектр

$$G_{vv}(f) = G_{rr}(f) + G_{mm}(f), \quad (4.95)$$

где

$$G_{rr}(f) = |H_1(f)|^2 G_{xx}(f) / |1 + H_1(f)H_2(f)|^2, \quad (4.96)$$

$$G_{mm}(f) = G_{nn}(f) / |1 + H_1(f)H_2(f)|^2. \quad (4.97)$$

Из формулы (4.31) следует, что

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|H_1(f)|^2 G_{xx}(f)}{|H_1(f)|^2 G_{xx}(f) + G_{nn}(f)}. \quad (4.98)$$

Таким образом,  $\gamma_{xy}^2(f)$  не зависит от  $H_2(f)$ , что находится в согласии с тем, что отношение сигнала к шуму на выходе не зависит от  $H_2(f)$ .

### ЛИТЕРАТУРА

- 4.1. Bendat J. S., Piersol A. G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]
- 4.2. Talbot C. R. S. Coherence Function Effects on Phase Difference Interpretation, *Journal of Sound and Vibration*, 39, No. 3, 345 (1975).
- 4.3. Marmarelis P. Z., Marmarelis V. Z. Analysis of Physiological Systems, Plenum Press, New York, 1978.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИСТЕМ И ПРЕДСКАЗАНИЕ ИХ РЕАКЦИИ

Непосредственным приложением развитой в гл. 4 теории систем с одним входом и одним выходом является оценивание частотных характеристик систем по наблюдениям входных и выходных процессов и предсказание реакции систем по измерениям входного процесса и известной частотной характеристике или ее оценке. При некоторых условиях частотную характеристику можно оценить только по реакции системы (см. гл. 7). Оценивание частотной характеристики по коррелированным входным и выходным процессам многомерных систем подробно рассматривается в гл. 8 и 10.

### 5.1. Определение частотной характеристики

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, в которой шум воздействует только на выходной процесс (рис. 5.1). Эта ситуация характерна для многих физических за-

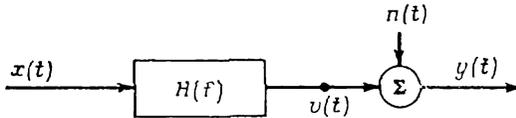


Рис. 5.1. Система с одним входом и одним выходом; шум воздействует на выход системы.

дач, в которых наблюдения входного процесса  $x(t)$  принципиально свободны от шума, а наблюдение выходного процесса  $y(t)$  равно идеальной линейной реакции  $v(t)$  на входной процесс  $x(t)$  плюс случайное возмущение  $n(t)$ . Оценка частотной характеристики  $H(f)$  по наблюдениям только  $x(t)$  и  $y(t)$  дается формулой (4.9), а именно

$$H(f) = G_{xy}(f) / G_{xx}(f). \quad (5.1)$$

Согласно соотношениям (4.30) и (4.32),

$$G_{vv}(f) = \gamma_{xy}^2(f) G_{yy}(f), \quad (5.2)$$

$$G_{nn}(f) = [1 - \gamma_{xy}^2(f)] G_{yy}(f). \quad (5.3)$$

Величина  $G_{nn}(f)$  — остаточный спектр выходного процесса  $y(t)$ , остающийся после выделения из него линейной реакции на  $x(t)$ .

Величина  $G_{vv}(f)$  — когерентный спектр выходного процесса  $y(t)$ , линейно обусловленный процессом  $x(t)$ . Обычная функция когерентности определяется формулой

$$\gamma_{xy}^2(f) = G_{vv}(f)/G_{yy}(f), \quad (5.4)$$

как было показано в разд. 4.1.4. Поскольку  $G_{vv}(f) \leq G_{yy}(f)$  для всех  $f$ , то отсюда следует простое физическое доказательство того, что

$$0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1. \quad (5.5)$$

Функции когерентности, определенные в (5.4) и (4.25), совпадают, если  $H(f)$  удовлетворяет уравнению (5.1).

### 5.1.1. Оптимальность найденной частотной характеристики

Забудем на время об уравнении (5.1), и пусть  $H(f)$  — произвольная частотная характеристика линейной системы типа изображенной на рис. 5.1. Тогда для реализации достаточно большой длины  $T$  поведение этой системы описывается уравнением

$$Y(f, T) = H(f) X(f, T) + N(f, T), \quad (5.6)$$

где  $Y(f, T)$ ,  $X(f, T)$  и  $N(f, T)$  — соответственно финитные преобразования Фурье  $y(t)$ ,  $x(t)$  и  $n(t)$  согласно определению (3.44). Тогда

$$N(f, T) = Y(f, T) - H(f) X(f, T), \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} |N(f, T)|^2 = & |Y(f, T)|^2 - H(f) X(f, T) Y^*(f, T) - \\ & - H^*(f) X^*(f, T) Y(f, T) + H(f) H^*(f) |X(f, T)|^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей равенства (5.8), умножив их на  $2/T$  и устремив  $T$  к бесконечности, получим с учетом соотношений (3.46) и (3.47):

$$G_{nn}(f) = G_{yy}(f) - H(f) G_{yx}(f) - H^*(f) G_{xy}(f) + H(f) H^*(f) G_{xx}(f). \quad (5.9)$$

Это выражение для  $G_{nn}(f)$  справедливо для произвольной функции  $H(f)$ . Оптимальная частотная характеристика  $H(f)$  — это та, которая минимизирует  $G_{nn}(f)$  по всем возможным  $H(f)$ . Такая оценка называется оценкой по методу наименьших квадратов.

Минимизируем теперь  $G_{nn}(f)$  как функцию от  $H(f)$ . В целях упрощения зависимость от  $f$  опущена; таким образом,

$$G_{nn} = G_{yy} - H G_{yx} - H^* G_{xy} + H H^* G_{xx}. \quad (5.10)$$

Представим комплексные числа через их действительные и мнимые части

$$H = H_R - jH_I, \quad H^* = H_R + jH_I, \quad (5.11)$$

$$G_{xy} = G_R - jG_I, \quad G_{yx} = G_R + jG_I.$$

Тогда

$$G_{nn} = G_{yy} - (H_R - jH_I) G_{yx} - (H_R + jH_I) G_{xy} + (H_R^2 + H_I^2) G_{xx}. \quad (5.12)$$

Для нахождения вида характеристики  $H$ , минимизирующей  $G_{nn}$ , нужно теперь приравнять нулю частные производные  $G_{nn}$  по  $H_R$  и  $H_I$  и решить полученную таким образом систему уравнений. Это дает

$$\partial G_{nn} / \partial H_R = -G_{yx} - G_{xy} + 2H_R G_{xx} = 0, \quad (5.13)$$

$$\partial G_{nn} / \partial H_I = jG_{yx} - jG_{xy} + 2H_I G_{xx} = 0.$$

Отсюда

$$H_R = (G_{xy} + G_{yx}) / 2G_{xx} = G_R / G_{xx}, \quad (5.14)$$

$$H_I = j(G_{xy} - G_{yx}) / 2G_{xx} = G_I / G_{xx}.$$

Следовательно, оптимальная характеристика  $H$  совпадает с частотной характеристикой, определяемой формулой (5.1), а именно

$$H = H_R - jH_I = (G_R - jG_I) / G_{xx} = G_{xy} / G_{xx}. \quad (5.15)$$

Оптимальная характеристика  $H$ , вычисляемая по произвольным реализациям согласно формуле (5.15), носит теоретический характер и не обязательно может быть физически осуществима.

Заметим также, что специальный вид уравнения (5.10) позволяет просто найти ту же оптимальную  $H$  путем приравнивания нулю или частной производной  $G_{nn}$  по  $H$  (при фиксированной  $H^*$ ), или частной производной  $G_{nn}$  по  $H^*$  (при фиксированной  $H$ ). Этим способом получаем

$$\partial G_{nn} / \partial H = -G_{yx} + H^* G_{xx} = 0, \quad (5.16)$$

$$H^* = G_{yx} / G_{xx}, \quad H = G_{xy} / G_{xx}. \quad (5.17)$$

Подстановка оптимальной частотной характеристики  $H(f)$  из (5.15) в уравнение (5.9) позволяет обнаружить еще одно ее важное свойство:

$$G_{nn}(f) = |1 - \gamma_{xy}^2(f)| G_{yy}(f), \quad (5.18)$$

откуда

$$G_{vv}(f) = G_{uu}(f) - G_{nn}(f) = \gamma_{xy}^2(f) G_{uu}(f). \quad (5.19)$$

Более того, подстановка оптимальной  $H(f)$  дает

$$G_{xv}(f) = H(f) G_{xx}(f), \quad (5.20)$$

$$G_{xn}(f) = G_{xy}(f) - H(f) G_{xx}(f) = 0. \quad (5.21)$$

Следовательно,

$$G_{vn}(f) = H^*(f) G_{xn}(f) = 0. \quad (5.22)$$

Таким образом, если для оценки линейной системы (рис. 5.1) используется оптимальная частотная характеристика  $H(f)$ , то  $n(t)$  и  $v(t)$  автоматически не коррелированы.

### 5.1.2. Использование зондирующего сигнала

В некоторых инженерных приложениях входной процесс  $x(t)$  не наблюдается, но есть возможность подать на вход системы известный случайный или переходной зондирующий сигнал

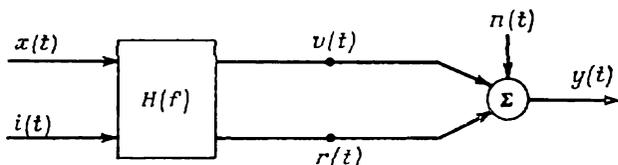


Рис. 5.2. Система с зондирующим сигналом и шумом на выходе.

нал  $i(t)$ , независимый от естественного входа  $x(t)$  (рис. 5.2). На рис. 5.2:  $x(t)$  — естественный входной процесс (ненаблюдаемый);  $i(t)$  — известный зондирующий сигнал (наблюдаемый);  $v(t)$  — линейная реакция на  $x(t)$  (ненаблюдаемая);  $r(t)$  — линейная реакция на  $i(t)$  (ненаблюдаемая);  $n(t)$  — неизвестный шум на выходе (ненаблюдаемый);  $y(t) = v(t) + r(t) + n(t)$  — суммарный выходной сигнал (наблюдаемый). Разумно предположить, что  $i(t)$  не зависит от  $x(t)$  и  $n(t)$ , а  $n(t)$  не зависит от  $v(t)$  и  $r(t)$ . Величина  $n(t)$  включает все отклонения от линейной модели рис. 5.2, в том числе нелинейные эффекты и влияние других некоррелированных входных сигналов.

Согласно формулам (3.44), применение финитного преобразования Фурье к реализациям достаточно большой длины  $T$  приводит к следующим соотношениям между величинами, указанными на рис. 5.2:

$$\begin{aligned} R(f, T) &= H(f) I(f, T), & V(f, T) &= H(f) X(f, T), \\ Y(f, T) &= R(f, T) + V(f, T) + N(f, T) = \\ &= H(f) [I(f, T) + X(f, T)] + N(f, T). \end{aligned} \quad (5.23)$$

По предположению следующие взаимные спектры равны нулю:

$$G_{ix}(f) = G_{in}(f) = G_{nv}(f) = G_{nr}(f) = 0. \quad (5.24)$$

Из формул (3.46) и (3.47) следует, что

$$G_{yy}(f) = G_{rr}(f) + G_{vv}(f) + G_{nn}(f), \quad (5.25)$$

$$G_{iy}(f) = H(f) G_{ii}(f). \quad (5.26)$$

Если бы частотную характеристику  $H(f)$  можно было оценить обычным образом с использованием наблюдений  $x(t)$ , т. е.

$$H(f) = G_{xy}(f)/G_{xx}(f), \quad (5.27)$$

то при наличии внешнего шума на входе была бы получена смещенная оценка частотной характеристики. Но формулу (5.27) использовать нельзя, ибо  $x(t)$  не наблюдается. Однако соотношение (5.26) показывает, что при известном зондирующем сигнале имеет место равенство

$$H(f) = G_{iy}(f)/G_{ii}(f), \quad (5.28)$$

которое дает несмещенную оценку  $H(f)$  независимо от каких-либо наблюдений и предположений относительно  $x(t)$ . Поэтому этот способ можно рекомендовать для практического использования. В качестве зондирующего сигнала  $i(t)$  часто выбирают ограниченный по частоте белый шум, т. е.  $G_{ii}(f) = K$  — константа, так что  $H(f)$  равняется просто величине

$$H(f) = G_{iy}(f)/K. \quad (5.29)$$

Как только частотная характеристика  $H(f)$  определена по формулам (5.28) или (5.29),  $i(t)$  можно исключить, и уравнение (5.23) принимает вид

$$Y(f, T) = V(f, T) + N(f, T) = H(f) X(f, T) + N(f, T). \quad (5.30)$$

Теперь, наблюдая только  $y(t)$ , получаем

$$G_{yy}(f) = G_{vv}(f) + G_{nn}(f) = |H(f)|^2 G_{xx}(f) + G_{nn}(f). \quad (5.31)$$

Если  $G_{nn}(f) \ll G_{vv}(f)$ , то

$$G_{yy}(f) \approx |H(f)|^2 G_{xx}(f). \quad (5.32)$$

Следовательно,

$$G_{xx}(f) \approx G_{yy}(f)/|H(f)|^2. \quad (5.33)$$

Эта формула дает полезную информацию о спектре  $G_{xx}(f)$ , даже если  $x(t)$  не наблюдается. В частности,  $x(t)$  может быть собственным шумом на входе, а  $y(t)$  — собственным шумом на выходе, вызванным  $x(t)$ .

## 5.1.3. Отношения шума к сигналу

Используя обозначения рис. 5.2, определим отношение шума к сигналу соответственно на входе  $\alpha(f)$  и на выходе  $\beta(f)$  формулами

$$\alpha(f) = \frac{G_{xx}(f)}{G_{ii}(f)}, \quad \beta(f) = \frac{G_{yy}(f) - G_{rr}(f)}{G_{rr}(f)}. \quad (5.34)$$

В этих отношениях  $G_{ii}(f)$  и  $G_{rr}(f)$  характеризуют входной и выходной сигналы. Числитель  $G_{xx}(f)$  в формуле для  $\alpha(f)$  — это спектр входного сигнала за вычетом вклада  $i(t)$ , а числитель  $G_{yy}(f) - G_{rr}(f)$  в формуле для  $\beta(f)$  — это спектр выходного сигнала за вычетом вклада  $r(t)$ . Пусть

$$x_1(t) = i(t) + x(t). \quad (5.35)$$

Тогда спектры  $x_1(t)$  и  $y(t)$  равны

$$G_{x_1x_1}(f) = G_{ii}(f) + G_{xx}(f) = G_{ii}(f) [1 + \alpha(f)], \quad (5.36)$$

$$G_{yy}(f) = G_{rr}(f) [1 + \beta(f)],$$

а взаимный спектр  $x_1(t)$  и  $y(t)$  имеет вид

$$G_{x_1y}(f) = G_{iy}(f) + G_{xy}(f) = G_{ir}(f) + G_{xv}(f), \quad (5.37)$$

Следовательно,

$$G_{ii}(f) = \gamma_{ix_1}^2(f) G_{x_1x_1}(f), \quad G_{xx}(f) = [1 - \gamma_{ix_1}^2(f)] G_{x_1x_1}(f), \quad (5.38)$$

$$G_{rr}(f) = \gamma_{iy}^2(f) G_{yy}(f), \quad G_{yy}(f) - G_{rr}(f) = [1 - \gamma_{iy}^2(f)] G_{yy}(f).$$

Функцию когерентности  $\gamma_{iy}^2(f)$  всегда можно определить, а возможность определения  $\gamma_{ix_1}^2(f)$  зависит от того, известен или нет входной процесс  $x(t)$ . Из формул (5.34) и (5.38) получаем

$$\alpha(f) = \frac{1 - \gamma_{ix_1}^2(f)}{\gamma_{ix_1}^2(f)}, \quad \beta(f) = \frac{1 - \gamma_{iy}^2(f)}{\gamma_{iy}^2(f)}, \quad (5.39)$$

откуда

$$\gamma_{ix_1}^2(f) = 1/[1 + \alpha(f)], \quad \gamma_{iy}^2(f) = 1/[1 + \beta(f)]. \quad (5.40)$$

Следовательно,  $\alpha(f) = \beta(f)$  тогда и только тогда, когда  $\gamma_{ix_1}^2(f) = \gamma_{iy}^2(f)$ . Из соотношений (5.37) и (5.38) находим функцию когерентности  $\gamma_{x_1y}^2$ :

$$\gamma_{x_1y}^2(f) = \gamma_{ix_1}^2(f) \gamma_{iy}^2(f) \frac{|G_{ir}(f) + G_{xv}(f)|^2}{G_{ii}(f) G_{rr}(f)}. \quad (5.41)$$

В случае  $G_{xv}(f) = 0$  эта формула значительно упрощается:

$$\gamma_{x_1y}^2(f) = \gamma_{ix_1}^2(f) \gamma_{iy}^2(f). \quad (5.42)$$

## 5.2. Ошибки оценивания частотной характеристики

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом, показанную на рис. 5.1, где  $x(t)$  и  $y(t)$  — реализации стационарных эргодических случайных процессов, наблюдаемые одновременно на конечном временном интервале  $0 \leq t \leq T$ . Согласно формуле (5.1), оптимальная оценка частотной характеристики системы имеет вид

$$\hat{H}(f) = \hat{G}_{xy}(f) / \hat{G}_{xx}(f), \quad (5.43)$$

причем спектральные плотности оцениваются по реализациям конечной длины при помощи численных методов, описанных в разд. 3.4.2. Как следует из разд. 4.1.2, частотную характеристику можно оценить и по реализациям  $x(t)$  и  $y(t)$  переходных процессов по формуле

$$\hat{H}(f) = \hat{\mathcal{G}}_{xy}(f) / \hat{\mathcal{G}}_{xx}(f); \quad (5.44)$$

оценки «энергетических» спектральных плотностей имеют вид

$$\hat{\mathcal{G}}_{xy}(f) = T \hat{G}_{xy}(f), \quad \hat{\mathcal{G}}_{xx}(f) = T \hat{G}_{xx}(f). \quad (5.45)$$

Предполагается, что длина  $T$  реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$  достаточно велика и охватывает все существенные значения  $x(t)$  и  $y(t)$ , так что  $x(t) = y(t) = 0$  при  $t < 0$  и  $t > T$ . Предполагается также, что эксперимент можно повторять, используя близкие переходные процессы, достаточное число раз для получения  $n_d$  реализаций, необходимых для выполнения операций усреднения в формулах (3.89) и (3.90).

Оценивание частотных характеристик по формуле (5.43) или (5.44) обычно связано с наличием как случайных, так и систематических ошибок. Понимание причин этих ошибок и тщательная их минимизация — ключ к успешному применению описываемых методов. В большинстве случаев функция когерентности между измерениями на входе и выходе указывает на наличие ошибок и помогает определить их происхождение и величину. Поэтому при оценивании частотных характеристик совершенно необходимо *всегда* одновременно оценивать и функцию когерентности.

### 5.2.1. Случайные ошибки

Источниками случайных ошибок при оценивании частотных характеристик обычно являются:

1. Инструментальный шум в датчиках и приборах и вычислительные погрешности.
2. Наличие ненаблюдаемых входных сигналов, не коррелированных с наблюдаемым и влияющих на выходной сигнал.

3. Нелинейная связь между входным и выходным сигналами системы.

Вызванная этими факторами суммарная случайная ошибка прямым образом связана с а) функцией когерентности  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ , вычисленной по наблюдаемым реализациям входного и выходного процессов, и б) числом усреднений  $n_d$ , использованных при вычислении оценок спектральных плотностей. В гл. 11 показано, что нормированная случайная ошибка оценивания амплитудной характеристики и среднеквадратичное отклонение при оценивании фазовой характеристики равны

$$\varepsilon [|\hat{H}(f)|] \approx \frac{[1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)]^{1/2}}{|\hat{\gamma}_{xy}(f)| \sqrt{2n_d}}, \quad \sigma[\hat{\varphi}(f)] \approx \arcsin \{ \varepsilon [|\hat{H}(f)|] \}. \quad (5.46)$$

При проведении лабораторного эксперимента обычно можно добиться вполне точного определения входного сигнала и низких инструментальных шумов, что приводит к функции когерентности, близкой к единице. В этом случае частотная характеристика определяется с приемлемой случайной ошибкой при сравнительно небольшом числе усреднений. Однако в полевых условиях создать такие идеальные условия невозможно, особенно если входной сигнал естественный, а не результат моделирования. Поэтому функция когерентности может быть существенно ниже единицы, и для получения приемлемой точности требуется большое число усреднений  $n_d$ .

Для определения возможного источника случайных ошибок при оценивании частотных характеристик в полевых условиях можно руководствоваться перечисленными ниже общими рекомендациями (читатель, однако, должен помнить, что эти рекомендации весьма приближенны и допускают многочисленные исключения).

1. Если  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  резко уменьшается в той полосе частот, где  $|\hat{H}(f)|$  сравнительно невелика, то это обычно связано с влиянием внешнего шума на выходной процесс  $y(t)$ , вызванного неточностью измерений и (или) наличием дополнительных некоррелированных входных сигналов.

2. Если  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  резко уменьшается в той полосе частот, где  $|\hat{H}(f)|$  далека от своего минимального значения, а  $\hat{G}_{xx}(f)$  сравнительно невелика, то следует подозревать, что шум оказывает влияние на входной процесс  $x(t)$ . Заметим, что наряду с увеличенной случайной ошибкой в этом случае появляется и систематическая ошибка (см. следующий раздел).

3. Если амплитудная характеристика имеет резкие максимумы, что свойственно слабодемпфированным резонансным системам, то обычно максимумы  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  и  $|\hat{H}(f)|$  приходятся на эти же частоты (резонансные частоты системы), поскольку отноше-

ние сигнала к шуму максимально как раз на этих частотах. Если же  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  не имеет пика на таких частотах или, что еще хуже, имеет провал, то, по-видимому, система нелинейна. Однако более вероятной причиной подобной картины является смещенность спектральных оценок, связанная с недостаточным разрешением по частоте. (Подробнее см. в следующем разделе.)

### 5.2.2. Систематические ошибки

Систематические ошибки при оценивании частотных характеристик обычно появляются по следующим основным четырем причинам:

- 1) наличие не проходящего через систему внешнего шума на входе;
- 2) смещенность оценок спектральной плотности, вызванная недостаточным разрешением по частоте;
- 3) нелинейность системы;
- 4) влияние на выходной сигнал ненаблюдаемых входных процессов, коррелированных с наблюдаемым.

Ошибки первого типа, вызванные инструментальным шумом на входе, были детально проанализированы в разд. 4.2.2. Напомним, что если наблюдаемый входной процесс  $x(t)$  является суммой истинного сигнала  $u(t)$  и шума  $m(t)$ , то математическое ожидание оценки частотной характеристики дается формулой (4.64):

$$E[\hat{H}(f)] = H(f) \{1 + [G_{mm}(f)/G_{uu}(f)]\}^{-1}, \quad (5.47)$$

т. е. присутствие шума в наблюдениях входного процесса всегда приводит к заниженным оценкам частотной характеристики. Поэтому очень важно стремиться к тому, чтобы влияние шума на входной сигнал системы было минимальным. Если же шум на входе является действительным возмущением, проходящим через систему, и не коррелированным с изучаемым входным процессом  $u(t)$ , то, как следует из разд. 4.2.2, смещение не появляется.

Смещенность оценок спектральных плотностей  $\hat{G}_{xx}(f)$  и  $\hat{G}_{xy}(f)$ , вызванная недостаточным разрешением по частоте, скажется в основном на виде пиков и впадин оцениваемой амплитудной характеристики. Ошибки такого рода подробно рассмотрены в гл. 11, а в разд. 3.4.3 приведена их сводка. Избавиться от них можно путем выбора подходящего разрешения при оценивании спектральных плотностей, т. е. максимальное разрешение по частоте  $B_e$  должно быть достаточным для четкого и полного выявления спектральных пиков и впадин.

Третий из перечисленных выше источников систематических ошибок связан с нарушением условия линейности системы. Фор-

мулы (5.43) и (5.44) дают только линейное приближение частотных характеристик. Но, как доказано в разд. 5.1.1, это наилучшее в среднеквадратичном смысле линейное приближение частотных характеристик, если только входной процесс удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Этот факт является сильным доводом в пользу оценивания частотных характеристик систем с возможными нелинейными свойствами с помощью естественных входных процессов (или точного лабораторного моделирования таких входных процессов), а не с помощью любых процессов, моделирование которых возможно в лабораторных условиях.

Наконец, ошибка, вызванная наличием других коррелированных входных процессов, связана с материалом гл. 8. Для иллюстрации характера этой ошибки рассмотрим систему с двумя входами, причем входной процесс  $x(t)$  наблюдается, второй входной процесс  $z(t)$  не наблюдается, суммарная реакция системы  $y(t)$  наблюдается. Тогда, как будет показано в гл. 8, отношение математического ожидания оценки частотной характеристики  $\hat{H}(f)$ , полученной по формуле (5.43), к истинному ее значению равно

$$\frac{E[\hat{H}(f)]}{H(f)} = \frac{1 - \gamma_{xz}^2(f)}{1 - [G_{xz}(f)G_{zy}(f)/G_{zz}(f)G_{xy}(f)]}. \quad (5.48)$$

Заметим, что если наблюдаемый и ненаблюдаемый входные процессы  $x(t)$  и  $z(t)$  не коррелированы, то  $\gamma_{xz}^2(f) = 0$  и правая часть соотношения (5.48) обращается в единицу. Отсюда следует, что ненаблюдаемые входные сигналы, не коррелированные с наблюдаемыми, не вызывают смещения, а проявляются как дополнительный шум на выходе. Как видно из предыдущего раздела, эти входные процессы приводят к увеличению случайных ошибок при оценивании частотных характеристик.

Заметим также, что самим процедурам оценивания (5.43) и (5.44) присуща небольшая смещенность, связанная с тем, что, вообще говоря,

$$E[\hat{H}(f)] = E\left[\frac{\hat{G}_{xy}(f)}{\hat{G}_{xx}(f)}\right] \neq \frac{E[\hat{G}_{xy}(f)]}{E[\hat{G}_{xx}(f)]}. \quad (5.49)$$

Поэтому  $E[\hat{H}(f)] \neq H(f)$ . Однако на практике это обычно не вызывает затруднений, поскольку при том числе усреднений  $n_d$ , которые требуются для доведения до приемлемого уровня случайных ошибок (5.46), такой погрешностью можно пренебречь.

Существование систематических ошибок при оценивании частотной характеристики, вызванных шумом на входе, неадекватным спектральным разрешением и нелинейными эффектами,

проявляется в виде характерных особенностей поведения наблюдаемой функции когерентности  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ . Можно руководствоваться следующими соображениями:

1. Если  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  резко уменьшается в той полосе частот, где  $|\hat{H}(f)|$  далека от своего минимального значения, а  $\hat{G}_{xx}(f)$  относительно мала, то следует подозревать влияние шума на наблюдения входного процесса  $x(t)$ .

2. Если  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  обнаруживает глубокий провал на той же частоте, на которой  $|\hat{H}(f)|$  имеет острый пик или впадину, то наиболее вероятной причиной ошибки является неадекватное спектральное разрешение, хотя подобную картину могут вызвать и нелинейности.

3. Для выяснения того, какая из этих двух причин имеет место, наблюдение следует повторить при лучшем спектральном разрешении. Если значение  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  увеличится, то, следовательно, причиной является недостаточное спектральное разрешение. В противном случае нужно искать нелинейности.

Систематические ошибки, вызванные другими ненаблюдаемыми входными сигналами, коррелированными с наблюдаемым входным сигналом  $x(t)$ , не обязательно сказываются на виде  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ . Эта проблема будет исследована в гл. 8 при рассмотрении многомерных систем.

### 5.2.3. Примеры

Для иллюстрации некоторых трудностей, которые появляются при оценивании частотных характеристик одномерных систем, рассмотрим один ранний лабораторный эксперимент, выполненный Барноски [5.2] по схеме, приведенной на рис. 5.3. Широкополосная случайная вибрация, охватывающая полосу частот почти от нуля до 1200 Гц, через массивную опору подавалась на тошкую консольную балку. Акселерометр на опоре фиксировал входной сигнал  $x(t)$ ; второй акселерометр (на свободном конце балки) регистрировал выходной сигнал  $y(t)$ . Данные записывались на магнитную ленту, что ограничило отношение сигнала к шуму величиной около 45 дБ. Спектральное разрешение составляло  $B_e \approx 5$  Гц, и для анализа было использовано  $n_d = 29$  усреднений.

На рис. 5.4 показаны полученные оценки входного и выходного спектров  $\hat{G}_{xx}(f)$  и  $\hat{G}_{yy}(f)$  и модуль взаимного спектра  $|\hat{G}_{xy}(f)|$ . Отметим три особенности входного спектра  $\hat{G}_{xx}(f)$  (рис. 5.4, а). Во-первых, спектральная плотность быстро убывает на частотах ниже 25 Гц и выше 700 Гц из-за особенностей источника вибраций. Во-вторых, спектр обнаруживает наличие

периодической компоненты с частотой 60 Гц, т. е. с частотой питающего аппарата напряжения. В-третьих, оценка спектра очевидным образом подвержена значительным флуктуациям (случайным ошибкам) из-за сравнительно небольшого числа

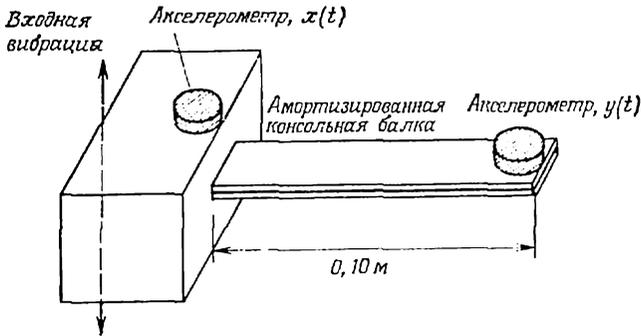


Рис. 5.3. Вибрация консольной балки.

усреднений; по табл. 3.2  $\epsilon_r=0,19$  при  $n_d=29$ , или около 20%. Выходной спектр  $\hat{G}_{yy}(f)$  на рис. 5.4, б и модуль взаимного спектра  $|\hat{G}_{xy}(f)|$  на рис. 5.4, в меняются в более широких пределах, но в основном характер их примерно такой же, как и у входного спектра, т. е. они убывают на низких и высоких частотах, имеют периодическую компоненту с частотой 60 Гц и подвержены явным флуктуациям, вполне объяснимым небольшим числом усреднений.

На рис. 5.5 приведен график оценки функции когерентности  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$ . Из этого графика видно, что  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$  близка к единице на большинстве частот, как в идеальном случае. Более того, флуктуации  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$  исчезают при приближении  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$  к единице в точном соответствии с формулой для ошибки из табл. 3.2. Заметим также, что  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$  близка к единице и на частоте  $f=60$  Гц, несмотря на очевидное влияние питающего напряжения на входные и выходные данные, отчетливо видное на рис. 5.4. Это значит, что питающее напряжение не оказывает влияния на оценки, вероятно, из-за того, что это возмущение вместе с входным сигналом проходит через систему (см. разд. 4.2.2). С другой стороны,  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$  падает значительно ниже единицы в четырех областях: а)  $f < 20$  Гц, б)  $150 < f < 190$  Гц, в)  $400 < f < 700$  Гц и г)  $f > 800$  Гц — и тем самым предупреждает об ошибках оценивания частотной характеристики в этих областях.

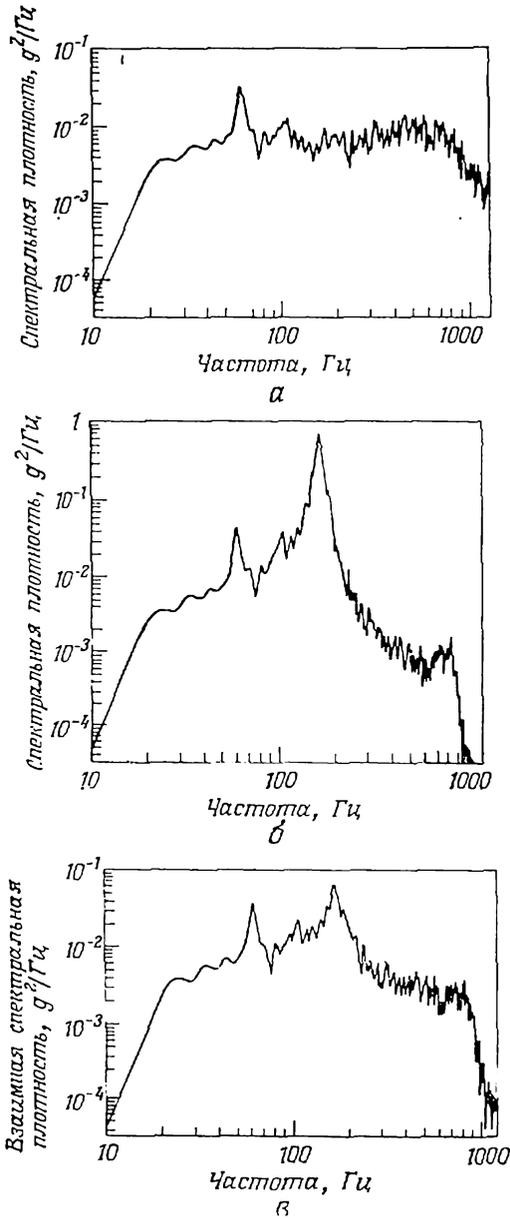


Рис. 5.4. Входной и выходной спектры в эксперименте с консольной балкой. Разрешение по частоте  $\nu_c=5$  Гц; число усреднений  $n_d=29$ .

**а** — входной спектр; **б** — выходной спектр; **в** — модуль взаимного спектра. (Данные, использованные на рис. 5.4—5.6, взяты из работы [2.1] с разрешения Американского института аэронавтики и астронавтики и автора.)

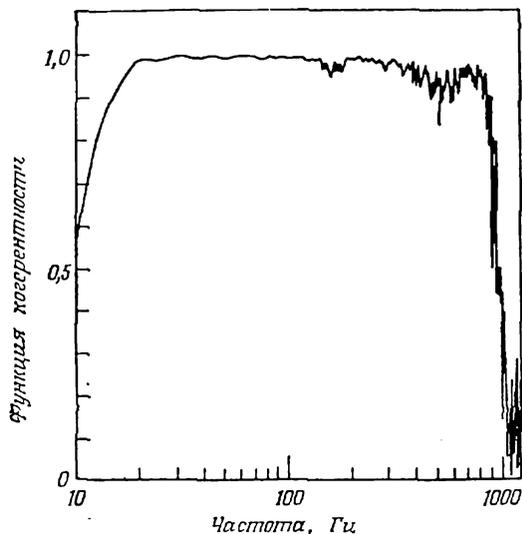


Рис. 5.5. Функция когерентности в эксперименте с консольной балкой.

Оценки амплитудной и фазовой характеристик приведены на рис. 5.6. Как видно,  $|\hat{H}(f)|$  обладает отчетливыми пиками на частотах  $f=165$  Гц и  $f=820$  Гц, а  $\hat{\varphi}(f)$  резко меняется на  $180^\circ$  на тех же частотах. Из разд. 1.3.3 мы знаем, что это свидетельствует о первых двух нормальных модах балки. Вид функции когерентности на рис. 5.5 подсказывает, что оценивание  $\hat{H}(f)$  в четырех диапазонах частот связано со случайными или систематическими ошибками. В первой области ( $f < 20$  Гц) характеристика  $|\hat{H}(f)|$  далека от своего минимального значения, но  $\hat{G}_{xx}(f)$  на рис. 5.4, а сравнительно мала. Рекомендации разд. 5.2.2 указывают на возможность систематической ошибки при оценивании  $|\hat{H}(f)|$  из-за инструментального шума в наблюдениях входа  $x(t)$ . Это подтверждают результаты, приведенные на рис. 5.6, а, так как  $|\hat{H}(f)|$  становится меньше единицы при  $f < 20$  Гц, хотя по физическому смыслу  $|\hat{H}(f)| \rightarrow 1$  при  $f \rightarrow 0$ . Небольшая впадина на графике  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  в окрестности  $f=165$  Гц совпадает с резким пиком  $|\hat{H}(f)|$ . Следовательно, здесь возможна систематическая ошибка из-за недостаточного спектрального разрешения. Третий провал на графике функции когерентности в диапазоне частот  $400 < f < 700$  Гц совпадает с минимумом  $|\hat{H}(f)|$ . Рекомендации разд. 5.2.1 подсказывают, что в этом случае систематических ошибок нет, но есть небольшая случайная ошибка, задаваемая формулой (5.46), которая вы-

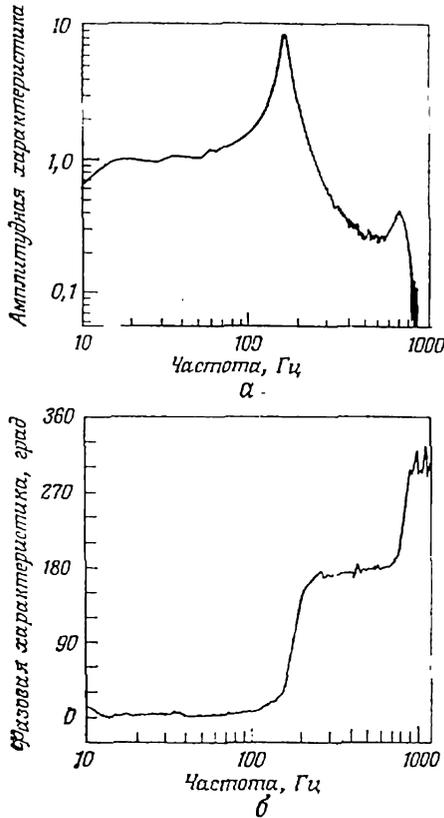


Рис. 5.6. Частотная характеристика в эксперименте с консольной балкой.

а — амплитудная характеристика; б — фазовая характеристика.

звана наличием незначительного инструментального шума на выходе системы. Из рис. 5.6 видно, что как  $|\hat{H}(f)|$ , так и  $\hat{\varphi}(f)$  подвержены флуктуациям на этом частотном диапазоне в соответствии с формулой (5.46). Наконец, резкое убывание  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  при  $f > 800$  Гц совпадает с быстрым убыванием  $|\hat{H}(f)|$  в этой же области, что свидетельствует о полном подавлении выходного сигнала инструментальным шумом. На рис. 5.6 видно, что в полном соответствии с формулой (5.46) случайные ошибки оценивания  $|\hat{H}(f)|$  и  $\hat{\varphi}(f)$  в области частот выше 800 Гц нарастают в такой степени, что оценки становятся бессмысленными, когда  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  стремится к нулю.

Для иллюстрации особенностей ошибок, связанных со спектральным разрешением, рассмотрим еще один лабораторный

эксперимент, который проводился с панелью по схеме, изображенной на рис. 5.7. Широкополосное случайное воздействие было приложено к центру панели через датчик, который измерял величину приложенной силы и вызванное ею ускорение. Данные анализировались при отношении сигнала к шуму более 60 дБ. Анализ проводился при разрешении  $B_e=2$  Гц и числе усреднений  $n_d=256$ .

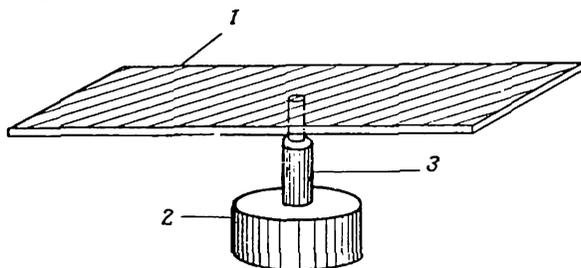


Рис. 5.7. Вибрация панели.

1 — панель; 2 — электродинамический вибратор; 3 — прибор для измерения силы,  $x(t)$ , и акселерометр,  $y(t)$ .

На рис. 5.8 приведены результаты оценивания в полосе частот 20—600 Гц функции когерентности  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  и амплитудной характеристики  $|\hat{H}(f)|$ , которая называется приведенной массой и определяет, какую реакцию  $y(t)$  = ускорение вызовет воздействие  $x(t)$  = сила. Как видно,  $|\hat{H}(f)|$  имеет несколько отчетливых пиков и впадин, соответствующих нормальным модам панели. Заметим далее, что  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  близка к единице на большинстве частот. Применение формулы (5.46) при такой функции когерентности и числе усреднений  $n_d=256$  позволяет заключить, что каких-либо значительных случайных ошибок нет. На графике  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  есть, однако, несколько впадин на тех же частотах, на которых  $|\hat{H}(f)|$  имеет пики или впадины. Эти результаты типичны для оценивания спектральных плотностей на пределе разрешения.

Для того чтобы быть уверенным в том, что впадины  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  обусловлены недостаточным разрешением по частоте, опыт был повторен в частотной полосе, охватывающей первый пик и первую впадину  $|\hat{H}(f)|$ , т. е. от 20 до 150 Гц при разрешении  $B_e=0,3$  Гц, а не 2 Гц, как раньше. Результаты приведены на рис. 5.9. Теперь  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  близка к единице на всех частотах, в том числе и на тех, на которых раньше, при  $B_e=2$  Гц, были впадины (см. рис. 5.8). Это полностью подтверждает наше предположение, что впадины вызваны недостаточным разрешением по частоте. Заметим, что использование лучшего разрешения

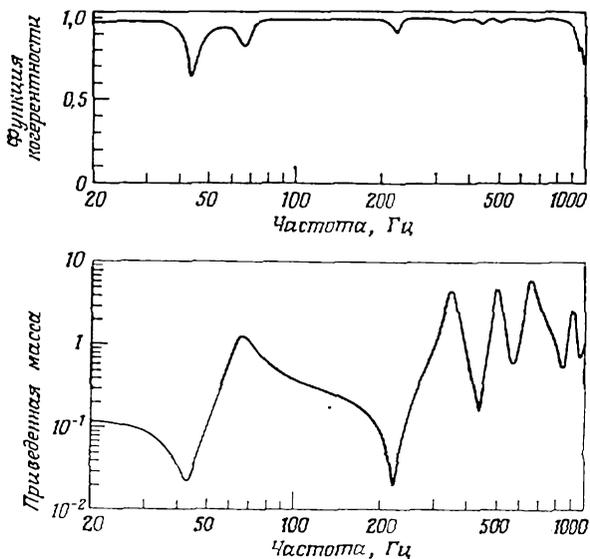


Рис. 5.8. Функция когерентности и амплитудная характеристика в эксперименте с панелью.

Разрешение по частоте  $B_0 = 2$  Гц; число усреднений  $n_d = 256$ .

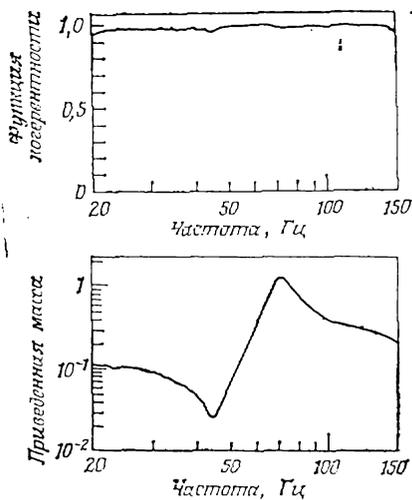


Рис. 5.9. Функция когерентности и амплитудная характеристика в эксперименте с панелью при лучшем спектральном разрешении.

Разрешение по частоте  $B_0 = 0.3$  Гц; число усреднений  $n_d = 256$ .

несущественно повлияло на вид оценки  $|\hat{H}(f)|$ . Это свидетельствует о чрезвычайно высокой чувствительности функции когерентности к сравнительно небольшим систематическим ошибкам.

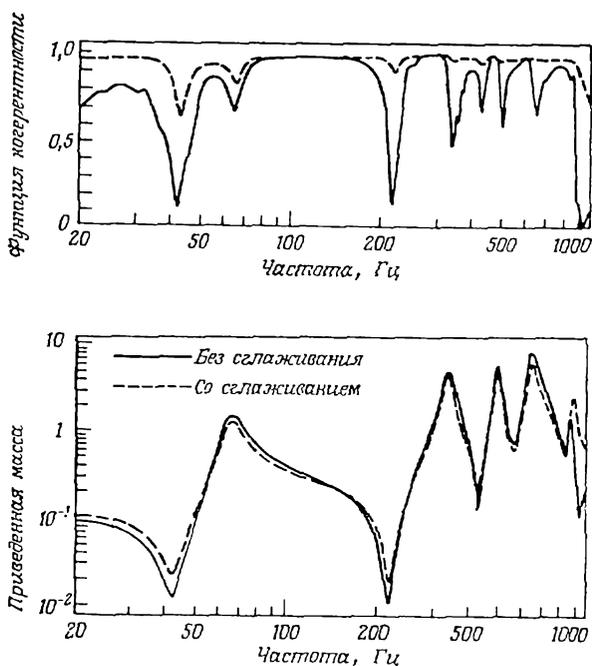


Рис. 5.10. Функция когерентности и амплитудная характеристика в эксперименте с панелью, вычисленные со сглаживанием и без него.

Разрешение по частоте  $B_e = 2$  Гц; число усреднений  $n_d = 256$ .

Спектральные оценки, которые использовались при построении графиков на рис. 5.8 и 5.9, были найдены с помощью обычного спектрального окна Ханна для подавления боковых лепестков (см. разд. 3.4.2). Для иллюстрации влияния, которое сглаживание может оказать на оценки частотной характеристики,  $|\hat{H}(f)|$  и  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  были вычислены заново при  $B_e = 2$  Гц, но с использованием прямоугольного временного окна (без сглаживания). На рис. 5.10 приведены результаты вычислений со сглаживанием и без него. Очевидно резкое увеличение впадин на графике  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ , соответствующих пикам и впадинам  $|H(f)|$ . Заметим далее, что  $|\hat{H}(f)|$  заметно изменилась. Это показы-

вает, что операция сглаживания существенно влияет на точность оценивания амплитудной характеристики, если оценивание проводится на пределе разрешения.

### 5.3. Предсказание реакции системы

Вернемся еще раз к системе с одним входом и одним выходом (рис. 5.1), и пусть теперь ее частотная характеристика  $H(f)$  известна или сделана ее оценка методами разд. 5.2. Предположим далее, что входной процесс  $x(t)$  известен или получена оценка его спектра  $G_{xx}(f)$ . Соотношения (4.3) и (4.8) позволяют найти ковариационную функцию и спектральную плотность реакции  $y(t)$ :

$$R_{yy}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h(\alpha) h(\beta) R_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta, \quad (5.50)$$

$$G_{yy}(f) = |H(f)|^2 G_{xx}(f). \quad (5.51)$$

Скоро мы покажем, что эти результаты легко обобщаются на системы с распределенными параметрами, если использовать классическое описание таких систем через их нормальные моды.

#### 5.3.1. Система с одной степенью свободы

Рассмотрим сначала простую демпфированную систему (с одной степенью свободы), состоящую из пружины и массы (рис. 1.8), в которой входной величиной  $x(t) = F(t)$  является сила, а выходной  $y(t)$  — смещение. Частотная характеристика системы задается формулой (1.54):

$$H(f) = \frac{1/k}{1 - (f/f_n)^2 + j2\zeta f/f_n}, \quad (5.52)$$

где

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \text{Собственная частота незатухающих колебаний}, \quad (5.53)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \text{Коэффициент затухания},$$

$m$ ,  $c$  и  $k$  — масса, коэффициент затухания и коэффициент жесткости пружины соответственно. Импульсная переходная функция системы находится как обратное преобразование Фурье выражения (5.52); при  $\zeta < 1$  она равна

$$h(\tau) = Ae^{-\zeta \omega_n \tau} \sin 2\pi f_d \tau, \quad \tau > 0, \quad (5.54)$$

где

$$\begin{aligned} f_d &= f_n \sqrt{1 - \zeta^2} = \text{Собственная частота затухающих колебаний,} \\ A &= 2\pi f_n^2 / k f_d = 2\pi f_n / k \sqrt{1 - \zeta^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, как следует из формул (5.50) и (5.51), ковариационная функция и спектральная плотность реакции системы  $y(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= A^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2\pi f_n \zeta (\alpha + \beta)} \times \\ &\quad \times \sin 2\pi f_d \alpha \sin 2\pi f_d \beta R_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (5.55)$$

$$G_{yy}(f) = \frac{G_{xx}(f)/k^2}{[1 - (f/f_n)^2]^2 + [2\zeta f/f_n]^2}. \quad (5.56)$$

Пусть, например, входной процесс  $x(t)$  есть реализация стационарного случайного процесса  $\{x(t)\}$  со спектральной плотностью  $G_{xx}(f) = G$  (константа). Тогда выражения (5.55) и (5.56) принимают вид

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= \frac{G\pi f_n e^{-2\pi f_n \zeta |\tau|}}{4\zeta k^2} \left( \cos 2\pi f_d \tau + \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin 2\pi f_d |\tau| \right) \approx \\ &\approx \frac{G\pi f_n e^{-2\pi f_n \zeta |\tau|}}{4\zeta k^2} \cos 2\pi f_n \tau \quad \text{при } \zeta \ll 1, \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$G_{yy}(f) = \frac{G/k^2}{[1 + (f/f_n)^2]^2 + [2\zeta f/f_n]^2}. \quad (5.58)$$

Графики всех этих входных и выходных функций вместе со схемой системы представлены на рис. 5.11. Суммарный средний квадрат реакции системы, согласно формуле (3.33), равен

$$\psi^2_y = R_{yy}(0) = \int_0^\infty G_{yy}(f) df = G\pi f_n / 4\zeta k^2. \quad (5.59)$$

В часто встречающейся ситуации, когда  $\zeta \ll 1$ , формулы (5.57) — (5.59) дают достаточно хорошие приближения реакции системы, если только  $G_{xx}(f) \approx G$  в полосе частот  $(1 - 6\zeta)f_n < f < (1 + 6\zeta)f_n$ .

### 5.3.2. Системы с распределенными параметрами

Способ предсказания реакции системы, развитый в предыдущем разделе, легко распространяется на произвольные системы с распределенными параметрами, подверженные распреде-

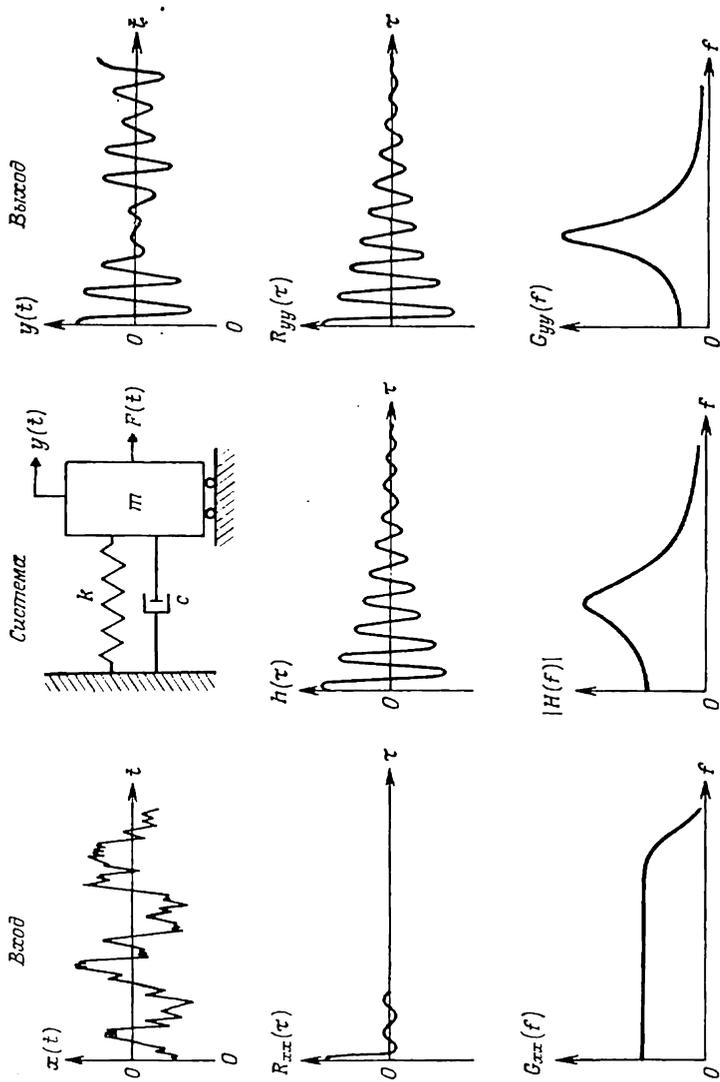


Рис. 5.11. Ковариационная функция и спектральная плотность входного и выходного процессов системы с одной степенью свободы.

ленному воздействию, если только такие системы можно описать через их нормальные моды, как это было сделано в разд. 1.3.4 в случае механических систем. Рассмотрим одномерную конструкцию, подверженную распределенному воздействию

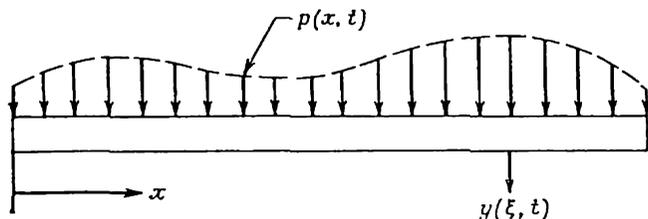


Рис. 5.12. Непрерывная конструкция с распределенным воздействием.

ствию  $p(x, t)$  (рис. 5.12). По формуле (1.60) реакция конструкции в любой точке  $\xi$  равна

$$y(\xi, t) = \sum_i \varphi_i(\xi) q_i(t), \quad i=1,2,3,\dots, \quad (5.60)$$

где  $\varphi_i(\xi)$  — форма  $i$ -й нормальной моды, а  $q_i(t)$  — обобщенная координата. Функция  $q_i(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M_i \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} + C_i \frac{dq_i(t)}{dt} + K_i q_i(t) = \int_0^l \varphi_i(x) p(x, t) dx, \quad (5.61)$$

где  $M_i$ ,  $C_i$ ,  $K_i$  — определенные в формуле (1.61) обобщенные масса, коэффициент затухания и коэффициент жесткости конструкции соответственно. Спектр реакции конструкции  $y(\xi, t)$  находится следующим образом. Финитное преобразование Фурье выражения (5.60) при достаточно большой длине реализации  $T$  дает

$$Y(\xi, f, T) = \int_0^T y(\xi, t) e^{-j2\pi f t} dt = \sum_i \varphi_i(\xi) Q_i(f, T), \quad (5.62)$$

где  $Q_i(f, T)$  — финитное преобразование Фурье  $q_i(t)$ . Аналогично находим финитное преобразование Фурье уравнения (5.61):

$$\begin{aligned} -(2\pi f)^2 M_i Q_i(f, T) + j(2\pi f) C_i Q_i(f, T) + K_i Q_i(f, T) = \\ = \int_0^l \varphi_i(x) P(x, f, T) dx, \end{aligned} \quad (5.63)$$

где  $P(x, f, T)$  — финитное преобразование Фурье  $p(x, t)$ . Тогда

$$Q_i(f, T) = H_i(f) \int_0^l \varphi_i(x) P(x, f, T) dx, \quad (5.64)$$

откуда после подстановки выражения (5.52) получаем

$$H_i(f) = \frac{1/K_i}{[1 - (f/f_i)^2 + j2\zeta_i f/f_i]}. \quad (5.65)$$

Заметим, что частотные характеристики  $H_i(f)$  для каждой нормальной моды,  $i=1, 2, 3, \dots$ , имеют такой же вид, как и  $H(f)$  системы с одной степенью свободы из формулы (5.52). Теперь, подставив выражение (5.64) в (5.62), получим

$$Y(\xi, f, T) = \sum_i \varphi_i(\xi) H_i(f) \int_0^l \varphi_i(x) P(x, f, T) dx. \quad (5.66)$$

Спектр выхода  $y(\xi, t)$  вычисляется по формуле (3.47):

$$G_{yy}(\xi, f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[Y^*(\xi, f, T) Y(\xi, f, T)]. \quad (5.67)$$

Подстановка выражения (5.66) дает

$$G_{yy}(\xi, f) = \sum_i \sum_k \varphi_i(\xi) \varphi_k(\xi) H_i^*(f) H_k(f) \times \\ \times \int_0^l \int_0^l \varphi_i(\alpha) \varphi_k(\beta) G_{p\alpha p\beta}(\alpha, \beta, f) d\alpha d\beta, \quad (5.68)$$

где

$$G_{p\alpha p\beta}(\alpha, \beta, f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} E[P^*(\alpha, f, T) P(\beta, f, T)] \quad (5.69)$$

есть взаимная спектральная плотность нагрузки  $p(x, t)$  в точках  $\alpha$  и  $\beta$ .

Соответствующим образом нормированный двойной интеграл в уравнении (5.68) называется *перекрестной функцией восприимчивости конструкции*. Обычно она записывается в виде

$$j_{ik}^2(f) = \frac{1}{l^2 G_r(f)} \int_0^l \int_0^l \varphi_i(\alpha) \varphi_k(\beta) G_{p\alpha p\beta}(\alpha, \beta, f) d\alpha d\beta, \quad (5.70)$$

где  $l$  — длина конструкции, а  $G_r(f)$  — исходный спектр плотности входной нагрузки. Тогда уравнение (5.68) переписывается следующим образом:

$$G_{yy}(\xi, f) = l^2 G_r(f) \sum_i \sum_k \varphi_i(\xi) \varphi_k(\xi) H_i^*(f) H_k(f) j_{ik}^2(f). \quad (5.71)$$

Член  $j^2_{ik}(f)$  представляет собой распределение по длине конструкции входного воздействия. Иногда (но не всегда) можно считать, что члены с  $i \neq k$  пренебрежимо малы. В этом случае

$$G_{yy}(\xi, f) = I^2 G_r(f) \sum_i \varphi_i^2(\xi) |H_i(f)|^2 j^2_i(f), \quad (5.72)$$

где

$$j^2_i(f) = \frac{1}{I^2 G_r(f)} \int_0^l \int_0^l \varphi_i(\alpha) \varphi_i(\beta) G_{p\alpha p\beta}(\alpha, \beta, f) d\alpha d\beta. \quad (5.73)$$

Часто разумно считать, что вход  $p(x, t)$  однороден (стационарен по пространству); тогда

$$j^2_i(f) = \frac{1}{I^2 G_r(f)} \int_0^l \int_0^l \varphi_i(\alpha) \varphi_i(\beta) G_{p\Delta\xi}(\Delta\xi, f) d\alpha d\beta, \quad (5.74)$$

где  $\Delta\xi = \alpha - \beta$ . Приведенные выше результаты при необходимости легко обобщить на случай двух и более измерений [5.3].

На практике часто прибегают к ряду дополнительных упрощений уравнения (5.68). Если на реакцию системы большое влияние оказывают моды высших порядков, которые при этом накладываются друг на друга и не могут быть точно определены аналитическим или экспериментальным путем, то в некоторых случаях удается применить метод статистического усреднения по пространству в узкой полосе частот (так называемый статистический энергетический анализ или процедура — СЭА) [5.4]. С эмпирической точки зрения анализ и предсказание реакции систем с распределенными параметрами сводится к анализу и предсказанию реакции многомерных систем, поскольку измерения проводятся не непрерывно, а в дискретных точках. Эти вопросы рассматриваются в гл. 8 и 10.

## ЛИТЕРАТУРА

- 5.1. Bendat J. S., Piersol A. G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]
- 5.2. Barnoski R. L. Ordinary Coherence Functions and Mechanical Systems, *AIJA Journal of Aircraft*, 6, No. 4, 372 (August 1969).
- 5.3. Wilby J. F. The Response of Simple Panels to Turbulent Boundary Layer Excitation, AFFDL-TR-67-70, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1967.
- 5.4. Lyon R. H. Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.

## Глава 6

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТРАКТОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛОВ

Ряд интересных задач, важных, в частности, для исследований по защите от акустического шума и вибраций, появляется при изучении распространения энергии из одной точки в другую по  $r$  трактам (рис. 6.1). В этом случае вычисление частотной характеристики, определяющей зависимость наблюдений на входе и выходе, позволяет правильно определить общую меру линейной связи между входной и выходной величинами, но не дает возможности оценить вклад отдельных трактов. Для решения таких задач в первую очередь необходимо четко различать дисперсное и бездисперсное распространения энергии, т. е. зависит ли скорость распространения энергии от частоты. Некоторые типы распространения энергии дисперсные; примерами могут служить волны на поверхности океана или же волны изгиба в конструкциях. Однако во многих других случаях процесс распространения энергии можно считать бездисперсным, например электромагнитное излучение и продольные волны (волны сжатия) в различных средах, в том числе в воздухе и воде (акустический шум).

#### 6.1. Анализ бездисперсного распространения сигнала при наличии входных и выходных данных

Предположим, что сигнал распространяется по бездисперсным трактам (рис. 6.1), т. е. скорость распространения по каждому тракту не зависит от частоты. Допустим, что амплитуд-

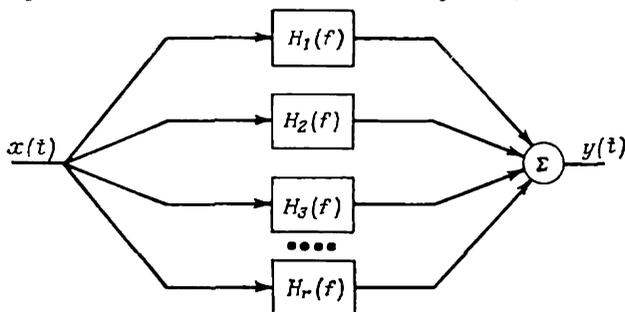


Рис. 6.1. Система с одним входом и одним выходом и с несколькими трактами.

ная характеристика каждого тракта равномерна и равна  $H_k$ ,  $k=1, 2, 3, \dots, r$ . Тогда стационарный эргодический входной процесс  $\{x(t)\}$  вызовет выходной процесс  $\{y(t)\}$  вида

$$y(t) = H_1 x(t - \tau_1) + H_2 x(t - \tau_2) + \dots + H_r x(t - \tau_r) = \\ = \sum_{k=1}^r H_k x(t - \tau_k). \quad (6.1)$$

### 6.1.1. Определение взаимной ковариации

Согласно формулам (3.16) и (3.18), взаимная ковариационная функция входного процесса  $x(t)$  и выходного процесса  $y(t)$ , задаваемого соотношением (6.1), равна

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) [H_1 x(t - \tau_1 + \tau) + H_2 x(t - \tau_2 + \tau) + \dots + \\ + H_r x(t - \tau_r + \tau)] dt = \sum_{k=1}^r H_k R_{xx}(\tau - \tau_k). \quad (6.2)$$

Иначе говоря, взаимная ковариационная функция  $x(t)$  и  $y(t)$  равна сумме функций, полученных сдвигом ковариационной функции  $x(t)$  на  $\tau_k$  и умножением на  $H_k$ . Поэтому, если запаздывания в отдельных трактах различаются настолько, что можно четко выделить отдельные пики, то по этим пикам можно определить время распространения по каждому тракту и величину переносимой по этому тракту энергии. Часто бывает известна и скорость распространения сигнала  $c_k$ ,  $k=1, 2, 3, \dots, r$ ; тогда просто определить длину каждого тракта:

$$d_k = c_k \tau_k, \quad k=1, 2, 3, \dots, r. \quad (6.3)$$

Расстояния, определяемые формулой (6.3), часто позволяют по известной геометрической картине найти, по какому именно физическому пути распространяется энергия.

Для иллюстрации этих принципов рассмотрим опыт, в котором звук распространяется по трем трактам (см. схему на рис. 6.2, а). Источник акустического шума — громкоговоритель, покрывающий полосу частот почти от нуля до 8000 Гц. На рис. 6.2, б приведен спектр снимаемого с микрофона выходного сигнала при отсутствии бокового и заднего отражателей. На рис. 6.3 изображены взаимные ковариационные функции входного и выходного процессов при различном расположении отражающих поверхностей. На рис. 6.3, а показана взаимная ковариационная функция при отсутствии отражателей. Как видно, пик приходится на  $\tau_1 = 2,0$  мс, что в точности равно времени,

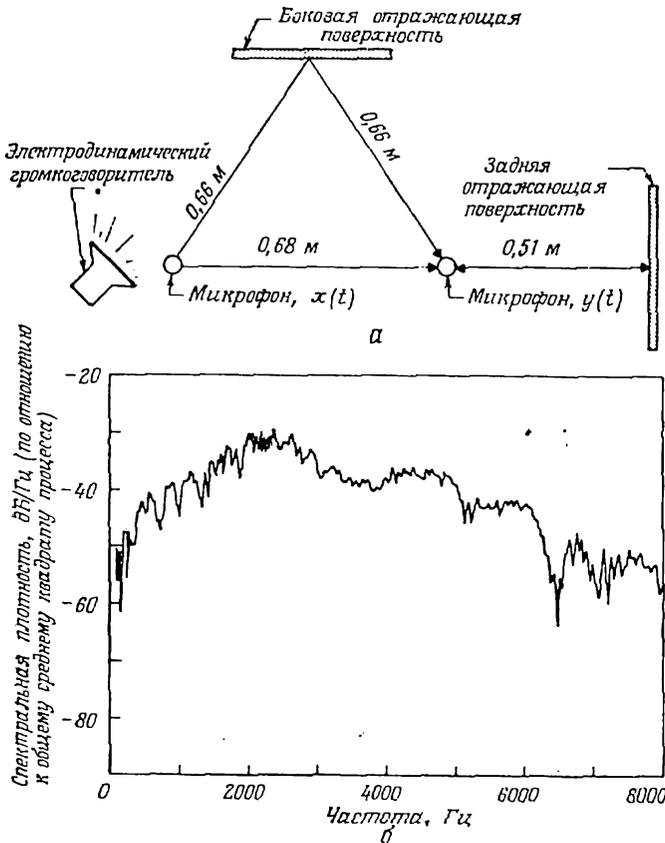


Рис. 6.2. Акустический эксперимент, в котором шум распространяется по нескольким трактам.

Разрешение по частоте  $\Delta \nu = 10$  Гц; число усреднений  $n_d = 256$ .

а — схема эксперимента; б — наблюдаемый спектр выходного сигнала при наличии только прямого тракта,  $\Delta \nu = 8000$  Гц.

которое требуется звуку для прохождения расстояния  $d_1 = 0,68$  м при скорости распространения звука в воздухе  $c \approx 340$  м/с. Заметим также, что вид ковариационной функции согласуется с теоретическим видом ковариационной функции ограниченного по частоте белого шума [см. формулу (3.63)].

На рис. 6.3, б показана взаимная ковариационная функция при наличии только бокового отражателя. Пик ковариации при  $\tau_1 = 2,0$  мс, соответствующий прямому тракту, остается без изменений, но появляется второй пик такого же вида при  $\tau_2 = 3,9$  мс, а это как раз равно времени прохождения отраженным от боковой поверхности сигналом расстояния  $d_2 = 1,32$  м.

Вклад отраженного шума больше, чем прямого, потому что громкоговоритель, обладающий определенным направленным действием, был повернут в сторону бокового отражателя. На рис. 6.3, в приведена взаимная ковариационная функция при наличии только заднего отражателя. Пик, соответствующий прямому пути, и на этот раз не изменился, а второй пик подобного вида появился при  $\tau_3 = 5,0$  мс, что соответствует общей длине пути, проходимого шумом, отраженным от задней поверхности,  $d_3 = 1,70$  м. Наконец, на рис. 6.3, г представлена взаимная ковариационная функция при наличии обоих отражателей. Отчетливо видны три пика, соответствующие трем отдельным трактам. Все оценки производились при  $n_d = 256$  усреднениях с разрешением по времени  $\tau_e = \Delta t = 0,012$  мс.

Из результатов разд. 3.3.1 следует, что при фиксированной разнице запаздываний пики взаимной ковариации, соответствующие отдельным трактам, выделяются тем труднее, чем уже полоса частот шума. Для иллюстрации этого вывода описанный выше эксперимент был повторен с использованием ненаправленного источника шума, полоса частот которого имела ширину  $\sim 800$  Гц с центральной частотой 1000 Гц. На рис. 6.4 изображена полученная в результате этого опыта взаимная ковариационная функция между сигналами, снимаемыми с входного и выходного микрофонов; при этом использовался только боковой отражатель. Из рисунка видно, что два тракта, которые четко выделялись при ширине спектра 8000 Гц (рис. 6.3, б), теперь едва различимы. В предельном случае, когда источник шума испускает гармоническое колебание, ковариационная функция каждого тракта есть косинусоида, задаваемая формулой (3.61), и выделение отдельных трактов вообще невозможно. Приблизительно можно считать, что если полоса частот выходного сигнала равна  $B$ , то для надежного выделения пиков ковариации, соответствующих отдельным трактам, запаздывания в любой паре трактов должны удовлетворять неравенству

$$|\tau_i - \tau_k| > 1/B, \quad i, k = 1, 2, 3, \dots, r. \quad (6.4)$$

Однако в некоторых случаях использование импульсных переходных функций позволяет проводить анализ с лучшим разрешением (см. разд 6.1.3).

### 6.1.2. Измерение взаимных спектров

Поскольку при анализе систем с несколькими трактами взаимная ковариационная функция позволяет выделить отдельные тракты, то ту же информацию можно извлечь и из ее преобразования Фурье, т. е. взаимной спектральной плотности.

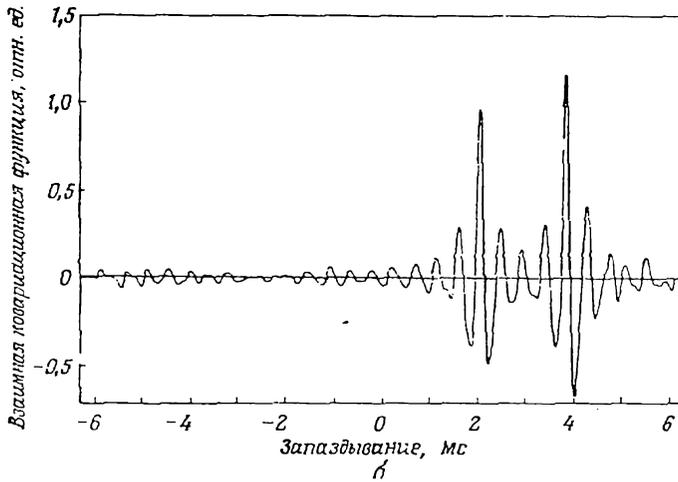
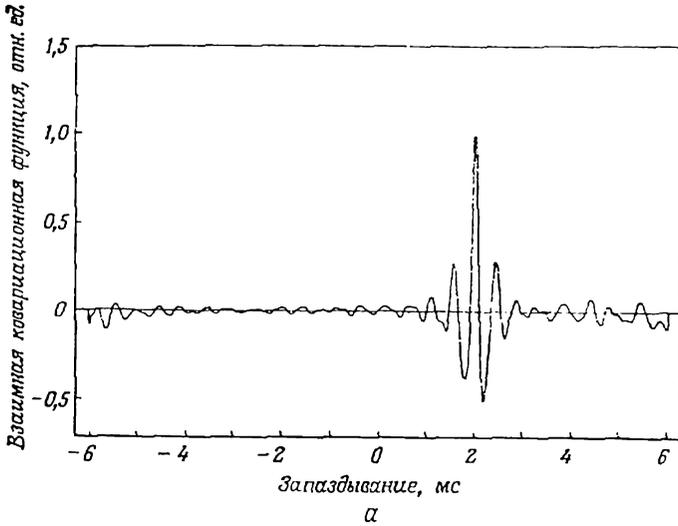


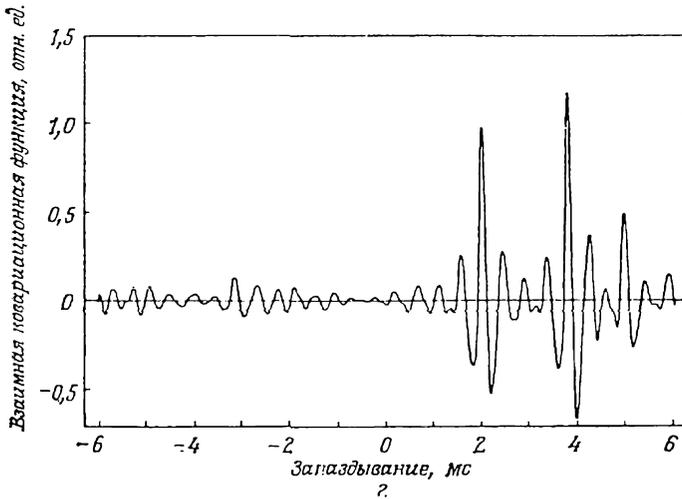
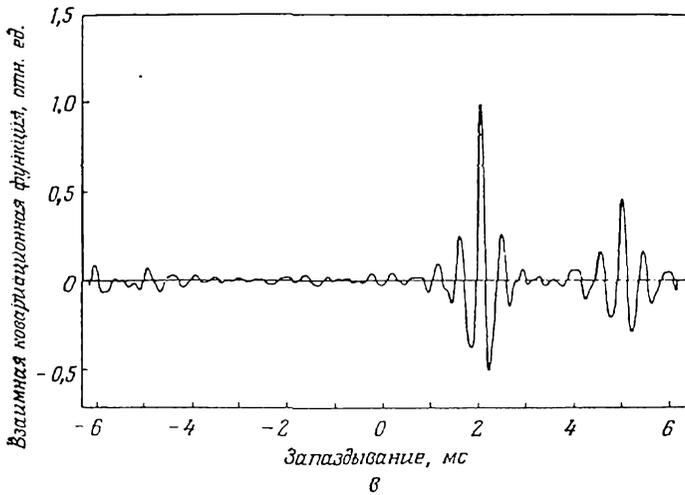
Рис. 6.3. Взаимная ковариационная функция в акустическом эксперименте с несколькими трактами при  $V=8000$  Гц.

Разрешение по времени  $\tau_e=0,012$  мс; число усреднений  $n_d=256$ .

*a* — при наличии только прямого тракта; *b* — при наличии отражения от боковой поверх-

Переход в формуле (6.2) к преобразованию Фурье дает

$$G_{xy}(f) = \sum_{k=1}^r H_k G_{xx}(f) e^{-i2\pi f \tau_k}, \quad (6.5)$$



ности;  $\epsilon$  — при наличии отражения от задней поверхности;  $\epsilon$  — при наличии отражений от задней и боковой поверхностей.

или с использованием полярных обозначений получаем

$$G_{xy}(f) = |G_{xy}(f)| e^{-j\theta_{xy}(f)}, \quad (6.6)$$

где

$$|G_{xy}(f)| = G_{xx}(f) \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r H_i H_k \cos 2\pi f (\tau_i - \tau_k) \right]^{1/2}, \quad (6.7)$$

$$\theta_{xy}(f) = \arctg \left( \frac{\sum_{k=1}^r H_k \sin 2\pi f \tau_k}{\sum_{k=1}^r H_k \cos 2\pi f \tau_k} \right). \quad (6.8)$$

Если сигнал проходит по одному тракту за время  $\tau_1$ , то

$$|G_{xy}(f)| = H_1 G_{xx}(f), \quad \theta_{xy}(f) = 2\pi f \tau_1. \quad (6.9)$$

Следовательно, как уже было показано в разд. 3.3.4, фазовый угол является линейной функцией частоты. Если сигнал рас-

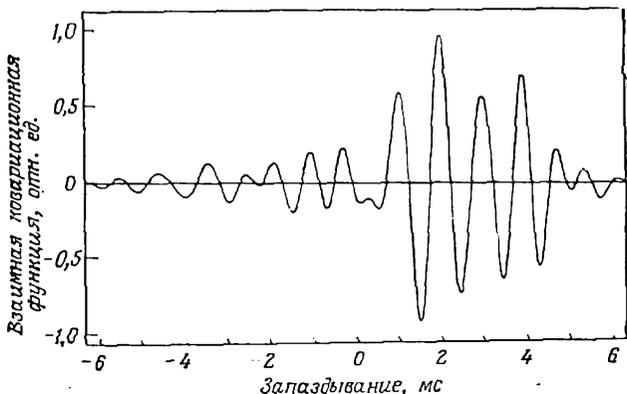


Рис. 6.4. Взаимная ковариационная функция в акустическом эксперименте с несколькими трактами при наличии отражения от боковой поверхности и  $B=800$  Гц.

Разрешение по времени  $\tau_e=0,012$  мс; число усреднений  $n_d=256$ .

пространяется по двум трактам за время  $\tau_1$  и  $\tau_2$  соответственно, то

$$|G_{xy}(f)| = G_{xx}(f) [H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2 \cos 2\pi f(\tau_2 - \tau_1)]^{1/2}, \quad (6.10)$$

$$\theta_{xy}(f) = \arctg \left[ \frac{H_1 \sin 2\pi f \tau_1 + H_2 \sin 2\pi f \tau_2}{H_1 \cos 2\pi f \tau_1 + H_2 \cos 2\pi f \tau_2} \right].$$

Из равенств (6.10) следует, что в случае двух трактов модуль взаимного спектра отражает наличие взаимного влияния трактов, которое выражается в появлении значительных провалов на его графике, равноотстоящих друг от друга на расстояние

$$\Delta f = 1/(\tau_2 - \tau_1); \quad (6.11)$$

первый провал соответствует частоте  $f = \Delta f/2$ . Из соотношения (6.10) следует также, что фаза взаимного спектра — пилообразная функция, причем наклон отдельных ее звеньев зависит от частоты.

Для определения функции когерентности между входным процессом  $x(t)$  и выходным процессом  $y(t)$  нужно сначала найти спектр выхода  $y(t)$ , задаваемого формулой (6.1). Преобра-

зования, подобные использованным при получении выражений (6.2) и (6.5), позволяют найти, что

$$R_{yy}(\tau) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r H_i H_k R_{xx}(\tau + \tau_i - \tau_k), \quad (6.12)$$

$$G_{yy}(f) = G_{xx}(f) \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^r H_i H_k \cos 2\pi f(\tau_i - \tau_k). \quad (6.13)$$

Используя выражения (6.7) и (6.13), находим, что в случае нескольких трактов функция когерентности входного и выходного процессов равна

$$\gamma_{xy}^2(f) = |G_{xy}(f)|^2 / G_{xx}(f) G_{yy}(f) = 1 \quad (6.14)$$

для всех частот независимо от числа трактов. Этот результат следовало ожидать. При линейном распространении сигнала и отсутствии постороннего шума процесс  $y(t)$  обусловлен исключительно процессом  $x(t)$ , поэтому выход должен быть полностью когерентным с  $x(t)$  независимо от числа трактов распространения входного процесса. Однако заметим, что в некоторых особых многомерных случаях функция когерентности входного и выходного процессов бывает меньше единицы даже при линейном распространении и отсутствии постороннего шума. Это явление связано с реверберацией и будет рассмотрено в разд. 7.3.4.

Чтобы проиллюстрировать применение спектральных методов к задачам бездисперсного распространения сигнала по нескольким трактам, обратимся еще раз к эксперименту, схема которого изображена на рис. 6.2; ширина спектра источника равна 3500 Гц. На рис. 6.5 приведены функции когерентности и фазовый угол, вычисленные между входным и выходным микрофонами при отсутствии отражающих поверхностей (а) и наличии только боковой отражающей поверхности (б). Если процесс распространяется только по прямому тракту (рис. 6.5, а), то фазовая характеристика представляет собой пилообразную функцию, отдельные звенья которой хорошо описываются уравнением  $\theta_{xy}(f) = 0,004 \pi f$  в соответствии с формулой (6.9) при времени распространения  $\tau_1 = 2,0$  мс. Функция когерентности почти точно равна единице на всех частотах, как и должно быть по формуле (6.14), за исключением частот ниже 200 Гц, на которых акустический источник слаб и подавляется фоновыми шумами.

В случае двух трактов (рис. 6.5, б) фазовая характеристика — пилообразная функция более сложного вида в соответствии с формулой (6.10) при  $\tau_1 = 2,0$  мс и  $\tau_2 = 3,9$  мс. Функция когерентности и в этом случае равна единице на большинстве

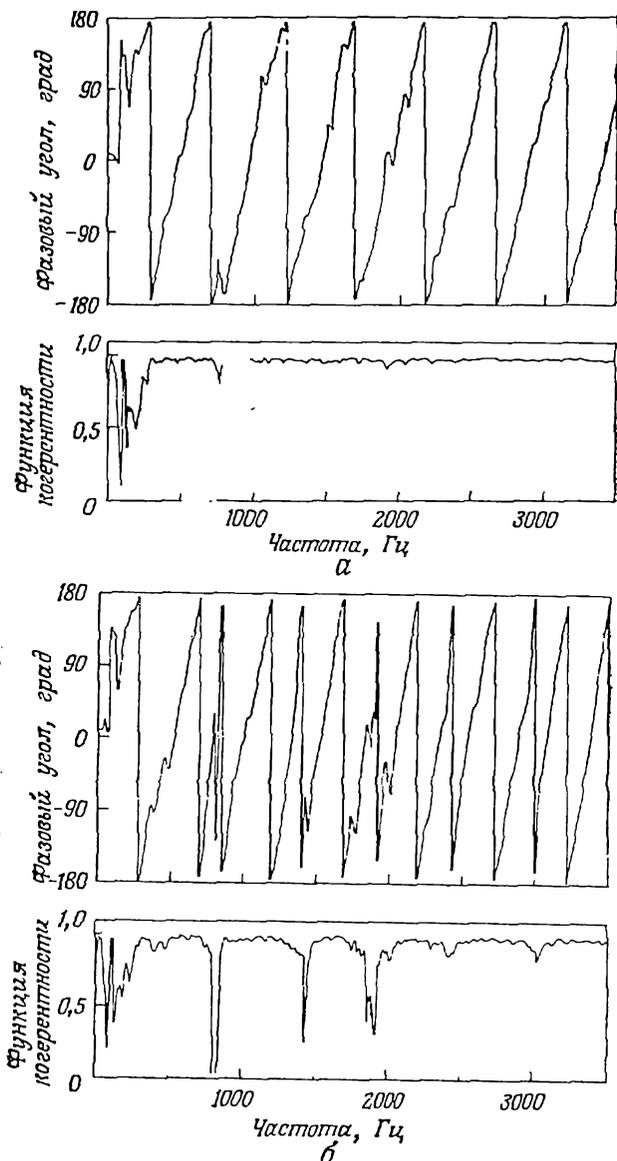


Рис. 65. Функция когерентности и фазовый угол в акустическом эксперименте с несколькими трактами при  $B=3500$  Гц.

Разрешение по частоте  $B_p=8$  Гц; число усреднений  $n_d=256$ .

а — при наличии только прямого тракта; б — при наличии отражения от боковой поверхности.

частот выше 200 Гц в соответствии с формулой (6.14). Провалы функции когерентности на некоторых частотах объясняются взаимным влиянием трактов при измерении взаимного спектра [см. формулу (6.11)]. Хотя теоретически функция когерентности должна равняться единице на всех частотах, в действительности взаимное влияние трактов приводит к подавлению на некоторых частотах измерений взаимного спектра фоновым шумом и вызывает уменьшение функции когерентности. Появление таких ложных провалов на графике функции когерентности часто наблюдается на практике и будет еще рассматриваться в гл. 7.

Сравнив спектральные оценки рис. 6.5 с соответствующими ковариационными оценками рис. 6.3, легко понять, почему при анализе бездисперсного распространения сигнала по нескольким трактам шире используются корреляционные методы. Во взаимном спектре содержится та же информация, но визуально ее намного труднее извлечь.

### 6.1.3. Измерение импульсной переходной функции

В разд. 6.1.1 уже отмечалось, что выделение отдельных трактов распространения сигнала взаимно-ковариационными методами значительно усложняется с уменьшением спектральной ширины процесса вследствие размазывания пиков ковариационной функции. На практике, когда входной процесс вводится искусственно, улучшить качество идентификации можно простым увеличением до максимально возможной величины ширины спектра входного процесса. Однако во многих практических случаях входной процесс имеет естественное происхождение и не может быть изменен. Тем не менее если спектральная ширина входного процесса велика, но его мощность концентрируется в одной или нескольких узких полосах, то использование импульсной переходной функции вместо взаимной ковариационной функции позволяет добиться лучшего выделения отдельных ковариационных пиков.

Импульсная переходная функция  $h(\tau)$  была определена в формуле (1.45) как обратное преобразование Фурье частотной характеристики, т. е.

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (6.15)$$

Формула (5.1) дает оптимальную оценку частотной характеристики

$$H(f) = G_{xy}(f)/G_{xx}(f) = S_{xy}(f)/S_{xx}(f). \quad (6.16)$$

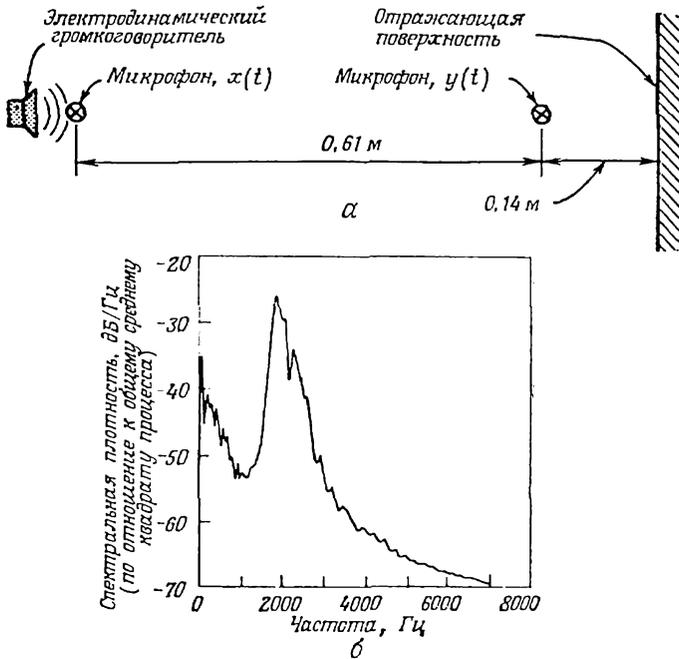


Рис. 6.6. Акустический эксперимент с двумя трактами.  
Разрешение по частоте  $B_e = 30$  Гц; число усреднений  $n_d = 100$ .  
а — схема эксперимента; б — наблюдаемый спектр выходного процесса.

Поэтому из выражения (6.15) следует, что

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{xy}(f)}{S_{xx}(f)} e^{j2\pi f\tau} df. \quad (6.17)$$

Но по формуле (3.37) взаимная ковариационная функция процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  равна

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df. \quad (6.18)$$

Сравнение (6.17) и (6.18) показывает, что импульсная переходная функция совпадает со взаимной ковариационной функцией, если входной процесс  $x(t)$  имеет равномерную спектральную плотность  $S_{xx}(f) = 1$ . Вычисляя импульсную переходную функцию, находим взаимную ковариационную функцию при равномерной спектральной плотности входного процесса. Следовательно, вычисляя импульсную переходную функцию, мы предварительно выбеливаем входной процесс по всей ширине

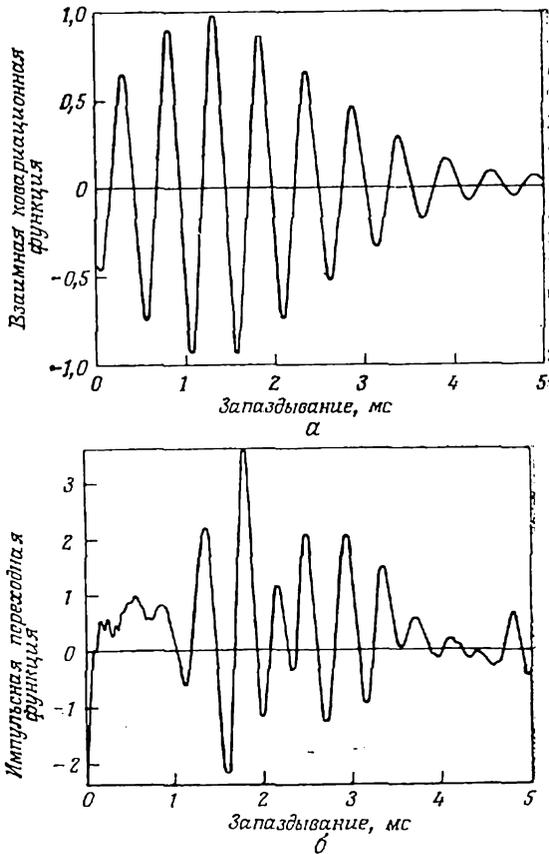


Рис. 6.7. Результаты акустического эксперимента с двумя трактами.  
 Разрешение по времени  $\tau_p = 0,015$  мс; число усреднений  $n_d = 100$ .  
 а — взаимная ковариационная функция; б — импульсная переходная функция.

его спектра, что в некоторых случаях способствует лучшему определению отдельных трактов распространения сигнала.

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим простой акустический эксперимент, схема которого приведена на рис. 6.6, а. Громкоговоритель излучает случайный шум со спектральной шириной 10 000 Гц, который фильтруется таким образом, что мощность его концентрируется в полосе шириной 450 Гц с центром на частоте 2000 Гц. Спектр выходного сигнала изображен на рис. 6.6, б. Акустический шум достигает микрофона по прямому тракту за  $\tau_1 = 0,61/c = 1,8$  мс, если скорость звука принять равной  $c = 340$  м/с. Отражение от расположенной за микрофоном поверхности приводит к появлению еще одного тракта, причем время распространения по нему  $\tau_2$  равно  $0,89/c = 2,6$  мс.

Графики наблюдаемых взаимной ковариационной и импульсной переходной функций для сигнала  $x(t)$ , излучаемого громкоговорителем, и выходного сигнала микрофона  $y(t)$  приведены на рис. 6.7. График на рис. 6.7, а близок к теоретическому виду ковариационной функции идеального узкополосного шума, определяемой формулой (3.65). Однако по виду огибающей ковариационной функции никак нельзя догадаться о существовании двух трактов распространения сигнала. В то же время эти два тракта отчетливо выделяются по графику импульсной переходной функции на рис. 6.7, б. Более того, ее огибающая достигает максимума при точных значениях запаздывания  $\tau_1 = 1,8$  мс и  $\tau_2 = 2,6$  мс.

Применение импульсных переходных функций к решению задач такого рода часто ограничивается малым отношением сигнала к шуму при измерении входного сигнала  $x(t)$ . Если  $x(t)$  действительно представляет собой узкополосный сигнал, сосредоточенный в полосе частот  $f_0 - B/2 \leq f \leq f_0 + B/2$ , то наблюдения вне этой полосы будут просто посторонним шумом, и применение импульсной переходной функции не даст никаких преимуществ по сравнению с ковариационным методом. Описанный метод будет эффективным, если  $x(t)$  превышает фоновый шум в полосе частот, значительно более широкой, чем та, в которой концентрируется основная часть энергии процесса. Более того, если спектральная ширина процесса  $y(t)$  определяется видом частотной характеристики тракта сигнала, а не спектральной шириной входного сигнала, то и в этом случае использование импульсных переходных функций не даст никаких преимуществ по сравнению со взаимно-ковариационным анализом.

#### 6.1.4. Практические соображения

Целый ряд причин помимо уже перечисленных ограничивают применение взаимно-ковариационного и взаимно-спектрального методов к задачам идентификации трактов. Главные из них — это а) существенный шум в измерениях на входе и (или) выходе и б) рассеяние. Сложность вычислений, необходимых для выделения пиков взаимной ковариации, идентифицирующих отдельные тракты распространения сигнала, резко увеличивается с ростом числа трактов и (или) внешнего шума. Из гл. 3 известно, что

$$\sum_{k=1}^r \rho_{xy}^2(d_k/c_k) = 1, \quad (6.19)$$

где  $\rho_{xy}(d_k/c_k)$  — значения нормированной корреляционной функции, соответствующие отдельным трактам. Поэтому эти значе-

ния уменьшаются с ростом числа трактов  $r$ . Кроме того, присутствие на входе и (или) на выходе внешнего шума со среднеквадратичными отклонениями  $\sigma_m$  и  $\sigma_n$  соответственно еще больше уменьшает значения нормированной корреляционной функции, так как в этом случае  $\rho_{xy}(d_k/c_k)$  нужно разделить на величину

$$[1 + (\sigma_n/\sigma_y)^2 + (\sigma_m/\sigma_x)^2 + (\sigma_n/\sigma_y)^2 (\sigma_m/\sigma_x)^2]^{1/2}. \quad (6.20)$$

Следовательно, идентификация нескольких трактов распространения сигнала при значительном входном или выходном шуме требует поиска сравнительно небольших пиков.

Далее из гл. 3 следует, что присутствие внешнего шума в наблюдениях на входе и выходе приводит к случайным ошибкам оценивания корреляции. В частности, по табл. 3.2 нормированная случайная ошибка оценки  $\hat{R}_{xy}(\tau)$  равна

$$\varepsilon[\hat{R}_{xy}(\tau)] = \{[1 + \rho_{xy}^2(\tau)]/Nn_d\}^{1/2}, \quad (6.21)$$

где  $\hat{R}_{xy}(\tau)$  вычисляется по формулам (3.84)–(3.88). Приближенно можно считать, что пик ковариационной функции можно обнаружить, если он по величине по крайней мере в три раза больше среднеквадратичного отклонения случайной ошибки, т. е.

$$\varepsilon[\hat{R}_{xy}(\tau)] \leq 1/3. \quad (6.22)$$

Поэтому для обнаружения ковариационного максимума величиной, скажем,  $\rho_{xy}(\tau) = 0,10$  требуется наблюдений  $Nn_d$  не меньше, чем

$$Nn_d = [1 + \rho_{xy}^2(\tau)]/\varepsilon^2 [\hat{R}_{xy}(\tau)] \geq 909.$$

Заметим, что  $n_d$  может равняться единице, если только  $N$  достаточно велико.

Вспомним теперь, что соотношение (6.2) было выведено в предположении, что амплитудная характеристика каждого бездисперсного тракта равномерна. Это в свою очередь приводит к тому, что форма пиков ковариационной функции определяется видом ковариационной функции входного процесса  $x(t)$ . В более общем случае неравномерной частотной характеристики  $|H_k(f)|$  каждого тракта выражение (6.18) через  $G_{xy}(f)$  и комплексно сопряженную величину  $G_{yx}^*(f)$  записывается следующим образом:

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{yx}^*(f) e^{-j2\pi f\tau} df, \quad (6.23)$$

а формула (6.5) преобразуется к виду

$$G_{xy}(f) = \sum_{k=1}^r H_k(f) G_{xx}(f) e^{-j2\pi f \tau_k}. \quad (6.24)$$

Поэтому для нахождения  $G_{xy}(f)$  нужно знать  $H_k(f)$  полностью, т. е. и амплитудную, и фазовую характеристики. Следовательно, пики ковариационной функции будут иметь форму, определяемую входным процессом  $x(t)$  со спектральной плотностью  $|H_k(f)|G_{xx}(f)$ , а не  $G_{xx}(f)$ . Поэтому, даже если  $x(t)$  является идеальным белым шумом, пики ковариационной функции будут иметь форму, соответствующую узкополосному шуму, если только такой вид имеет амплитудная характеристика этого тракта. Неравномерность амплитудной характеристики может существенно растянуть пики ковариационной функции и серьезно ухудшить разрешающую способность взаимно-ковариационных методов для задач идентификации трактов. Заметим, что использование импульсных переходных функций (разд. 6.1.3) также не позволяет преодолеть трудности такого рода. Но, с другой стороны, свойство неравномерных амплитудных характеристик влиять на форму ковариационных максимумов позволяет строить оценки частотных характеристик (см. разд. 6.4).

Рассеяние, препятствия и неоднородности на пути распространения сигнала приводят к появлению отражений под различными углами или к существенному изменению направления распространения потока энергии. Эти факторы, как правило, смазывают пики, уменьшают их величину и могут даже стать причиной появления максимумов на ложных позициях. К любым аномалиям на пути распространения сигнала следует относиться осторожно. Например, существенное влияние на распространение акустического шума в воздухе могут оказать турбулентность или порывы ветра на его пути.

## 6.2. Анализ бездисперсного распространения сигналов при наличии только выходных данных

При анализе распространения сигналов по нескольким трактам иногда оказывается невозможным измерение входного процесса  $x(t)$ . В таких случаях все-таки можно получить некоторую информацию, анализируя только выходной процесс  $y(t)$ .

### 6.2.1. Измерение ковариационной функции

Обратимся снова к задаче распространения сигнала по нескольким трактам (рис. 6.1). Если сигнал распространяется по  $r$  бездисперсным трактам с равномерными частотными характе-

ристиками  $H_k$ ,  $k=1, 2, 3, \dots, r$ , то выходной процесс задается выражением (6.1). Ковариационная функция  $y(t)$  вычисляется по формуле (6.12), которую можно переписать следующим образом:

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) \sum_{k=1}^r H_k^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^r H_i H_k R_{xx}(\tau + \tau_i - \tau_k). \quad (6.25)$$

Другими словами, ковариационная функция процесса  $y(t)$  равна сумме функций, полученных сдвигом ковариационной функции процесса  $x(t)$  на  $\Delta\tau = \tau_i - \tau_k$  симметрично относительно  $\tau = 0$  и умножением на  $H_i H_k$  при  $i \neq k$ ,  $i, k = 1, 2, 3, \dots, r$ . Поэтому, хотя абсолютные значения времен распространения получить нельзя, можно определить их разности.

Для иллюстрации этого вывода еще раз рассмотрим акустический эксперимент, в котором шум проходит по трем трактам (рис. 6.2). На рис. 6.8 изображены графики ковариационной функции выходного процесса  $y(t)$ , вычисленной при различном положении отражающих поверхностей и спектральной ширине входа  $B = 8000$  Гц. Из формулы (6.25) следует, что если шум распространяется только по прямому тракту, то ковариационная функция выходного процесса  $y(t)$  имеет вид

$$R_{yy}(\tau) = H_1^2 R_{xx}(\tau), \quad (6.26)$$

что в точности соответствует рис. 6.8, а при  $H_1 = 1$ . Если есть только боковое отражение, то

$$R_{yy}(\tau) = (H_1^2 + H_2^2) R_{xx}(\tau) + H_1 H_2 R_{xx}(\tau + \tau_1 - \tau_2) + H_2 H_1 R_{xx}(\tau + \tau_2 - \tau_1), \quad (6.27)$$

где  $\tau_1 - \tau_2 = -1,9$  мс и  $\tau_2 - \tau_1 = 1,9$  мс. Этот теоретический результат согласуется с данными эксперимента на рис. 6.8, б. Если есть отражение только от задней поверхности, то следует ожидать, что

$$R_{yy}(\tau) = (H_1^2 + H_3^2) R_{xx}(\tau) + H_1 H_3 R_{xx}(\tau + \tau_1 - \tau_3) + H_3 H_1 R_{xx}(\tau + \tau_3 - \tau_1), \quad (6.28)$$

где  $\tau_1 - \tau_3 = -3$  мс и  $\tau_3 - \tau_1 = 3$  мс. Снова обнаруживаем согласие с экспериментальным результатом на рис. 6.8, в. Наконец, если имеются обе отражающие поверхности, то, согласно формуле (6.25), выражение для ковариационной функции состоит из семи членов:

$$R_{yy}(\tau) = (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) R_{xx}(\tau) + H_1 H_2 R_{xx}(\tau + \tau_1 - \tau_2) + H_2 H_1 R_{xx}(\tau + \tau_2 - \tau_1) + H_1 H_3 R_{xx}(\tau + \tau_1 - \tau_3) + H_3 H_1 R_{xx}(\tau + \tau_3 - \tau_1) + H_2 H_3 R_{xx}(\tau + \tau_2 - \tau_3) + H_3 H_2 R_{xx}(\tau + \tau_3 - \tau_2), \quad (6.29)$$

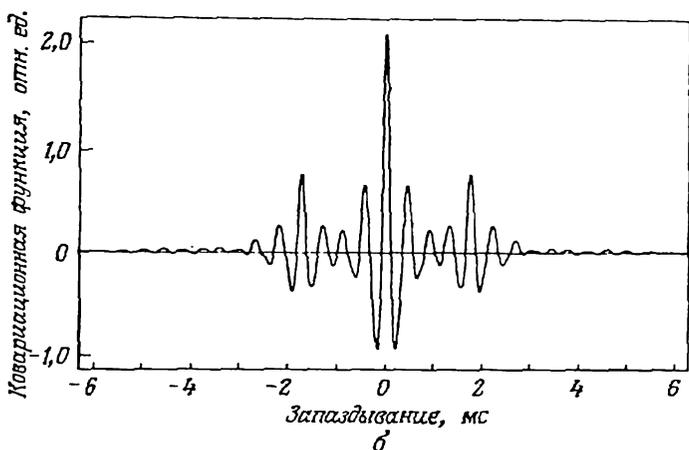
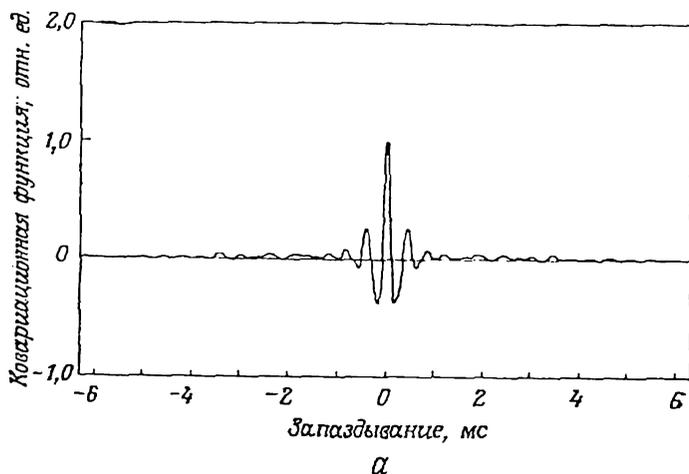


Рис. 6.8. Ковариационная функция в акустическом эксперименте с несколькими трактами (рис. 6.2) при  $V=8000$  Гц.

Разрешение по времени  $\tau_e=0,012$  мс; число усреднений  $n_d=256$ .

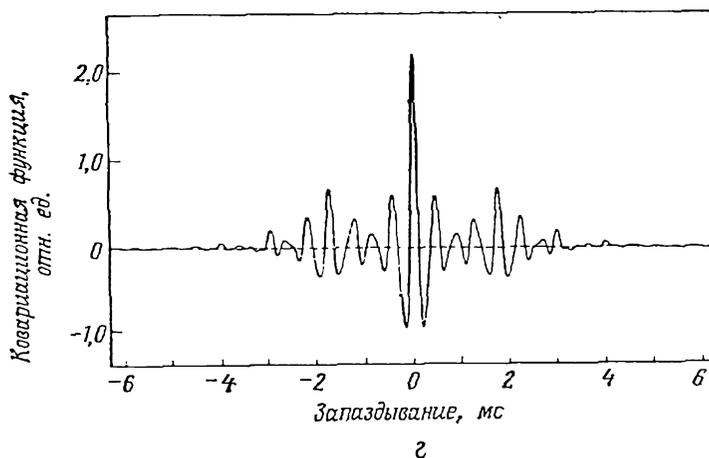
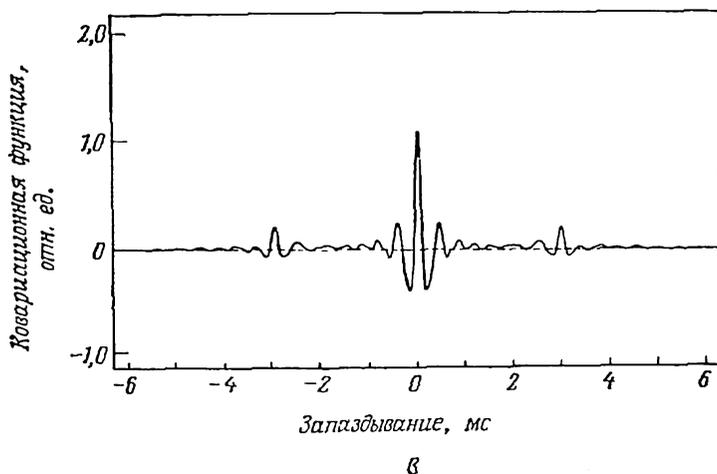
*a* — при наличии только прямого тракта; *б* — при наличии отражения от боковой поверх-

где

$$\tau_1 - \tau_2 = -1,9 \text{ мс}, \quad \tau_1 - \tau_3 = -3,0 \text{ мс}, \quad \tau_2 - \tau_3 = -1,1 \text{ мс},$$

$$\tau_2 - \tau_1 = 1,9 \text{ мс}, \quad \tau_3 - \tau_1 = 3,0 \text{ мс}, \quad \tau_3 - \tau_2 = 1,1 \text{ мс}.$$

На рис. 6.8, *б* боковые пики при  $\tau = \pm 1,9$  мс видны очень хорошо, при  $\tau = \pm 3$  мс едва различимы, а при  $\tau = \pm 1,1$  мс вообще исчезают. Дело, разумеется, в том, что ширина спектра недо-



ности; 8 — при наличии отражения от задней поверхности; 9 — при наличии отражений от боковой и задней поверхностей.

статочна для правильного разделения всех разностей между временами распространения, встречающимися в эксперименте. Требования к разрешающей способности здесь еще более жесткие, чем при взаимно-ковариационном анализе (см. рис. 6.3, 9), так как в последнем случае не появляются максимумы при сдвигах времени, равных разностям времен распространения отраженных сигналов, т. е. отсутствуют максимумы при  $\tau = \pm |\tau_2 - \tau_3|$ .

### 6.2.2. Измерение спектра

Перейдем теперь к спектральной плотности выходного процесса  $y(t)$  при бездисперсном распространении сигнала (рис. 6.1). Спектр  $y(t)$ , полученный в формуле (6.13) как преобразование Фурье коварчационной функции, может быть записан в следующем виде:

$$G_{yy}(f) = G_{xx}(f) \left[ \sum_{k=1}^r H_k^2 + \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{k=1 \\ i \neq k}}^r H_i H_k \cos 2\pi f(\tau_i - \tau_k) \right]. \quad (6.30)$$

Из этой формулы видно, что спектр процесса  $y(t)$  отражает взаимодействие трактов в виде больших интерференционных провалов, расположенных на расстоянии

$$\Delta f_{ik} = 1/|\tau_i - \tau_k|, \quad i \neq k = 1, 2, 3, \dots, r, \quad (6.31)$$

друг от друга. На рис. 6.9 показаны спектры выходного процесса  $y(t)$ , вычисленные по данным того же акустического эксперимента (рис. 6.2) при различном положении отражающих поверхностей. При отсутствии отражений спектр  $y(t)$ , согласно формуле (6.30), равен просто (рис. 6.9, а)

$$G_{yy}(f) = H_1^2 G_{xx}(f). \quad (6.32)$$

Когда добавляется боковое отражение, формула (6.30) дает величину

$$G_{yy}(f) = G_{xx}(f) [H_1^2 + H_2^2 + 2H_1 H_2 \cos 2\pi f(\tau_2 - \tau_1)], \quad (6.33)$$

равную сумме спектров трактов плюс интерференционные провалы, следующие через

$$\Delta f_{12} = 1/(\tau_2 - \tau_1) \approx 530 \text{ Гц.}$$

Если добавлено отражение только от задней поверхности, то результат будет тот же, только вместо  $H_2$  и  $\tau_2$  надо подставить  $H_3$  и  $\tau_3$  соответственно, т. е. интерференционные провалы следуют через

$$\Delta f_{13} = 1/(\tau_3 - \tau_1) \approx 330 \text{ Гц.}$$

Эти теоретические результаты подтверждаются экспериментальными спектрами рис. 6.9, б и в соответственно. Наконец, при наличии обеих отражающих поверхностей формула (6.30) дает

$$G_{yy}(f) = G_{xx}(f) [H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + 2H_1 H_2 \cos 2\pi f(\tau_2 - \tau_1) + 2H_1 H_3 \cos 2\pi f(\tau_3 - \tau_1) + 2H_2 H_3 \cos 2\pi f(\tau_3 - \tau_2)], \quad (6.34)$$

откуда следует, что выходной спектр равен сумме спектров трех трактов и результата интерференции, включающей три

составляющих с провалами, следующими соответственно через

$$\Delta f_{12} \approx 530 \text{ Гц}, \quad \Delta f_{13} \approx 330 \text{ Гц}, \quad \Delta f_{23} \approx 910 \text{ Гц}.$$

Экспериментальные результаты на рис. 6.9, *г* указывают на наличие сложной интерференционной картины, но выделить отдельные составляющие, идентифицирующие отдельные тракты: прохождения сигнала, невозможно.

### 6.2.3. Практические соображения

Многочисленные трудности, которые встречаются при взаимно-ковариационном и взаимно-спектральном анализе (см. разд. 6.1.4), в полной мере проявляются и при использовании ковариационных и спектральных методов, но в последних случаях наличие внешнего шума на выходе создает еще больше проблем. При взаимно-ковариационном анализе внешний шум на входе или выходе уменьшает относительный вклад отдельных пиков ковариации и увеличивает случайную ошибку, но не приводит к искажению или смещению результатов. В то же время при ковариационном анализе шум на выходе  $n(t)$  складывается непосредственно с интересующим нас выходным сигналом  $v(t)$ , т. е.

$$y(t) = v(t) + n(t), \quad R_{yy}(\tau) = R_{vv}(\tau) + R_{nn}(\tau). \quad (6.35)$$

Следовательно, шум на выходе смещает  $R_{yy}(\tau)$  и может скрыть пики, соответствующие разностям времен распространения сигналов. То же можно сказать и о спектральных оценках.

Даже при отсутствии шума в наблюдениях выходного сигнала ковариационные и спектральные методы представляют собой весьма плохое средство для решения задачи идентификации трактов. Вычисляя ковариационную функцию или спектр, можно обнаружить наличие двух трактов и определить разницу времен распространения по ним от источника до места измерения выходного процесса. Однако идентификация отдельных трактов становится значительно сложнее, если таких трактов три или больше. Конечно, в некоторых случаях можно применить специализированный анализ и тем самым улучшить качество определения разностей времен распространения. Например, преобразование Фурье выходного спектра (так называемый кепстр<sup>1)</sup>) превращает отдельные интерференционные составля-

<sup>1)</sup> Кепстр (Cepstrum) — преобразование Фурье логарифма спектральной плотности стационарного случайного процесса. Эта функция применяется при анализе процессов, содержащих отраженные сигналы. Более подробно см. Bogert B. P., Healy M. J. R., Tukey J. W. The Quefrency Analysis of Time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Autocovariance, Cross-cepstrum and Sape-Cracking, Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis by Rosenblatt M. (Ed.), Wiley, No. 4, 1963, pp. 209—243. — *Прим. перев.*

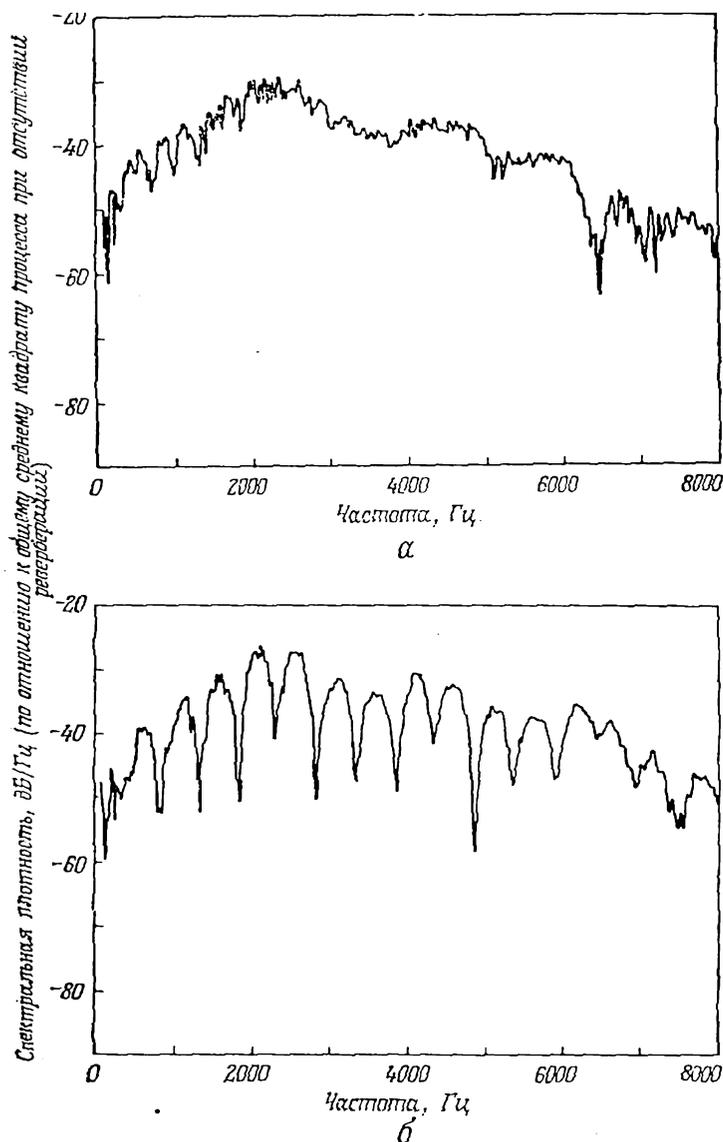
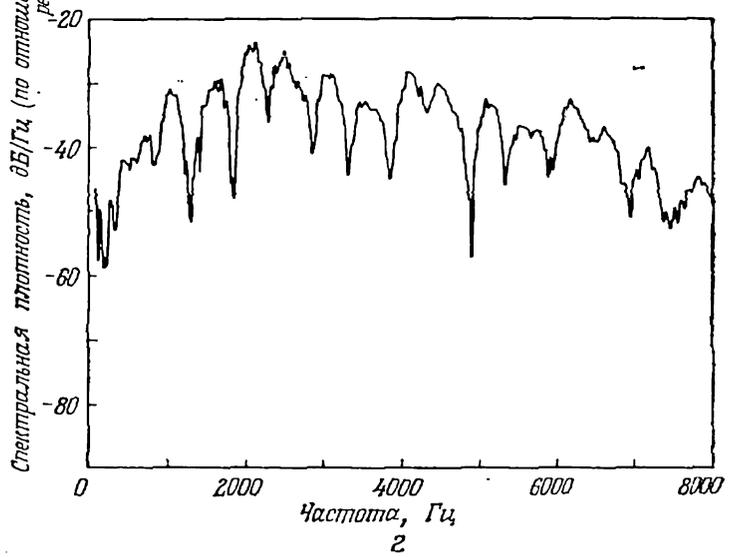
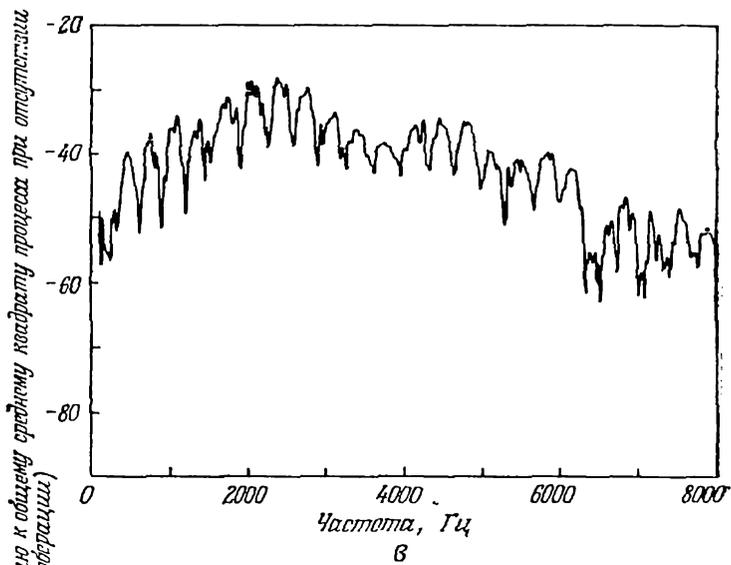


Рис. 6.9. Спектры в акустическом эксперименте с несколькими трактами (рис. 6.2) при  $B=8000$  Гц.

Разрешение по частоте  $B_c=10$  Гц; число усреднений  $n_d=256$ .

*а* — при наличии только прямого тракта; *б* — при наличии отражения от боковой поверх-



ности; в — при наличии отражения от задней поверхности; г — при наличии отражения от боковой и задней поверхностей.

ющие в спектральные пики на частотах  $\Delta f_{ik} = 1/|\tau_i - \tau_k|$ ,  $i \neq k = 1, 2, 3, \dots, r$ , которые затем значительно легче идентифицировать.

В тех случаях, когда энергия, распространяющаяся по различным трактам, приходит в место наблюдения по различным направлениям, как обычно и бывает при анализе акустического шума и электромагнитного излучения, отдельные тракты часто можно изолировать, используя для измерения выходного сигнала узконаправленные приемники — системы микрофонов или антенны. В других случаях, когда примерные значения времен распространения по различным возможным трактам известны, можно строить эмпирические кривые обычными методами регрессионного анализа. Дополнительные сведения о подобных задачах приводятся в гл. 7.

### 6.3. Дисперсное распространение сигналов

Рассмотрим теперь случай, когда тракты распространения сигнала (рис. 6.1) дисперсны, т. е. скорость распространения сигнала зависит от частоты. На практике дисперсность обычно приводит к увеличению скорости распространения сигнала с ростом частоты. Поэтому, если входной сигнал  $x(t)$  проходит через дисперсную среду, то высокочастотные составляющие  $x(t)$  достигнут выхода  $y(t)$  быстрее, чем низкочастотные. Реальная скорость распространения волн с данной частотой называется *групповой скоростью*  $c_g$ , которая связана с фазовой скоростью  $c_p$ , но не равна ей. Если  $c_p \sim \lambda^n$ , где  $\lambda$  — длина волны, то  $c_g = (1-n)c_p$  [6.1]. Например, фазовая скорость волн изгиба в длинной тонкой балке равна [6.2]

$$c_p = \sqrt{1,8hf c_l} \sim 1/\lambda, \quad (6.36)$$

где  $h$  — толщина балки,  $c_l$  — скорость продольных волн (скорость звука) в балке. Следовательно, в этом случае  $n = -1$  и групповая скорость волн изгиба равна

$$c_g = 2c_p = 2\sqrt{1,8hf c_l}. \quad (6.37)$$

Из формулы (6.37) следует, что  $c_g \sim f^{1/2}$ .

#### 6.3.1. Случай одного тракта

Если даже вход  $x(t)$  и выход  $y(t)$  связывает только один тракт, широкополосные методы взаимно-ковариационного анализа, описанные в разд. 6.1.1, в случае дисперсного распространения сигнала не дают значащих результатов. Волны различной частоты распространяются с различной скоростью, поэтому на графике взаимной ковариационной функции отдельные

пики не выделяются. Очевидно, однако, что эту трудность можно обойти, если анализ данных проводить в смежных полосах частот, достаточно узких для того, чтобы изменение групповой скорости в пределах каждой полосы было небольшим и пики ковариационной функции достаточно хорошо разрешались. Для волн изгиба в балках и плитах, где  $c_g \sim f^{1/2}$ , приемлемые результаты получаются, если выбрать полосу частот, верхняя граница которой в два раза больше нижней (одна октава).

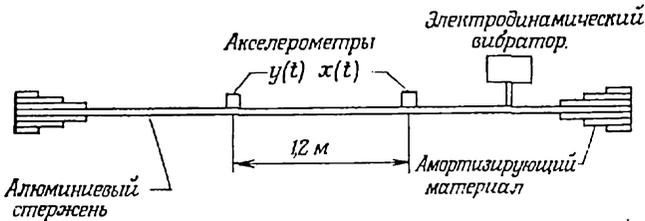


Рис. 6.10. Вибрация стержня.

Для иллюстрации вышесказанного рассмотрим простой эксперимент, проделанный Уайтом [6.3] по схеме, приведенной на рис. 6.10. Длинный прямой алюминиевый стержень толщиной  $h=0,0032$  м подвергается на одном из его концов случайному возмущению. На расстоянии  $d=1,2$  м друг от друга на стержне установлены два акселерометра. Для подавления отражений от концов стержень на концах хорошо амортизирован. На рис. 6.11 показаны взаимные ковариационные функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , вычисленные в трех полосах частот шириной в октаву каждая с центрами на частотах 1, 2 и 8 кГц. Вычисление по формуле (6.37) групповой скорости волн изгиба, проходящих по стержню, после подстановки значений  $h=0,0032$  м и  $c_l=5150$  м/с (скорость звука в алюминии) дает

$$c_g = 2\sqrt{1,8hf c_l} = 11f^{1/2}. \quad (6.38)$$

Поэтому время прохождения  $\tau=d/c_g$  расстояния  $d=1,2$  м между двумя акселерометрами должно составлять  $\tau=0,11 f^{-1/2}$ , или

$$\tau = \begin{cases} 3,5 \text{ мс на } f=1000 \text{ Гц,} \\ 2,5 \text{ мс на } f=2000 \text{ Гц,} \\ 1,2 \text{ мс на } f=8000 \text{ Гц.} \end{cases}$$

Эти вычисленные запаздывания полностью согласуются с наблюдаемыми значениями (рис. 6.11).

Разумеется, анализ прохождения сигнала по одному дисперсному пути можно провести и с помощью взаимных спектральных плотностей (когерентности и фазы) способом, изложенным

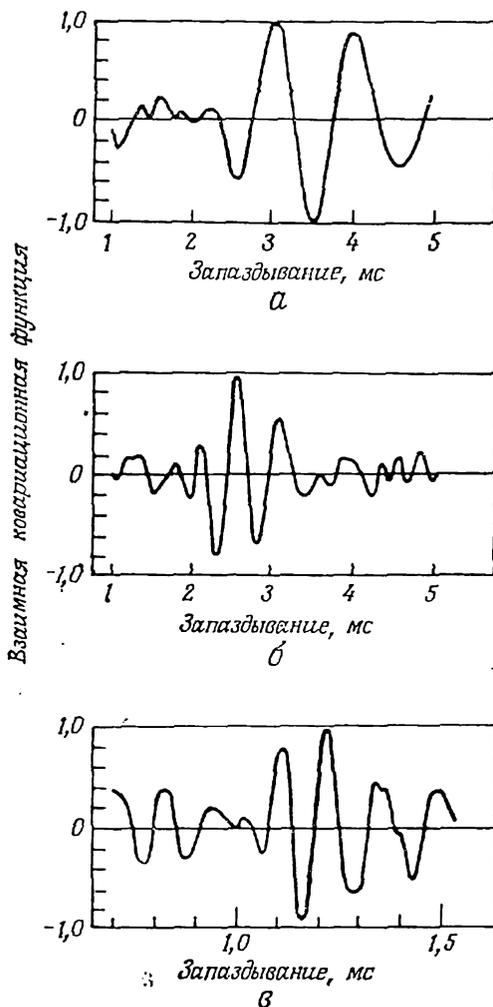


Рис. 6.11. Взаимные ковариационные функции в эксперименте с вибрацией стержня в полосах частот шириной в октаву.

Разрешение по времени  $\tau_p = 0,10$  мс; число усреднений  $n_d = 15$ .

а — 1000 Гц; б — 2000 Гц; в — 8000 Гц. (Данные, использованные на рис. 6.11 и 6.13, взяты из работы [6.3] с разрешения Акустического общества Америки и автора.)

в разд. 6.1.2 применительно к анализу бездисперсного распространения сигнала. В дисперсном случае фазовая характеристика уже не будет линейно зависеть от частоты, но будет иметь другой вид, определяющий характер распространения сигнала в зависимости от частоты. Например, в эксперименте со стержнем (рис. 6.10), как следует из формул (3.74) и (6.37), фазо-

вый угол между  $x(t)$  и  $y(t)$  равен величине

$$\theta(f) = 2\pi f d / c_g = \pi d f^{1/2} / (1,8 h c_1)^{1/2}. \quad (6.39)$$

Поэтому признаком наличия в стержне волн изгиба при взаимном спектральном анализе будет пропорциональность фазы квадратному корню из частоты.

### 6.3.2. Случай нескольких трактов

Рассмотрим теперь дисперсное распространение сигнала по двум или более параллельным трактам между входом  $x(t)$  и выходом  $y(t)$  (рис. 6.1). Принципиально эту задачу можно решить, используя взаимно-ковариационный анализ в ограниченных полосах для подавления влияния дисперсности (см.

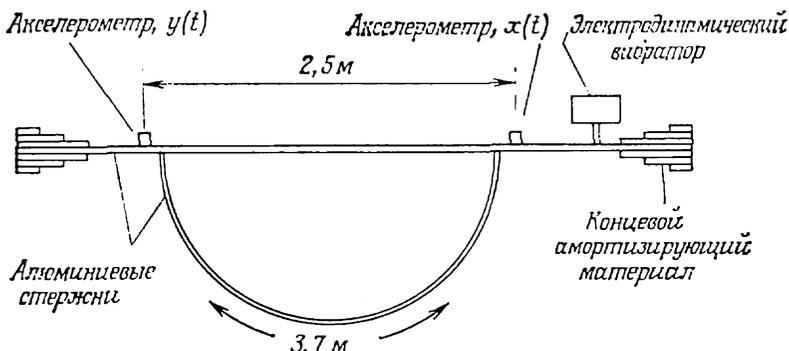


Рис. 6.12. Вибрация двух стержней.

разд. 6.3.1). Однако при этом появляются два взаимно исключающих требования: а) для подавления влияния дисперсности требуется узкополосный анализ; б) для исключения наложения соседних ковариационных пиков необходим широкополосный анализ. Часто эти противоречивые требования не позволяют получить значащих результатов. Однако в некоторых случаях достижим приемлемый компромисс.

В качестве иллюстрации рассмотрим эксперимент, выполненный Уайтом [6.3]. Сигнал проходит по двум трактам (рис. 6.12). Длинный прямой алюминиевый стержень толщиной  $h = 0,0032$  м приварен к изогнутому стержню той же толщины; к одному из концов стержня приложено случайное воздействие. На прямом стержне на расстоянии  $d_1 = 2,5$  м друг от друга установлены два акселерометра, причем расстояние между ними по криволинейному пути равно  $d_2 = 3,7$  м. Концы прямого стержня хорошо амортизированы для подавления концевых отражений. На рис. 6.13 показана типичная взаимная ковариационная функ-

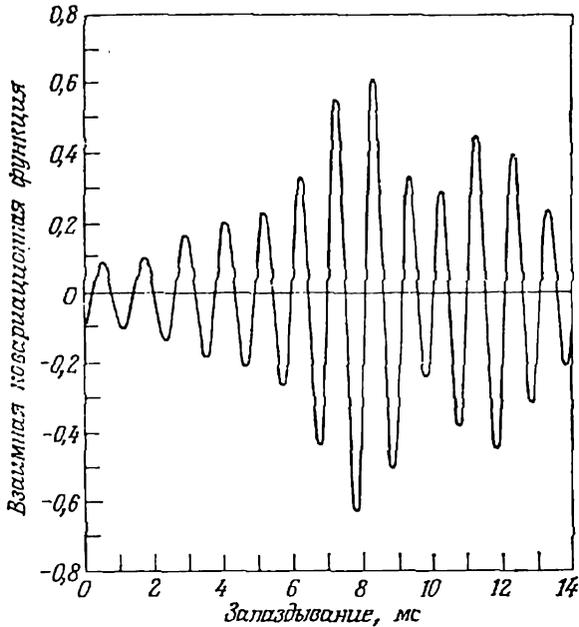


Рис. 6.13. Взаимная ковариационная функция в эксперименте по вибрации двух стержней в полосе частот шириной в октаву при 850 Гц.

Разрешение по времени  $\tau_e=0,10$  мс; число усреднений  $n_d=15$ .

ция между  $x(t)$  и  $y(t)$ , вычисленная в полосе частот шириной в одну октаву с центром на частоте 850 Гц. Групповая скорость волн изгиба, проходящих по обоим стержням, согласно формуле (6.38), равна  $c_g=11f=320$  м/с. Следовательно, время прохождения сигналом расстояния между двумя акселерометрами по прямому и криволинейному трактам должно равняться соответственно  $\tau_1=7,8$  мс,  $\tau_2=12$  мс. На рис. 6.13 видно, что огибающая наблюдаемой взаимной ковариационной функции имеет два отчетливых пика на предсказанных местах.

Соображения по практическому применению описанных методов, приведенные в разд. 6.1.4, справедливы и в случае дисперсных трактов. В частности, анализ влияния шума [формулы (6.19)—(6.22)] применим в полной мере, если влияние дисперсности исключено путем проведения анализа в ограниченных полосах. Однако полностью исключить влияние дисперсности обычно не удается из-за противоречивых требований к ширине полосы, в которой проводится анализ. Это приводит к тому, что при анализе прохождения сигнала по трактам ковариационные пики, как правило, накладываются друг на друга. В силу этого коэффициенты корреляции отдельных пиков мень-

ше, чем дает формула (6.20), и поэтому требуется даже большее число наблюдений по сравнению с оценкой этого числа, даваемой формулами (6.21) и (6.22).

### 6.3.3. Задачи смешанного типа

Во многих случаях энергия может распространяться по неоднородному тракту с двумя и более скоростями. В механических конструкциях распространение энергии может происходить в

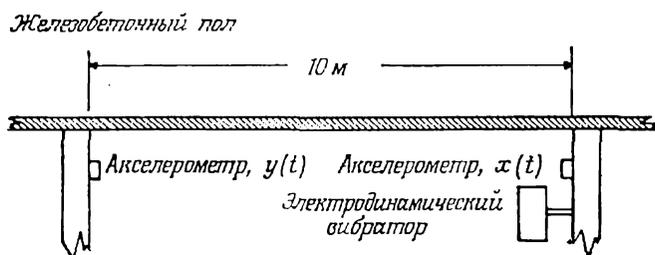


Рис. 6.14. Вибрационный эксперимент в железобетонном административном здании.

виде как бездисперсных продольных волн, так и дисперсных волн изгиба. Простым примером может служить распространение высокочастотной вибрации, часто исследуемой в работах по технике защиты от шума, по большим железобетонным сооружениям, таким, как многоэтажные здания. Динамическая энергия может проходить через железобетонную конструкцию как а) продольные волны через бетон, б) продольные волны через стержни арматуры и (или) в) волны изгиба через конструкцию в целом. Взаимно-ковариационный анализ в полосах шириной в октаву при различных центральных частотах во многих случаях позволяет определить вклад каждой из этих трех составляющих. Продольные волны легко отличить от волн изгиба, так как они бездисперсные и поэтому их время запаздывания одинаково на всех частотах.

В качестве примера рассмотрим вибродинамический эксперимент, проведенный на первом этаже многоэтажного административного здания (рис. 6.14). Электродинамический вибратор был укреплен на свае, поддерживающей железобетонную конструкцию пола. Один акселерометр был установлен около вибратора, а второй — на другой опорной свае. Расстояние между акселерометрами вдоль плиты пола составляло около 10 м, толщина плиты — около 0,37 м, включая верхнее покрытие толщиной 0,1 м. Вибратор создавал случайную вибрацию в полосах

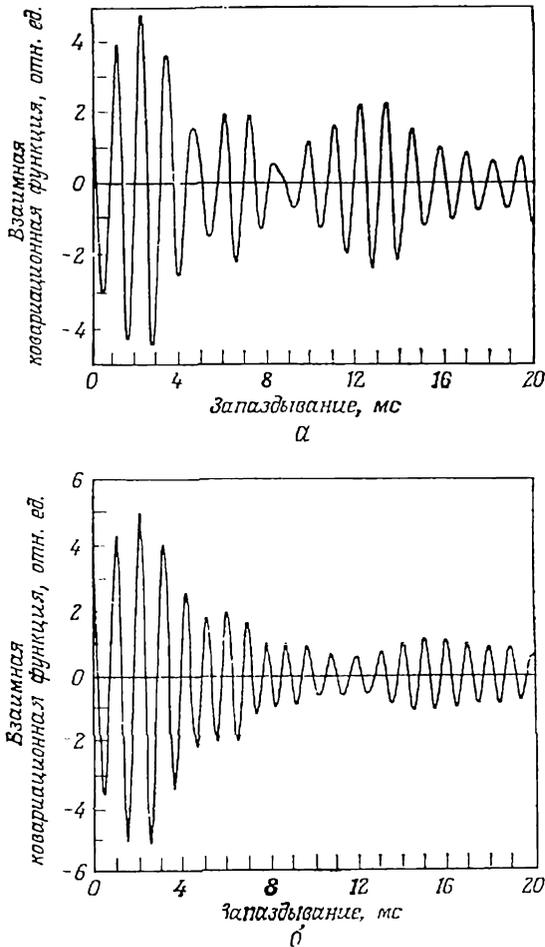


Рис. 6.15. Взаимная ковариационная функция в вибрационном эксперименте, проведенном в административном здании, в полосе частот шириной в октаву.

Разрешение по времени  $\tau_e = 0,050$  мс; число усреднений  $n_d = 20$ .

а — 500 Гц; б — 1000 Гц. (Эти данные были получены при поддержке фирмы «Möller-BVM GmbH».)

частот шириной в одну октаву с центрами на частотах 500 и 1000 Гц. Анализ проводился с разрешением по времени запаздывания  $\tau_e = 0,05$  мс при  $n_d = 20$  усреднениях.

Графики, приведенные на рис. 6.15, показывают, что ковариационная функция имеет два максимума, которые как в полосе частот с центром на частоте 500 Гц, так и в полосе частот с центром на частоте 1000 Гц приходятся на одни и те же значения запаздывания:  $\tau_1 = 2$  мс,  $\tau_2 = 6$  мс. Преобладающий пик

при  $\tau_1 = 2$  мс соответствует скорости распространения 5000 м/с, что примерно равно скорости звука в стали. Следовательно, продольные волны в стали арматуры пола переносят основную часть энергии на этих частотах между двумя точками измерения. Пик при  $\tau_2 = 6$  мс, хорошо видный на частоте 500 Гц и менее заметный на частоте 1000 Гц, соответствует скорости распространения 1700 м/с, что примерно равно скорости звука в легком бетоне [6.2]. Поэтому, вероятно, этот пик вызван распространением продольных волн через бетон. Через бетон переносится существенно меньше энергии, чем через арматуру, так как коэффициент поглощения бетона значительно выше, чем коэффициент поглощения стали.

Что же касается волн изгиба, то толщина всей плиты пола слишком велика для того, чтобы могли появиться типичные волны изгиба с частотой выше 500 Гц [6.2]. Однако отдельные элементы конструкции пола, такие, как верхний слой плиты или элементы жесткости, могут переносить волны изгиба на рассматриваемых частотах. На рис. 6.15, а заметен отчетливый пик ковариации при  $\tau_3 = 13$  мс в полосе частот с центром на частоте 500 Гц. По формуле (6.37) это время как раз равно времени запаздывания волны изгиба, проходящей через какой-то элемент конструкции пола с эффективной толщиной 0,1 м, что соответствует толщине верхнего слоя плиты. С другой стороны, пик при 13 мс может быть вызван и продольной волной, проходящей по какому-то тракту через другие элементы конструкции здания.

#### 6.4. Оценивание характеристик трактов

Разделы 6.1—6.3 посвящены общей проблеме идентификации возможных трактов распространения сигнала от точки наблюдения входного процесса до точки наблюдения выходного процесса. При этом предполагается, что частотная характеристика каждого тракта равна постоянной,  $H(f) = H$ . На практике, конечно,  $H(f)$  может и не быть постоянной, поэтому оценивание ее может представить большой интерес.

##### 6.4.1. Оценивание частотных характеристик трактов

Если частотная характеристика тракта распространения сигнала есть произвольная функция  $H(f)$ , отличная от константы  $H$ , то взаимная ковариационная функция в случае нескольких трактов задается формулой (6.23), а не формулой (6.2). Пики взаимной ковариации, идентифицирующие каждый тракт, имеют форму, определяемую входным процессом  $x(t)$  со спектром вида  $[H_k(f) | G_{xx}(f)]$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, r$ , а не  $G_{xx}(f)$ . Как отмечалось

в разд. 6.1.4, это создает трудности при выделении отдельных трактов, так как неравномерность частотных характеристик, как правило, приводит к взаимному наложению пиков; с другой стороны, если максимумы ковариации полностью разнесены во времени, то взаимные ковариационные функции позволяют получить информацию относительно частотных характеристик отдельных трактов.

Рассмотрим взаимную ковариационную функцию, вычисленную при анализе распространения сигнала по нескольким трак-

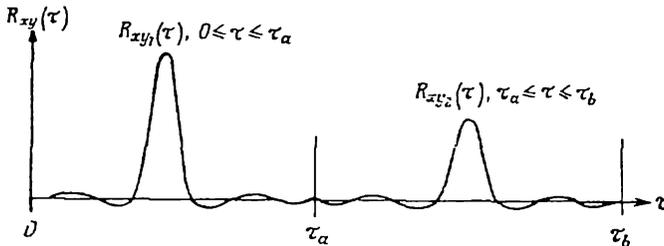


Рис. 6.16. Разделяющаяся взаимная ковариационная функция в задаче распространения сигнала по нескольким трактам.

там, типа изображенной на рис. 6.16. По формулам (6.23) и (6.24) взаимная ковариационная функция только для одного  $k$ -го тракта равна  $R_{xy_k}(\tau)$  вместо  $R_{xy}(\tau)$ , т. е.

$$R_{xy_k}(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{xy_k}(j) e^{j2\pi f \tau} df + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G_{xy_k}^*(f) e^{-j2\pi f \tau} df, \quad (6.40)$$

где

$$G_{xy_k}(f) = H_k(f) G_{xx}(f) e^{-j2\pi f \tau_k}. \quad (6.41)$$

Поэтому в предположении отсутствия шума в измерениях входного процесса  $x(t)$  оценка частотной характеристики  $k$ -го тракта получается из формулы (6.41) в следующем виде:

$$H_k(f) = [G_{xy_k}(f) / G_{xx}(f)] e^{j2\pi f \tau_k}. \quad (6.42)$$

Заметим, что  $H_k(f)$  может иметь фазовую составляющую, отличную от нуля, в дополнение к фазовому сдвигу, связанному со временем распространения  $\tau_k$ . Если эта фазовая составляющая нелинейна по частоте, то такой тракт дисперсный. В любом случае обе фазовые составляющие разделить нельзя и можно определить только их комбинацию, т. е.

$$H_k(f) = |H_k(f)| e^{-j[\theta_k(f) - 2\pi f \tau_k]}. \quad (6.43)$$

В заключение следует отметить, что способ оценивания частотных характеристик отдельных трактов с использованием

формул (6.40)—(6.42) чрезвычайно чувствителен даже к небольшим неточностям выделения ковариационных функций, описывающих отдельные тракты. Это означает, что такой способ не даст точных результатов при значительном взаимном наложении пиков ковариации. Если описанный способ применяется в случае дисперсных трактов, то очень важно, чтобы фильтры, используемые для выделения определенной полосы частот во входном и выходном процессах с целью исключения влияния дисперсности, были тщательно подогнаны так, чтобы их фазовые характеристики совпадали. В противном случае относительный сдвиг фаз этих фильтров скажется на фазовой составляющей  $H_k(f)$ , даваемой формулой (6.43).

В гл. 5 и 11 дается анализ других возможных систематических и случайных ошибок при использовании оценок частотных характеристик вида (6.42).

#### 6.4.2. Применения к переходным процессам

Все способы решения задач идентификации трактов методами корреляционного и спектрального анализа, описанные в этой главе, распространяются на переходные процессы. Если в формуле (6.1)  $x(t)$  — переходный процесс небольшой длительности  $\Delta t$ , такой, что

$$\Delta t < (\tau_i - \tau_k), \quad i, k = 1, 2, 3, \dots, r, \quad (6.44)$$

то измерение на выходе даст

$$y(t) = \sum_{k=1}^r H_k x(t - \tau_k), \quad (6.45)$$

т. е. имеем сумму переходных процессов, происходящих со сдвигом во времени  $\tau_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, r$ , соответствующим запаздыванию в  $k$ -м тракте.

Из разд. 4.1.2 следует, что все спектральные соотношения, выведенные в этой главе, останутся в силе, если стационарные спектры  $G_{xy}(f)$  и  $G_{yy}(f)$  заменить энергетическими спектрами  $\mathcal{G}_{xy}(f)$  и  $\mathcal{G}_{yy}(f)$ . Например, критерий различения трактов (6.4) сохраняется, причем  $B$  в этом уравнении — ширина энергетического спектра  $\mathcal{G}_{yy}(f)$ . Остаются в силе и оценки частотных характеристик (6.41) и (6.42), если стационарные спектры заменить энергетическими.

Основное отличие анализа переходных процессов от анализа стационарных процессов заключается в способе подавления шумов измерений. Как следует из формул (3.89) и (3.90), точность оценок при взаимно-ковариационном или взаимно-спектральном анализе повышается с ростом числа усреднений  $n_d$ ,

что просто означает увеличение общей длительности реализации. Если же входной процесс переходный, то усреднение следует проводить по ансамблю переходных процессов, т. е. эксперимент надо повторять много раз. В тех случаях, когда переходный процесс детерминированный и его можно повторить без всякого инструментального шума на входе, усреднять можно только выходные сигналы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 6.1. Rayleigh J. W. S. The Theory of Sound, Vol. 1, Appendix, Dover Publications, New York, 1945. [Имеется перевод: Рэлей Дж. Теория звука. Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1955.]
- 6.2. Cremer L., Heckl M., Ungar E. E. Structure-Borne Sound, Springer-Verlag, New York, 1973.
- 6.3. White P. H. Cross-Correlation in Structural Systems: Dispersive and Non-dispersive Waves, *Journal of Acoustical Society of America*, 45, No. 5, 1118 (May 1969).

## СИСТЕМЫ С ОДНИМ ВХОДОМ И НЕСКОЛЬКИМИ ВЫХОДАМИ

Эта глава посвящена изучению систем с одним входным процессом, наблюдаемым или ненаблюдаемым, который вызывает несколько наблюдаемых выходных процессов. Каждый выходной процесс может быть либо результатом непосредственного измерения, либо сниматься с системы датчиков, установленных с целью формирования острой диаграммы направленности. В любом случае предполагается, что система, преобразующая входной процесс в измеряемые выходные процессы, линейна и имеет постоянные параметры и что все неизвестные отклонения от этого идеального случая включены в некоррелированный внешний шум на выходе.

### 7.1. Корреляционные и спектральные соотношения

Пусть система (рис. 7.1) состоит из одного стационарного эргодического случайного входного процесса  $x(t)$ , который вызывает  $r$  наблюдаемых выходных процессов  $y_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, r$ . Из соотношения (4.1) следует, что каждый выходной процесс имеет вид

$$y_i(t) = \int_0^{\infty} h_i(\tau) x(t-\tau) d\tau + n_i(t), \quad i=1, 2, \dots, r. \quad (7.1)$$

Беря преобразование Фурье достаточно длинной реализации длины  $T$ , получаем

$$Y_i(f, T) = H_i(f) X(f, T) + N_i(f, T), \quad i=1, 2, \dots, r. \quad (7.2)$$

По предположению стационарности

$$\mu_{y_i} = E[y_i(t)] = \mu_x \int_0^{\infty} h_i(\tau) d\tau + \mu_{n_i}, \quad i=1, 2, \dots, r. \quad (7.3)$$

Поэтому  $\mu_y = 0$  для всех  $y_i(t)$ , если  $\mu_x = 0$  и  $\mu_{n_i} = 0$ . Для удобства и упрощения выкладок будем считать, что это условие выполняется. Допустим также, что  $x(t)$  и  $n_i(t)$  некоррелированы, т. е.  $E[x(t)n_i(t)] = 0$  для всех  $i$ .

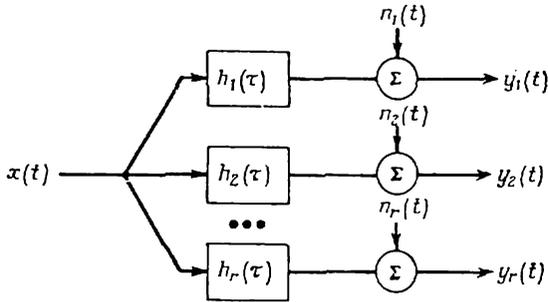


Рис. 7.1. Система с одним входом и несколькими выходами.

### 7.1.1. Соотношения между входным и выходными процессами в общем случае

Как следует из формулы (4.3), ковариационная функция любого выходного процесса  $y_i(t)$  имеет вид

$$R_{y_i y_i}(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_i(\alpha) h_i(\beta) R_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta + R_{n_i n_i}(\tau). \quad (7.4)$$

Аналогично спектральная плотность, согласно соотношению (4.8), дается формулой

$$G_{y_i y_i}(f) = |H_i(f)|^2 G_{xx}(f) + G_{n_i n_i}(f). \quad (7.5)$$

Как следует из формулы (4.5), взаимная ковариационная функция между входным процессом  $x(t)$  и любым выходным процессом  $y_i(t)$  определяется выражением

$$R_{x y_i}(\tau) = \int_0^{\infty} h_i(\alpha) R_{xx}(\tau - \alpha) d\alpha. \quad (7.6)$$

В частотной области соответствующая взаимная спектральная плотность, согласно формуле (4.9), имеет вид

$$G_{x y_i}(f) = H_i(f) G_{xx}(f). \quad (7.7)$$

Соотношения (7.1) — (7.7) в точности совпадают с соотношениями для системы с одним входом и одним выходом при наличии внешнего шума.

Найдем теперь взаимную ковариационную функцию двух произвольных выходных процессов  $y_i(t)$  и  $y_j(t)$ ,  $i \neq j$ :

$$\begin{aligned} R_{y_i y_j}(\tau) &= E [y_i(t) y_j(t + \tau)] = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_i(\alpha) h_j(\beta) E [x(t - \alpha) x(t + \tau - \beta)] d\alpha d\beta = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} h_i(\alpha) h_j(\beta) R_{xx}(\tau + \alpha - \beta) d\alpha d\beta; \end{aligned} \quad (7.8)$$

математические ожидания остальных членов равны нулю. Это громоздкое выражение трудно представить в числовой форме и интерпретировать. Но, с другой стороны, перейдя в формуле (7.8) к преобразованию Фурье, получим, что взаимная спектральная плотность между двумя любыми выходными процессами задается простым выражением

$$G_{y_i y_j}(f) = H_i^*(f) H_j(f) G_{xx}(f). \quad (7.9)$$

Отсюда следует, что наблюдение  $G_{y_i y_j}(f)$  плюс знание  $H_i(f)$  и  $H_j(f)$  в отдельности позволяют оценить  $G_{xx}(f)$ , если непосредственно определить  $G_{xx}(f)$  нельзя.

Из выражений (7.5) и (7.9) получаем, что функция когерентности между любыми двумя выходными процессами равна

$$\begin{aligned} \gamma_{y_i y_j}^2(f) &= \frac{|G_{y_i y_j}(f)|^2}{G_{y_i y_i}(f) G_{y_j y_j}(f)} = \\ &= \frac{|H_i(f)|^2 |H_j(f)|^2 G_{xx}^2(f)}{[|H_i(f)|^2 G_{xx}(f) + G_{n_i n_i}(f)] [|H_j(f)|^2 G_{xx}(f) + G_{n_j n_j}(f)]}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Интересно рассмотреть различные частные случаи формулы (7.10). Во-первых, пусть  $G_{n_i n_i}(f) = G_{n_j n_j}(f) = 0$ . Тогда

$$\gamma_{y_i y_j}^2(f) = 1. \quad (7.11)$$

Следовательно,  $y_i(t)$  и  $y_j(t)$  исходят из одного источника  $x(t)$  неискаженными внешним шумом. Пусть теперь  $H_i(f) = H_j(f) = H(f)$  и

$$G_{vv}(f) = |H(f)|^2 G_{xx}(f). \quad (7.12)$$

Тогда

$$\gamma_{y_i y_j}^2(f) = \frac{G_{vv}^2(f)}{[G_{vv}(f) + G_{n_i n_i}(f)] [G_{vv}(f) + G_{n_j n_j}(f)]}. \quad (7.13)$$

откуда следует, что функция когерентности всегда будет меньше единицы, если только внешний шум влияет на измерение хо-

тя бы одного выходного процесса. Наконец, пусть  $H_i(f) = H(f)$  и  $H_j(f) = 1$ . В этом случае

$$\gamma_{y_1 y_2}^2(f) = \frac{|H(f)|^2 G_{xx}^2(f)}{[|H(f)|^2 G_{xx}(f) + G_{n_1 n_1}(f)][G_{xx}(f) + G_{n_2 n_2}(f)]}. \quad (7.14)$$

Изучение последних двух случаев можно продолжить, если  $H(f)$  имеет специальный вид. (См. [7.1], где также рассматриваются многие другие близкие к этой теме вопросы.)

### 7.1.2. Соотношения для системы с одним входом и двумя выходами

Рассмотрим частный случай, когда система имеет один вход и два выхода (рис. 7.2). Если предположить, что шумы  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  не коррелированы между собой и с входным процессом  $x(t)$ , то

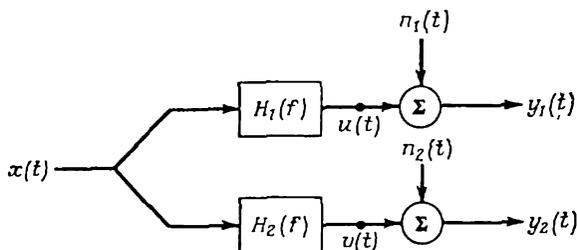


Рис. 7.2. Система с одним входом и двумя выходами.

как следствие результатов разд. 7.1.1 получаем приведенные ниже спектральные соотношения (зависимость от частоты  $f$  не указывается для упрощения обозначений):

$$\begin{aligned} G_{x n_1} &= G_{u n_1} = G_{x n_2} = G_{v n_2} = G_{n_1 n_2} = 0, \\ G_{y_1 y_1} &= G_{uu} + G_{n_1 n_1} = |H_1|^2 G_{xx} + G_{n_1 n_1}, \\ G_{y_2 y_2} &= G_{vv} + G_{n_2 n_2} = |H_2|^2 G_{xx} + G_{n_2 n_2}, \\ G_{x y_1} &= G_{xu} = H_1 G_{xx}, \quad G_{x y_2} = G_{xv} + H_2 G_{xx}, \\ G_{y_1 y_2} &= G_{uv} = H_1^* H_2 G_{xx}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Функция когерентности двух выходных процессов в этом случае равна

$$\gamma_{y_1 y_2}^2 = \frac{|G_{y_1 y_2}|^2}{G_{y_1 y_1} G_{y_2 y_2}} = \frac{|G_{uv}|^2}{G_{y_1 y_1} G_{y_2 y_2}} = \gamma_{x y_1}^2 \gamma_{x y_2}^2. \quad (7.16)$$

Этот результат следует из того, что

$$\begin{aligned} |G_{uv}|^2 &= |H_1^* H_2 G_{xx}|^2 = (|H_1|^2 G_{xx}) (|H_2|^2 G_{xx}) = G_{uu} G_{vv}, \\ \gamma_{xy_1}^2 &= \frac{|G_{xy_1}|^2}{G_{xx} G_{y_1 y_1}} = \frac{|H_1 G_{xx}|^2}{G_{xx} G_{y_1 y_1}} = \frac{G_{uu}}{G_{y_1 y_1}}, \\ \gamma_{xy_2}^2 &= \frac{|G_{xy_2}|^2}{G_{xx} G_{y_2 y_2}} = \frac{|H_2 G_{xx}|^2}{G_{xx} G_{y_2 y_2}} = \frac{G_{vv}}{G_{y_2 y_2}}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Рассмотрим два частных случая. Сначала допустим, что  $n_1(t) = 0$ , а значит, и  $G_{n_1 n_1} = 0$ . Тогда

$$\gamma_{y_1 y_2}^2 = \gamma_{uy_2}^2 = \gamma_{xy_2}^2 = G_{vv} / G_{y_2 y_2}. \quad (7.18)$$

Поэтому

$$G_{vv} = \gamma_{y_1 y_2}^2 G_{y_2 y_2}, \quad G_{n_2 n_2} = (1 - \gamma_{y_1 y_2}^2) G_{y_2 y_2}. \quad (7.19)$$

Следовательно, отношение выходного сигнала к шуму для второго выхода равно

$$G_{vv} / G_{n_2 n_2} = \gamma_{y_1 y_2}^2 / (1 - \gamma_{y_1 y_2}^2), \quad (7.20)$$

т. е. если шум, воздействующий на  $y_1(t)$ , пренебрежимо мал, то функция когерентности между выходами определяет отношение сигнала к шуму на втором выходе.

Предположим теперь, что  $G_{n_1 n_1} = G_{n_2 n_2} = G_{nn} \neq 0$  и

$$\begin{aligned} H_1 &= \exp(-j2\pi f \tau_1), \quad |H_1| = 1, \\ H_2 &= \exp(-j2\pi f \tau_2), \quad |H_2| = 1. \end{aligned}$$

В случае произвольных  $H_1$  и  $H_2$  формула (7.10) дает следующее выражение для функции когерентности двух выходов:

$$\gamma_{y_1 y_2}^2 = \frac{|H_1|^2 |H_2|^2 G_{xx}^2}{(|H_1|^2 G_{xx} + G_{nn}) (|H_2|^2 G_{xx} + G_{nn})}. \quad (7.21)$$

В частном случае  $|H_1| = |H_2| = 1$

$$\gamma_{y_1 y_2}^2 = G_{xx}^2 / (G_{xx} + G_{nn})^2. \quad (7.22)$$

Следовательно,

$$G_{xx} / G_{nn} = |\gamma_{y_1 y_2}| / (1 - |\gamma_{y_1 y_2}|), \quad (7.23)$$

где  $|\gamma_{y_1 y_2}|$  — положительный квадратный корень из  $\gamma_{y_1 y_2}^2$ . Это случай, когда запаздывания  $\tau_1$  и  $\tau_2$  для двух трактов различны, а внешний шум одинаков. Величина  $|\gamma_{y_1 y_2}|$  теперь определяет отношение сигнала к шуму  $G_{xx} / G_{nn}$ , которое совпадает с  $G_{uu} / G_{nn}$  или  $G_{vv} / G_{nn}$ , так как  $G_{xx} = G_{uu} = G_{vv}$ , если  $|H_1| = |H_2| = 1$ .

## 7.2. Относительное запаздывание и направление распространения сигнала

Пусть два искаженных шумом сигнала  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  (рис. 7.2) имеют вид

$$y_1(t) = x(t) + n_1(t), \quad (7.24)$$

$$y_2(t) = \alpha x(t - \tau_1) + n_2(t).$$

Постоянные  $\alpha$  и  $\tau_1$  определяют соответственно коэффициент относительного затухания и запаздывание. Шумовые слагаемые  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$  предполагаются некоррелированными между собой и с  $x(t)$ .

### 7.2.1. Оценивание относительного запаздывания

Согласно соотношениям (3.15) и (3.30), взаимная ковариационная функция и взаимная спектральная плотность процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , определенных уравнениями (7.24), имеют вид

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = E[y_1(t) y_2(t + \tau)] = \alpha R_{xx}(\tau - \tau_1), \quad (7.25)$$

$$G_{y_1 y_2}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_1 y_2}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = \alpha e^{-j2\pi f \tau_1} G_{xx}(f),$$

тогда как ковариационные функции и спектральные плотности даются выражениями

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_1}(\tau) &= E[y_1(t) y_1(t + \tau)] = R_{xx}(\tau) + R_{n_1 n_1}(\tau), \\ G_{y_1 y_1}(f) &= G_{xx}(f) + G_{n_1 n_1}(f), \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$R_{y_2 y_2}(\tau) = E[y_2(t) y_2(t + \tau)] = \alpha^2 R_{xx}(\tau) + R_{n_2 n_2}(\tau), \quad (7.27)$$

$$G_{y_2 y_2}(f) = \alpha^2 G_{xx}(f) + G_{n_2 n_2}(f).$$

В формулах (7.25) для  $R_{y_1 y_2}(\tau)$  и  $G_{y_1 y_2}(f)$  отсутствуют шумовые члены  $n_1(t)$  и  $n_2(t)$ . Выражение для  $R_{y_1 y_2}(\tau)$  является функцией от  $\alpha$ ,  $\tau_1$ ,  $R_{xx}(\tau)$  и имеет, очевидно, максимум при  $\tau = \tau_1$ . Запаздывание  $\tau_1$  линейно входит в фазовую составляющую взаимного спектра:

$$\theta_{y_1 y_2}(f) = 2\pi f \tau_1. \quad (7.28)$$

Следовательно, запаздывание  $\tau_1$  можно определить либо по взаимной ковариационной функции, либо по взаимной спектральной плотности из формул (7.25).

Приведенные выше результаты в принципе идентичны результатам, использованным при определении времени запазды-

вания в задаче бездисперсного распространения сигнала по нескольким трактам (гл. 6); их применения ограничены теми же практическими трудностями. Но в данном случае не возникает проблем, связанных с наложением соседних пиков, потому что по предположению между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  есть только один тракт. С другой стороны, все же желательно сделать пик ковариации при  $\tau = \tau_1$  по возможности более острым, чтобы добиться максимальной точности определения  $\tau_1$ . Часто это можно сделать таким же способом, какой был использован в разд. 6.1.3. Определим гипотетическую частотную характеристику  $H_{y_1 y_2}$ , как и в выражении (5.1), формулой

$$H_{y_1 y_2}(f) = G_{y_1 y_2}(f) / G_{y_1 y_1}(f), \quad (7.29)$$

где  $y_1(t)$  рассматривается как входной процесс, а  $y_2(t)$  — как выходной в модели с одним входом и одним выходом. Соответствующая функция когерентности равна

$$\gamma_{y_1 y_2}^2(f) = |G_{y_1 y_2}(f)|^2 / G_{y_1 y_1}(f) G_{y_2 y_2}(f). \quad (7.30)$$

Определим теперь комплексную функцию когерентности следующим образом:

$$\gamma_{y_1 y_2}(f) = G_{y_1 y_2}(f) / [G_{y_1 y_1}(f) G_{y_2 y_2}(f)]^{1/2}, \quad (7.31)$$

причем фаза функции когерентности равна фазовому углу функции  $G_{y_1 y_2}(f)$ . Из формул (7.25) и (7.26) находим

$$H_{y_1 y_2}(f) = \frac{\alpha e^{-j2\pi f \tau_1}}{1 + [G_{n_1 n_1}(f) / G_{xx}(f)]}. \quad (7.32)$$

Следовательно,  $H_{y_1 y_2}(f)$  не зависит от  $G_{n_2 n_2}(f)$ , но является функцией  $\alpha$ ,  $\tau_1$  и отношения шума к сигналу  $G_{n_1 n_1}(f) / G_{xx}(f)$ . Если это отношение намного меньше единицы, то

$$H_{y_1 y_2}(f) \approx \alpha e^{-j2\pi f \tau_1}. \quad (7.33)$$

Эта формула не содержит зависимости от  $G_{xx}(f)$  и  $G_{n_1 n_1}(f)$  и определяет ограниченный по частоте белый шум. Теперь следует ожидать, что обратное преобразование Фурье  $H_{y_1 y_2}(f)$  позволит довольно точно оценить  $\tau_1$ , если только  $\alpha$  не слишком мало по сравнению с инструментальными и вычислительными ошибками. Теоретически, если  $n_1(t) = 0$ , то в результате получится дельта-функция, а именно

$$h_{y_1 y_2}(\tau) \approx \alpha \delta(\tau - \tau_1). \quad (7.34)$$

Вышеизложенное иллюстрируется рис. 6.7.

В общем случае комплексная функция когерентности между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  определяется из (7.25) — (7.27) формулой

$$\gamma_{y_1 y_2}(f) = \frac{\alpha e^{-j2\pi f \tau_1}}{[1 + \{G_{n_1 n_1}(f)/G_{xx}(f)\}]^{1/2} [\alpha^2 + \{G_{n_2 n_2}(f)/G_{xx}(f)\}]^{1/2}}. \quad (7.35)$$

Если первое отношение шума к сигналу  $G_{n_1 n_1}(f)/G_{xx}(f)$  пренебрежимо мало по сравнению с единицей, то

$$\gamma_{y_1 y_2}(f) \approx \frac{\alpha e^{-j2\pi f \tau_1}}{[\alpha^2 + \{G_{n_2 n_2}(f)/G_{xx}(f)\}]^{1/2}}. \quad (7.36)$$

Поэтому  $\gamma_{y_1 y_2}(f)$  — функция  $\alpha$ ,  $\tau_1$  и второго отношения шума к сигналу  $G_{n_2 n_2}(f)/G_{xx}(f)$ . Если это второе отношение пренебрежимо мало по сравнению с  $\alpha^2$ , то выражение (7.36) принимает вид

$$\gamma_{y_1 y_2}(f) \approx e^{-j2\pi f \tau_1}. \quad (7.37)$$

Эта формула тоже определяет процесс типа ограниченного по частоте белого шума и предпочтительна по сравнению с фор-

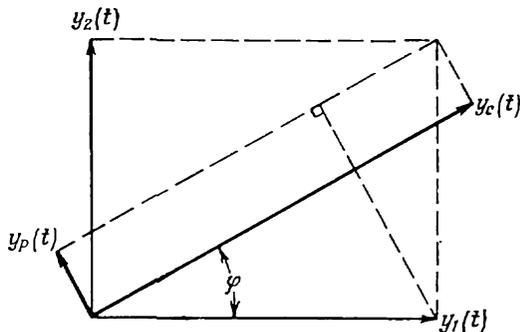


Рис. 7.3. Пара ортогональных измерений выходных процессов.

мулами (7.25) и (7.33), так как не содержит зависимости от коэффициента затухания  $\alpha$  и от  $G_{xx}(f)$ . Однако если  $G_{n_2 n_2}(f) \gg G_{xx}(f)$ , как это бывает в неблагоприятных ситуациях, то формулы (7.33) и (7.34) следует предпочесть выражению (7.36) и связанному с ним обратному преобразованию Фурье.

### 7.2.2. Определение главного направления

Предположим, что два выходных сигнала  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  (рис. 7.2) представляют собой пару ортогональных составляющих (рис. 7.3). Пусть  $y_c(t)$  — внутренний по отношению к про-

цессам  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  выходной процесс, составляющий угол  $\varphi$  с процессом  $y_1(t)$ , а  $y_p(t)$  — выходной процесс, перпендикулярный  $y_c(t)$  и составляющий угол  $\varphi + 90^\circ$  с процессом  $y_1(t)$ . Для произвольного угла  $\varphi$

$$y_c(t) = y_1(t) \cos \varphi + y_2(t) \sin \varphi, \quad (7.38)$$

$$y_p(t) = -y_1(t) \sin \varphi + y_2(t) \cos \varphi.$$

Финитное преобразование Фурье  $y_c(t)$  и  $y_p(t)$  по реализации достаточно большой длины  $T$  дает

$$Y_c(f, T) = Y_1(f, T) \cos \varphi + Y_2(f, T) \sin \varphi, \quad (7.39)$$

$$Y_p(f, T) = -Y_1(f, T) \sin \varphi + Y_2(f, T) \cos \varphi.$$

Спектральные плотности  $G_{cc}(f)$  и  $G_{pp}(f)$  можно выразить через  $G_{11}(f) = G_{y_1 y_1}(f)$ ,  $G_{22}(f) = G_{y_2 y_2}(f)$  и  $G_{12}(f) = G_{y_1 y_2}(f)$ :

$$G_{cc}(f) = G_{11}(f) \cos^2 \varphi + G_{22}(f) \sin^2 \varphi + 2\operatorname{Re}[G_{12}(f)] \sin \varphi \cos \varphi, \quad (7.40)$$

$$G_{pp}(f) = G_{11}(f) \sin^2 \varphi + G_{22}(f) \cos^2 \varphi - 2\operatorname{Re}[G_{12}(f)] \sin \varphi \cos \varphi.$$

Из соотношений (3.33) и (3.40) следует, что  $G_{11}(f)$ ,  $G_{22}(f)$  и  $\operatorname{Re}[G_{12}(f)]$  дают возможность найти дисперсию и ковариацию для любой пары стационарных случайных процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  с нулевым средним:

$$\sigma_1^2 = E[y_1^2(t)] = \int_0^\infty G_{11}(f) df,$$

$$\sigma_2^2 = E[y_2^2(t)] = \int_0^\infty G_{22}(f) df, \quad (7.41)$$

$$\sigma_{12} = E[y_1(t) y_2(t)] = \int_0^\infty \operatorname{Re}[G_{12}(f)] df.$$

Следовательно, дисперсии  $y_c(t)$  и  $y_p(t)$  равны

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= \sigma_1^2 \cos^2 \varphi + \sigma_2^2 \sin^2 \varphi + 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_p^2 &= \sigma_1^2 \sin^2 \varphi + \sigma_2^2 \cos^2 \varphi - 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Соответствующий взаимный спектр  $G_{cp}(f)$  и ковариацию  $\sigma_{cp}$  находим из формул (7.39):

$$\begin{aligned} G_{cp}(f) &= [G_{22}(f) - G_{11}(f)] \sin \varphi \cos \varphi + G_{12}(f) \cos^2 \varphi - G_{21}(f) \sin^2 \varphi, \\ \operatorname{Re}[G_{cp}(f)] &= [G_{22}(f) - G_{11}(f)] \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + \operatorname{Re}[G_{12}(f)] (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi), \\ \sigma_{cp} &= (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Рассмотрим теперь спектр  $G_{cc}(f)$  внутреннего процесса, определенный формулой (7.40). Заметим, что  $G_{cc}(f)$  — функция частоты и направления. Главным направлением  $\varphi_0$  называется значение  $\varphi$ , максимизирующее  $G_{cc}(f)$ . Для определения  $\varphi_0$  приравняем частную производную  $G_{cc}(f)$  по  $\varphi$  нулю и решим полученное уравнение относительно  $\varphi$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \partial G_{cc}(f) / \partial \varphi &= 2 [G_{22}(f) - G_{11}(f)] \sin \varphi \cos \varphi + \\ &\quad + 2 \operatorname{Re}[G_{12}(f)] (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 0. \end{aligned}$$

Но  $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ ,  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ .

Следовательно,  $\varphi = \varphi_0(f)$  должно удовлетворять уравнению

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0(f) = 2 \operatorname{Re}[G_{12}(f)] / [G_{11}(f) - G_{22}(f)]. \quad (7.44)$$

Решение этого уравнения дает точку максимума или минимума функции  $G_{cc}(f)$ , поэтому нужна дополнительная проверка. Если выяснится, что при некотором  $\varphi_0(f)$  получается минимум, то истинное главное направление равно  $\varphi_0(f) \pm 90^\circ$ . Заметим, что подстановка  $\varphi = \varphi_0(f)$  в уравнение (7.43) дает  $\operatorname{Re}[G_{cp}(f)] = 0$ ; следовательно,  $\sigma_{cp} = 0$ .

Другой способ определения главного направления заключается в рассмотрении дисперсии внутреннего процесса из соотношения (7.42):

$$\sigma_c^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \varphi + \sigma_2^2 \sin^2 \varphi + 2\sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi, \quad (7.45)$$

где  $\sigma_c^2$  не зависит от частоты и является функцией только направления. Главное направление  $\varphi_1$  можно теперь определить как значение  $\varphi$ , максимизирующее  $\sigma_c^2$ . Поступая, как и раньше, находим, что  $\varphi_1$  должно удовлетворять уравнению

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = 2\sigma_{12} / (\sigma_1^2 - \sigma_2^2). \quad (7.46)$$

Полученное решение также нужно проверить с целью исправления возможного сдвига на  $90^\circ$ . Заметим, что  $\varphi_1$  не зависит от частоты и не дает такой детальной частотной характеристики, как  $\varphi_0(f)$  из (7.44). То же самое  $\varphi_1$  можно получить более простым путем, приравняв  $\sigma_{cp}$  из формулы (7.43) нулю.

### 7.2.3. Дополнительные соотношения

Пусть  $A(f)$  равно отношению спектра внутреннего процесса  $G_{cc}(f)$  к спектру перпендикулярного процесса  $G_{pp}(f)$ :

$$A(f) = G_{cc}(f)/G_{pp}(f), \quad (7.47)$$

где  $G_{cc}(f)$  и  $G_{pp}(f)$  удовлетворяют соотношениям (7.40). Величина  $A(f)$  является функцией и частоты, и направления. В качестве главного направления можно принять то значение  $\varphi$ , обозначаемое как  $\varphi_2(f)$ , которое максимизирует  $A(f)$ . Простые преобразования, подобные проведенным ранее, показывают, что  $\varphi_2(f)$  должно удовлетворять условию

$$\operatorname{tg} 2\varphi_2(f) = 2\operatorname{Re}[G_{12}(f)]/[G_{11}(f) - G_{22}(f)]. \quad (7.48)$$

Следовательно,  $\varphi_2(f)$  совпадает с  $\varphi_0(f)$  из формулы (7.44). Для правильного выбора из двух возможных решений в качестве главного направления нужно взять то значение  $\varphi_2(f)$ , для которого  $A(f)$  больше единицы.

Обратимся еще раз к рис. 7.2 и 7.3 и для произвольного угла  $\varphi$  определим *внутреннюю функцию когерентности* между входным процессом  $x(t)$  (рис. 7.2) и внутренним выходным процессом  $y_c(t)$  (рис. 7.3). Вспоминая, что  $y_c(t)$  определялся по двум процессам  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  с рис. 7.2, получаем

$$\gamma_{xc}^2(f) = |G_{xc}(f)|^2 / G_{xx}(f) G_{cc}(f), \quad (7.49)$$

где  $G_{cc}(f)$  удовлетворяет соотношению (7.40) и

$$G_{xc}(f) = G_{x1}(f) \cos \varphi + G_{x2}(f) \sin \varphi. \quad (7.50)$$

Поэтому  $\gamma_{xc}^2(f)$  — функция направления  $\varphi$  и частоты  $f$  и, следовательно, должна обозначаться как  $\gamma_{xc}^2(f, \varphi)$ . Если подставить сюда определенные ранее главные направления  $\varphi_0(f)$  или  $\varphi_1$  из формул (7.44) и (7.46), то получим

$$\gamma_{xc}^2[f, \varphi_0(f)] \quad \text{и} \quad \gamma_{xc}^2[f, \varphi_1]. \quad (7.51)$$

Эти функции когерентности можно использовать для определения справедливости применения линейных моделей с одним входом и одним выходом для описания связи между входным процессом  $x(t)$  и главным внутренним выходным процессом  $y_c(t)$  в направлениях  $\varphi_0(f)$  или  $\varphi_1$ .

### 7.3. Локализация одного источника

Развитые в разд. 7.2 методы анализа обычно применяются при установлении местонахождения неизвестного источника, излучающего энергию с известной скоростью распространения, путем определения запаздывания между парами наблюдений на

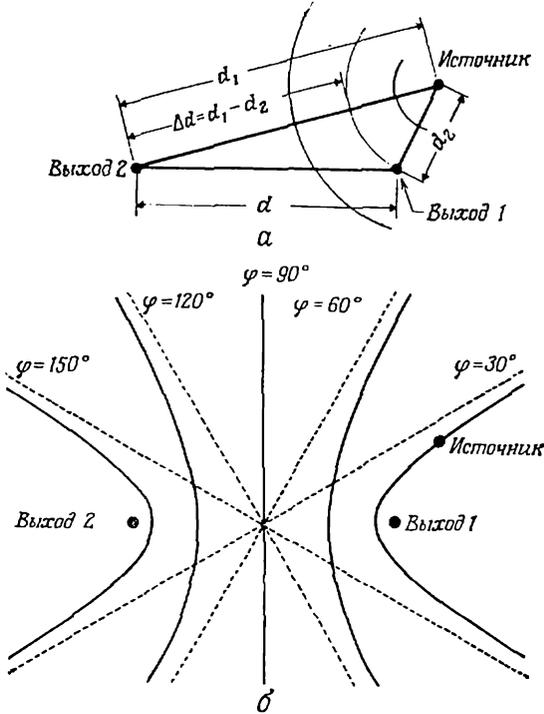


Рис. 7.4. Определение положения источника и угла падения по измерениям фазового угла между двумя выходами.  
 а — разность хода; б — локализация источника.

выходе. Пусть источник излучает равномерно во все стороны энергию, которая измеряется в двух точках, разделенных расстоянием  $d$  (рис. 7.4, а). Если скорость распространения энергии  $c$  известна, то запаздывание  $\tau_1$  между двумя выходными сигналами  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  можно рассматривать как угол падения  $\varphi$ , который удовлетворяет соотношению

$$\cos \varphi = c\tau_1/d. \tag{7.52}$$

Однако источник не лежит на линии, определяемой  $\varphi$ , а находится на гиперболической поверхности, определяемой уравнением

$$\Delta d = d_1 - d_2 = c\tau_1 \tag{7.53}$$

для любой плоскости, проходящей через точки наблюдения выходных процессов (рис. 7.4, б). Точное определение местонахождения источника в трехмерном пространстве потребует, конечно, подобных измерений в трех ортогональных парах выходных точек.

### 7.3.1. Методы и практические соображения

Согласно формуле (7.25), запаздывание  $\tau_1$  двух выходных сигналов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , вызванных одним входным сигналом, можно вычислить, исходя из взаимной ковариационной функции или взаимной спектральной плотности  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Практически чаще используется взаимный спектр (когерентность и фаза), так как это дает определенные преимущества при решении задач, связанных с учетом влияния шума на выходе, о чем будет сказано ниже. Из выражения (7.37) следует, что в идеальном случае при отсутствии внешнего шума на выходах имеют место равенства

$$\gamma_{12}^2(f) = \gamma_{y_1 y_2}^2(f) = 1, \quad \theta_{12}(f) = \theta_{y_1 y_2}(f) = 2\pi f \tau_1, \quad (7.54)$$

где фаза выражается через  $\tau_1$  с использованием формулы (7.52) следующим образом:

$$\theta_{12}(f) = (2\pi f d \cos \varphi) / c. \quad (7.55)$$

Следовательно, угол падения энергии дается формулой

$$\varphi = \arccos \frac{c \theta'_{12}(f)}{2\pi f d} = \arccos \frac{c \theta'_{12}(f)}{2\pi d}, \quad (7.56)$$

где  $\theta'_{12}(f)$  — производная  $\theta_{12}(f)$  по  $f$ , измеряемая в рад/Гц. В случае бездисперсного распространения  $\theta_{12}(f)/f = \theta'_{12}(f) = \theta'_{12}$  — константа.

Применение этих результатов к локализации ненаблюдаемого источника просто в теории, но на практике появляется ряд трудностей, в том числе следующие: 1) распределенность источника в пространстве; 2) влияние шума на выходные процессы; 3) эффекты реверберации и рассеяния; 4) получение данных и выборочные ошибки. Эти трудности рассматриваются в следующих четырех разделах.

### 7.3.2. Распределенность источника

При выводе формул (7.54)—(7.56) предполагалось, что выходные процессы  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  вызваны точечным источником  $x(t)$ . Если размеры фактического источника велики по сравнению с расстоянием от этого источника до точек наблюдения выходных процессов и источник не является полностью когерентным, то он будет воспринят на выходах как набор некоррелированных источников. В этом случае функция когерентности обычно уменьшается с ростом частоты, а фаза  $\theta_{12}(f)$  в некоторой степени неопределенна. Однако, за исключением случая совсем близких источников, искажение  $\theta_{12}(f)$  не так сильно, как можно было бы предполагать.

В качестве примера рассмотрим эксперимент по определению когерентности и фазы акустического шума, производимого реактивным двигателем (рис. 7.5). Измерения производились при помощи двух микрофонов, расположенных примерно в 40 м позади и сбоку от двигателя, работавшего на полную мощность. Микрофоны разделяло расстояние в 2,2 м, а угол падения шума

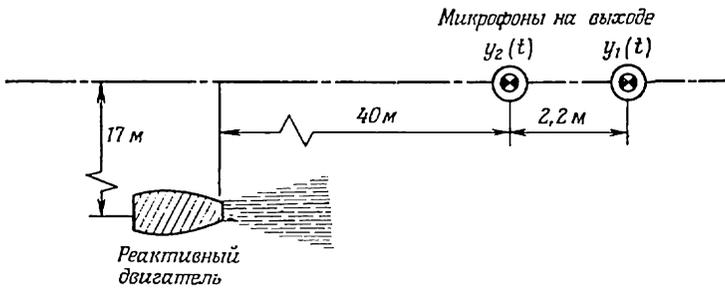


Рис. 7.5. Эксперимент с реактивным двигателем.

двигателя к оси микрофонов  $\varphi$  составлял примерно  $23^\circ$ . На рис. 7.6 изображены графики функции когерентности и фазового угла, полученные при разрешении  $B_e = 4$  Гц по  $n_d = 256$  усреднениям. Источник шума (реактивный двигатель) имеет довольно большие размеры на этих частотах (около метра) и не очень когерентен. Поэтому следует ожидать убывания функции когерентности на рис. 7.6. Тем не менее данные относительно фазового угла сравнительно «чистые» со средним наклоном  $0,0374$  рад/Гц. Из формулы (7.56) находим, что это соответствует  $\varphi \approx 23^\circ$ ; последнее в общем согласуется с действительным расположением микрофонов. Конечно, в данном примере расстояние от источника до микрофонов более чем в 10 раз превосходит расстояние между микрофонами. Если отношение этих расстояний меньше 10, то результаты измерений фазы ухудшаются.

### 7.3.3. Искажение выходного сигнала шумом

Из формулы (7.35) видно, что присутствие статистически независимого (внешнего) шума в измерениях выходных сигналов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  (что типично для инструментального шума) уменьшает коэффициент когерентности  $\gamma_{12}^2(f)$ , но не изменяет фазы  $\theta_{12}(\theta)$ . В то же время искажающий шум в сигналах  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , коррелированный с ними, как правило, искажает данные фазовых измерений, хотя и в этом случае иногда можно получить осмысленную информацию.

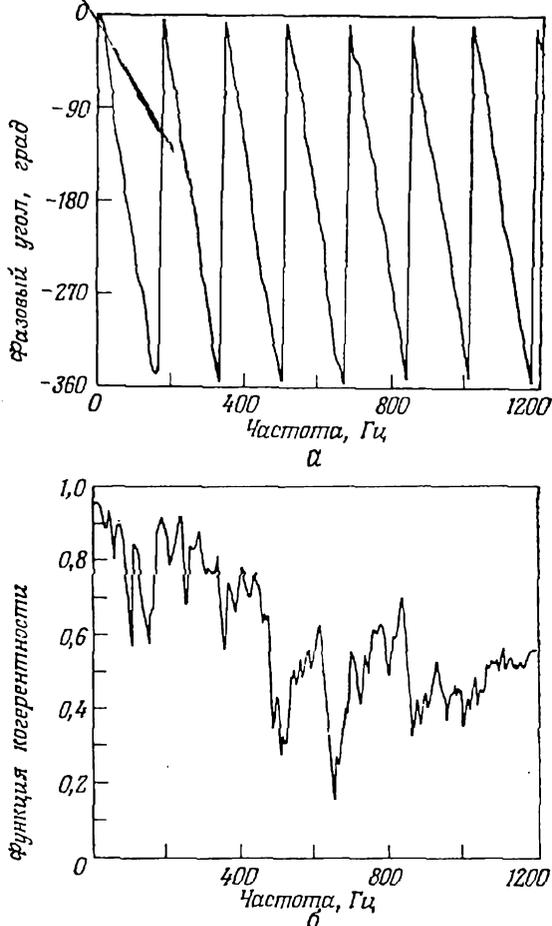


Рис. 7.6. Фазовый угол и функция когерентности между двумя точками регистрации шума реактивного двигателя.

Разрешение по частоте  $B_p = 4$  Гц; число усреднений  $n_d = 256$ .

*а* — фазовая характеристика; *б* — функция когерентности. (Эти данные получены в ходе экспериментов, проведенных для космического центра НАСА им. Джонсона по контракту NAS-15231.)

Наиболее распространенный вид искажающего шума — *диффузный шум*, порожденный большим числом независимых источников шума, окружающих точки наблюдения выходных процессов и воздействующих на  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Такой шум моделируется с разумной точностью бесконечным набором статистически независимых источников шума, равномерно окружающих точки наблюдения выходных процессов (рис. 7.7). Как можно

показать [7.2], взаимная спектральная плотность  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  в этом случае имеет вид

$$G_{12}(f) = G_d(f) \sin k_0 d / k_0 d, \quad (7.57)$$

где  $G_d(f)$  — спектр диффузного шума, действующего на  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ ;  $k_0 = 2\pi f/c$  — волновое число. Через функцию когерентно-

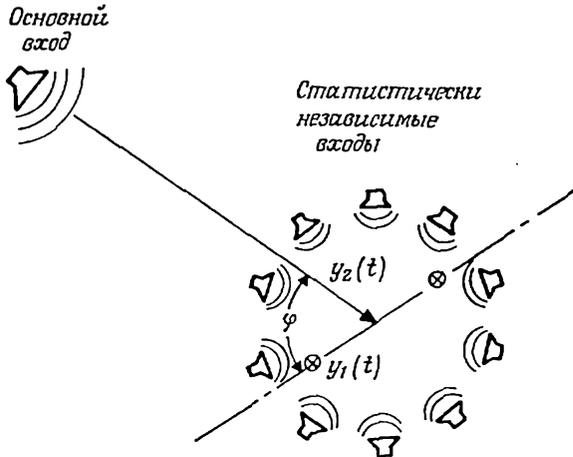


Рис. 7.7. Диффузный шум в точке выходных наблюдений.

сти и фазу диффузный шум описывается следующим образом:

$$\gamma_{12}^2(f) = \left( \frac{\sin k_0 d}{k_0 d} \right)^2, \quad \theta_{12}(f) = \begin{cases} 0 & \text{для положительных} \\ & \text{значений } G_{12}(f); \\ \pi & \text{для отрицательных} \\ & \text{значений } G_{12}(f). \end{cases} \quad (7.58)$$

Если в формулах (7.25) и (7.52) коэффициент затухания положить равным единице ( $\alpha=1$ ), то взаимный спектр процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , вызванных одним точечным источником, можно записать как

$$G_{12}(f) = G_p(f) [\cos k_t d - j \sin k_t d], \quad (7.59)$$

где  $G_p(f)$  — спектр точечного источника, вызвавшего  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ ;  $k_t = (2\pi f/c) \cos \varphi$  — следовое волновое число. Взаимный спектр диффузного шума, взаимодействующего с одним точечным источником, дается суммой выражений (7.57) и (7.59), т. е.

$$G_{12}(f) = G_p(f) \cos k_t d + G_d(f) \frac{\sin k_0 d}{k_0 d} - j G_p(f) \sin k_t d, \quad (7.60)$$

где  $G_p(f)$  — спектр вклада точечного источника, а  $G_d(f)$  — спектр вклада диффузного шума в выходные наблюдения. Суммарный

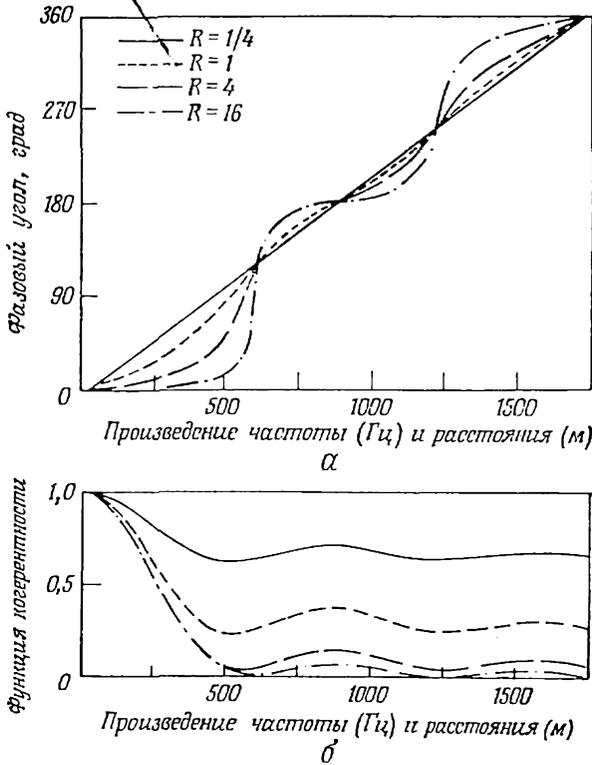


Рис. 7.8. Фазовый угол и функция когерентности между двумя выходами при комбинированном воздействии диффузного и точечного входных источников.  
 а — фазовые характеристики; б — функции когерентности.

спектр каждого выходного сигнала равен  $G_p(f) + G_d(f)$ . Функция когерентности и фазовый угол пары выходных сигналов имеют вид

$$\gamma_{12}^2(f) = [1 + R(f)]^{-2} \left[ \left( R(f) \frac{\sin k_0 d}{k_0 d} + \cos k_1 d \right)^2 + \sin^2 k_1 d \right], \quad (7.61a)$$

$$\theta_{12}(f) = \arctg \frac{\sin k_1 d}{R(f) \sin k_0 d / k_0 d + \cos k_1 d}, \quad (7.61б)$$

где  $R(f) = G_d(f) / G_p(f)$ . На рис. 7.8 приведены графики функций (7.61) для различных значений R при  $\varphi = 45^\circ$ . Обратите внимание, что на этих графиках фазовый угол между приемниками достигает величины  $\pm n\pi$  рад,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , на одной и той же частоте независимо от значения отношения R. Согласно формуле (7.61б),  $\sin k_1 d = 0$  соответствует фазовому углу 0,  $\pi$ ,  $2\pi$  и

т. д. Другими словами, изменение фазового угла на  $180^\circ$  происходит тогда, когда

$$k_n d = n\pi = (2\pi f/c) d \cos \varphi, \quad n=1,2,3,\dots \quad (7.62)$$

Следовательно, на частотах  $f_n$ , удовлетворяющих уравнению (7.62) и соответствующих фазовому углу  $180, 360^\circ$  и т. д., угол падения волн, исходящих из точечного источника, равен

$$\varphi = \arccos(nc/2f_n d) \quad (7.63)$$

независимо от наличия искажающего диффузного шума в полном согласии с формулой (7.56) при  $\theta_{12}(f) = \pi$  и  $n=1$ .

Для проверки приведенных выше результатов обратимся к акустическому эксперименту [7.3], проведенному в аэродина-

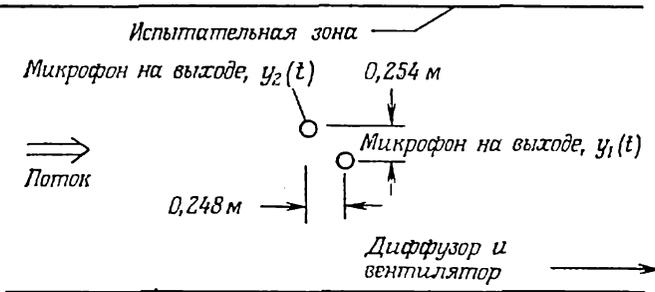


Рис. 7.9. Акустический эксперимент в аэродинамической трубе.

мической трубе (рис. 7.9). Два микрофона, снабженные обтекателями для исключения влияния шума потока, установлены в испытательной зоне аэродинамической трубы на расстоянии  $d=0,356$  м друг от друга. Угол падения акустических волн, проходящих по трубе, равен  $45,7^\circ$ . На рис. 7.10 приведены данные относительно фазового угла и функции когерентности, измеренные между двумя микрофонами в ходе работы трубы при скорости потока  $c=80$  м/с. Измерения производились с разрешением  $B_e=5$  Гц по  $n_d=256$  усреднениям. Отметим большое сходство экспериментальных данных с теоретическими результатами (рис. 7.8). Данные отчетливо свидетельствуют о наличии волн, исходящих от источника, находящегося вне испытательной зоны, и сильноного диффузного шума, действующего на выходные микрофоны. Диффузный шум вызван как шумом, создаваемым потоком, так и реверберацией, о которой будет сказано ниже. Первое изменение фазового угла на  $180^\circ$  происходит на частоте  $f=520$  Гц. Скорость распространения сигнала от источника равна в этом случае  $c=c_0-c_1$ , где  $c_0=340$  м/с (скорость звука в воздухе при комнатной температуре) и  $c_1=80$  м/с. Сле-

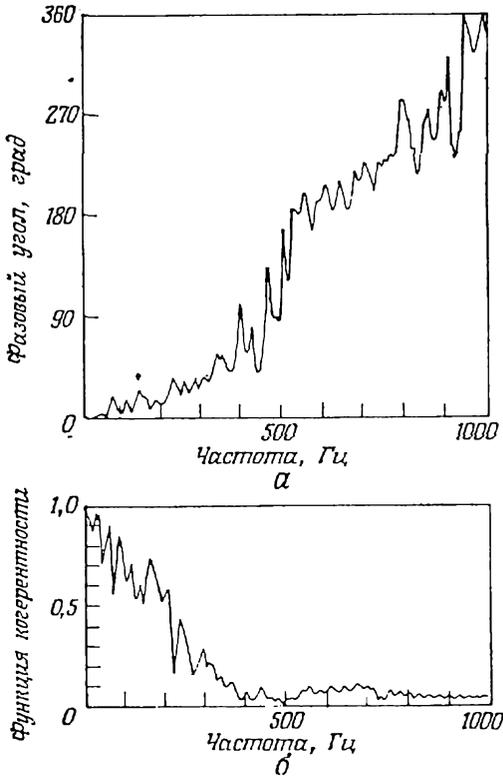


Рис. 7.10. Фазовый угол и функция когерентности между микрофонами в испытательной зоне аэродинамической трубы при скорости потока 80 м/с.

Разрешение по частоте  $\Delta f = 5$  Гц; число усреднений  $n_d = 256$ .

а — фазовая характеристика; б — функция когерентности. (Эти данные были получены в ходе экспериментов, проведенных для Исследовательского центра НАСА им. Эймса по контракту NAS2-8382.)

довательно,  $c = 260$  м/с, и из формулы (7.63) находим, что угол падения равен  $\varphi = \arccos[260/(2 \cdot 520 \cdot 0,356)] = 45,4^\circ$ ; этот результат очень хорошо согласуется с истинным углом  $\varphi = 45,7^\circ$ .

#### 7.3.4. Влияние реверберации и рассеяния

Реверберация сказывается в том случае, когда приемники сигнала окружены отражающими поверхностями, многократные отражения от которых приводят к сильному искажению  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ . Можно считать, что она происходит в среде, представляющей собой замкнутую систему, несущую стоячие волны, т. е. систему, описываемую большим числом слабодемпфированных нормальных мод (см. разд. 1.3.4). Реверберация очевидным об-

разом искажает фазовый угол между двумя наблюдениями  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , поскольку приемники выходных сигналов регистрируют волны, приходящие с направлений, отличных от направления на источник. Не столь очевидна возможность искажения при определенных условиях и функции когерентности  $\gamma^2_{12}(f)$ . Можно показать [7.4], что если среда, в которой распространяется сигнал, представляет собой слабодемпфированную резонансную систему, а для описания системы при данном разрешении по частоте  $B_e$  требуется большое число нормальных мод, то при малом коэффициенте затухания  $\zeta$  функция когерентности двух выходных процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  стремится к величине

$$\gamma^2_{12}(f) = \left( \frac{\sin 2\pi f d/c}{2\pi f d/c} \right)^2, \quad (7.64)$$

которая в точности совпадает с функцией когерентности в случае диффузного шума, определенной в формуле (7.58).

Удовлетворительное решение этой проблемы заключается в подавлении реверберации в максимально возможной степени. В действительности это не так трудно, как может показаться на первый взгляд, поскольку наибольший вред приносят отражения от поверхностей, находящихся позади приемников выходных сигналов (по направлению потока энергии, излучаемого источником). Поэтому путем установки поглотителей позади приемников выходных сигналов можно свести реверберацию к приемлемому уровню. Простой лабораторный акустический эксперимент (рис. 7.11) подтверждает это. Акустический источник входного сигнала и два выходных микрофона помещены в замкнутую оболочку, в которой образуется поле реверберации. Слой поглощающего материала толщиной 0,07 м, помещенный за микрофонами, подавляет реверберацию в такой степени, что наблюдаемые функции когерентности и фазовый угол между двумя микрофонами в среднем очень похожи на результаты, ожидаемые в идеальном случае (рис. 7.12).

Описанный способ подавления реверберации связан с определенным риском, так как поглотитель может быть установлен неправильно, т. е. не точно за приемниками выходных сигналов. Можно показать [7.5], что в этом случае фазовый угол между двумя точками в полуреверберирующей среде указывает направление потока из области реверберации независимо от положения источника. Поглощение в ограниченной области вызывает приток энергии в эту область, что может привести к ошибкам в определении фазы, если поглотитель установлен сбоку от приемников выходных сигналов, а не позади них. Дальнейший анализ проблем, связанных с реверберацией, проводится в разд. 9.2.3.

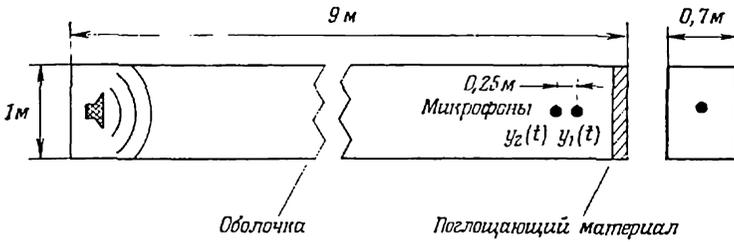


Рис. 7.11. Ревербирующий акустический шум.

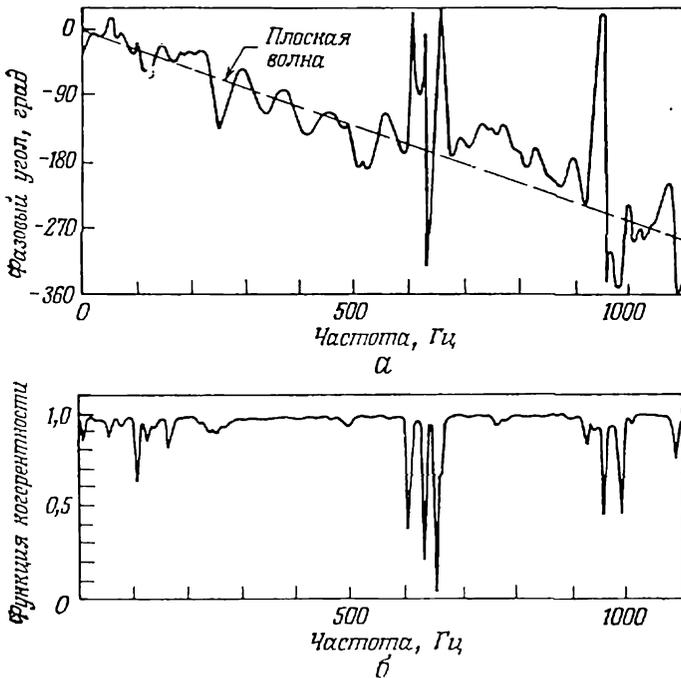


Рис. 7.12. Фазовый угол и функция когерентности между двумя акустическими выходами в поле реверберации.

Разрешение по частоте  $B_e = 2,5$  Гц; число усреднений  $n_d = 128$ .

$a$  — фазовая характеристика;  $b$  — функция когерентности.

При практическом использовании описанных здесь методов помимо реверберации трудности может вызвать появление на пути между входом и выходами каких-либо препятствий или неоднородностей. Как уже отмечалось в разд. 6.1.4, эти препятствия или неоднородности вызывают рассеяние энергии. Рас-

сеяние особенно плохо сказывается на точности измерений фазы, и для получения надежных результатов его следует исключить.

### 7.3.5. Получение данных и выборочные ошибки

Тщательная калибровка оборудования, предназначенного для получения и анализа данных, очень важна при обработке любых сигналов. Однако при решении задач локализации источника, описанных в разд. 7.3, особое значение имеет тщательная калибровка оборудования по фазе, поскольку именно данные о фазе представляют в этом случае первостепенный интерес. Ошибки при определении фазы могут появиться в любой части системы, предназначенной для получения и анализа данных, включая датчики, оборудование для предварительной обработки сигналов, аппаратуру записи и воспроизведения данных. Конечно, абсолютный фазовый сдвиг в отдельном измерении не имеет значения; к плохим последствиям приводит относительный фазовый сдвиг между двумя инструментальными каналами, определяющими  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ .

Относительные ошибки определения фазы могут быть двух видов: а) статические и б) динамические. Статические ошибки определения фазы (смещение) легко выявить путем сквозной калибровки измерительного оборудования, а затем устранить из анализируемых данных простым вычитанием. Для получения правильных результатов можно также повторить измерения, поменяв местами датчики. Если фазовый угол между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  определяется со статической ошибкой, которой соответствует запаздывание  $\tau_e = \theta_e(f) / 2\pi f$ , то истинное значение фазового угла равно

$$\theta_{12}(f)_c = \frac{\theta_{12}(f) + \theta_{21}(f)}{2} = \frac{2\pi f(\tau_1 + \tau_e) + 2\pi f(\tau_1 - \tau_e)}{2} = 2\pi f\tau_1. \quad (7.65)$$

Более сложно обнаружить и исправить динамические ошибки определения фазы. Простейший подход состоит в многократном повторении сквозной калибровки с целью получения меры фазовой стабильности оборудования.

Статистический анализ, проведенный в гл. 11, показывает, что случайная ошибка оценки фазового угла, даваемой формулой (7.28), выражается в виде среднеквадратичного отклонения оценки  $\hat{\theta}_{12}(f)$  следующим образом:

$$\sigma[\hat{\theta}_{12}(f)] \approx \arcsin \left\{ \frac{|1 - \gamma_{12}^2(f)|^{1/2}}{|\gamma_{12}(f)| \sqrt{2n_d}} \right\}, \quad (7.66)$$

где  $\sigma[\hat{\theta}_{12}(f)]$  измеряется в радианах, а  $n_d$  — число усреднений, использованных при вычислении спектра. В частном случае,

когда выражение в фигурных скобках мало, скажем меньше 0,1, формула (7.66) сводится к виду

$$\sigma[\hat{\theta}_{12}(f)] \approx \frac{[1 - \gamma_{12}^2(f)]^{1/2}}{|\gamma_{12}(f)| \sqrt{2n_d}}. \quad (7.67)$$

На практике неизвестную функцию когерентности в правой части формулы нужно заменить ее оценкой по выборочным данным.

Из формулы (7.67) видно, что для достижения высокой точности оценивания фазы требуется или устойчивое значение функции когерентности между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , или использование при вычислениях большого числа усреднений. Пусть, например, для надежной локализации источника нужно определить фазовый угол со среднеквадратичным отклонением  $\pm 1^\circ$ , или 0,0174 рад. Если измерение функции когерентности двух сигналов дало значение  $\hat{\gamma}_{12}^2 = 0,9$ , то необходимое число усреднений  $n_d \approx (1 - 0,9)/(2 \cdot 0,9 \cdot 0,0174^2) \approx 184$ . Такое число усреднений хотя и велико, но не превышает пределов разумного. С другой стороны, если бы измерения функции когерентности показали, что  $\hat{\gamma}_{12}^2 \approx 0,50$ , то  $n_d \approx (1 - 0,5)/(2 \cdot 0,5 \cdot 0,0174^2) \approx 1652$ , а реализация такой длины может оказаться практически недоступной.

В действительности проблема, связанная с ошибками оценивания фазы, не столь серьезна, как можно было бы заключить из вышесказанного, потому что один анализ обычно дает набор оценок фазового угла на многих различных частотах, как, например, на рис. 7.6. Ошибки оценивания фазы на различных частотах статистически независимы. Поэтому, если при бездисперсном распространении прямая линия хорошо аппроксимирует несколько оценок, вычисленных на разных частотах, то ошибка вдоль этой линии будет меньше, чем ошибка отдельных оценок фазы. Однако при использовании аппроксимирующих кривых нужно следить за тем, чтобы не были использованы оценки фазы на тех частотах, на которых могут появиться систематические ошибки из-за влияния шума (см. разд. 7.3.3) или на которых имеет место реверберация и (или) рассеяние (см. разд. 7.3.4 и 9.2.3).

### 7.3.6. Периодические источники

Способы локализации источника, развитые в разд. 7.3.1, особенно эффективны в том случае, когда источник периодический (с известным периодом), так как в этом случае анализ можно проводить на дискретных частотах. Следовательно, можно использовать узкополосный анализ и тем самым подавить влияние шума. Для иллюстрации этого рассмотрим эксперимент, в котором измерялось давление на фюзеляж впитового

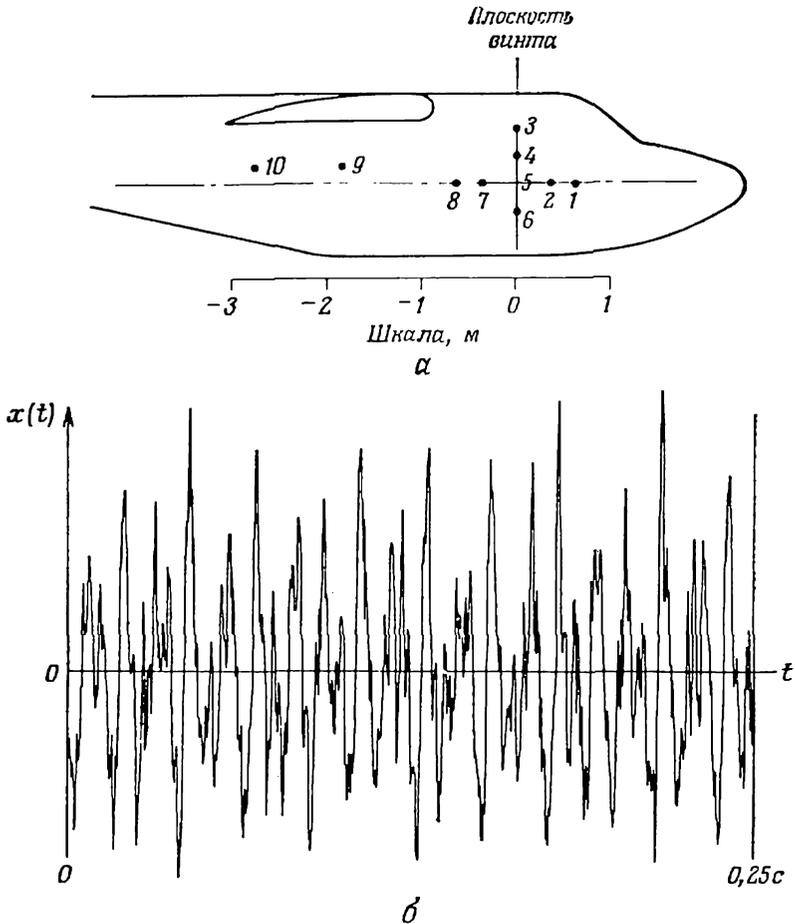


Рис. 7.13. Эксперимент по определению давления на фюзеляж винтового самолета.

*a* — расположение датчиков; *b* — типичная реализация зависимости давления от времени.

самолета с поршневыми двигателями (рис. 7.13). Ударное давление на фюзеляж измерялось при помощи системы микрофонов, установленных заподлицо с фюзеляжем (рис. 7.13, *a*). Типичная реализация зависимости давления от времени при наземных испытаниях показана на рис. 7.13, *b*. Заметим, что зависимость эта довольно сложная, поскольку она представляет сумму давлений, вызываемых винтом, выхлопом и другими разнородными источниками. Типичные результаты измерения фазового угла и функции когерентности между точками 4 и 5 в плоскости винта при разрешении  $B_e=4$  Гц и  $n_d=100$  усреднениях

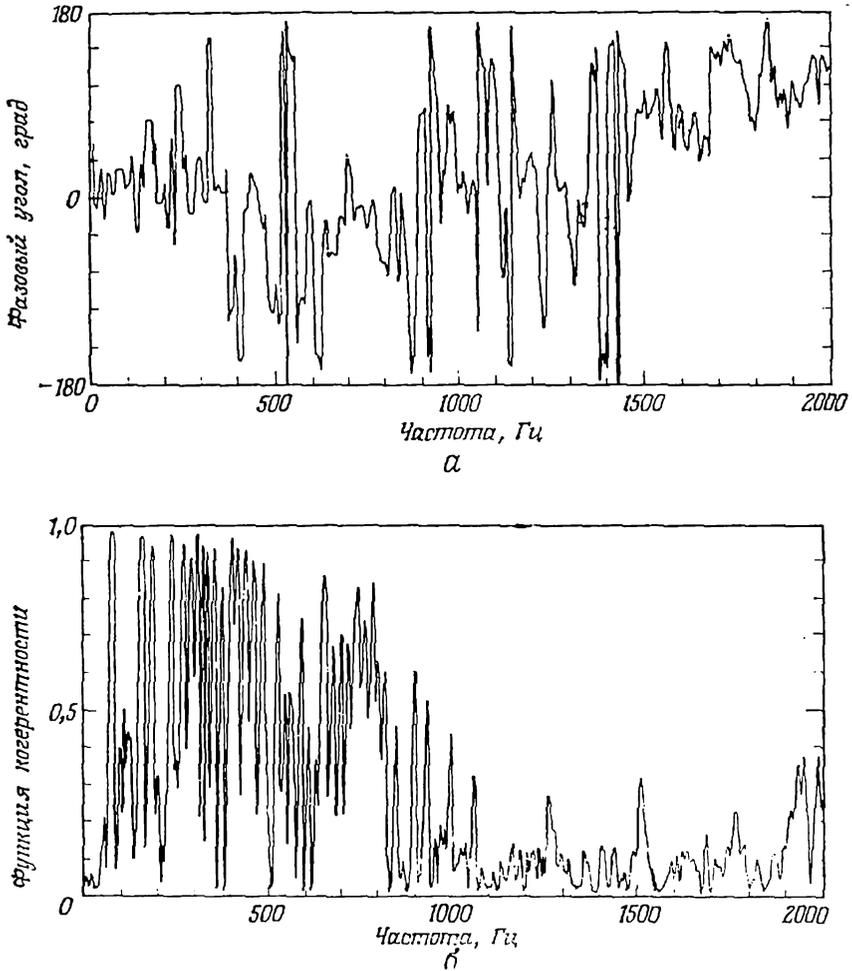


Рис. 7.14. Фазовый угол и функция когерентности между давлениями в точках 4 и 5 на винтовом самолете в ходе наземных испытаний при 2600 об/мин.

Разрешение по частоте  $B_c=4$  Гц; число усреднений  $n_s=100$ .

а — фазовая характеристика; б — функция когерентности. (Данные, использованные на рис. 7.14–7.16, получены в ходе экспериментов, проведенных для Исследовательского центра НАСА в Лэнгли по контракту NAS1-14611.)

показаны на рис. 7.14. Эти результаты на первый взгляд тоже кажутся довольно запутанными.

Если же ограничиться только давлением, производимым винтом, то результаты рис. 7.14 можно значительно упростить, поскольку известно, что влияние винта сосредоточено на лопа-

стной частоте винта и ее гармониках, т. е.

$$f_k = k \times (\text{число оборотов в минуту двигателя}) \times \\ \times (\text{передаточное число винта}) \times (\text{число лопастей}), \\ k = 1, 2, 3, \dots \quad (7.68)$$

На рис. 7.15, а приведены данные о фазовом угле, взятые с рис. 7.14, а, только для лопастных частот винта при двух раз-

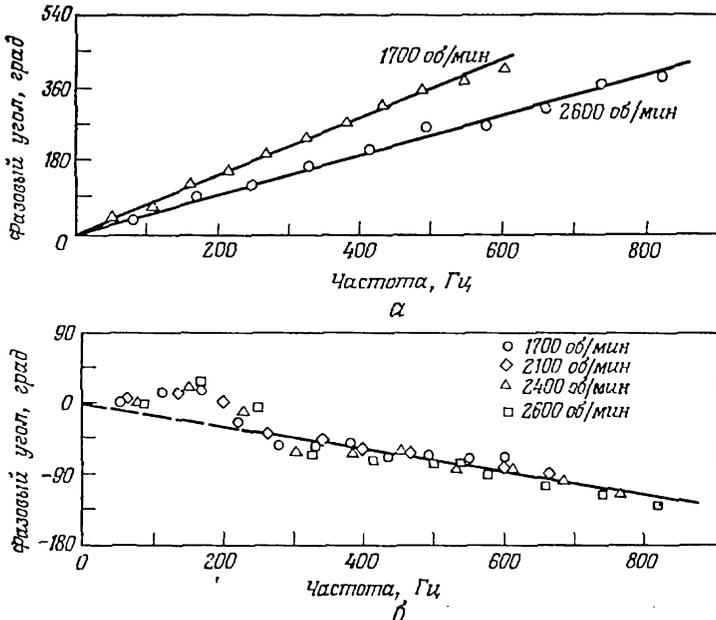


Рис. 7.15. Значения фазового угла на лопастных частотах в ходе наземных испытаний при различных скоростях работы двигателя.

а — между точками 4 и 5 в плоскости винта; б — между точками 1 и 2 вдоль продольной оси.

личных скоростях работы двигателя. Заметим, что теперь имеет место линейная зависимость фазового угла от частоты, характерная для бездисперсного распространения сигнала. Отметим также, что наклон фазовой характеристики меняется с изменением числа оборотов двигателя. Скорости распространения возмущения, определяемые формулой (7.55), соответствуют проекции скорости конца лопасти винта на место расположения датчиков. Это очень важный результат, так как позволяет предположить, что давление, оказываемое винтом в этих точках, вызвано аэродинамическими силами, а не акустическим шумом, скорость распространения которого всегда равна скорости звука.

Продолжим наш пример и рассмотрим рис. 7.15, б, где представлены данные о фазе, полученные на лопастных частотах винта между точками 1 и 2, расположенными вдоль продольной оси перед винтом при четырех различных скоростях работы двигателя. В этом случае на частотах выше 200 Гц видна линейная зависимость фазового угла с одним и тем же наклоном при

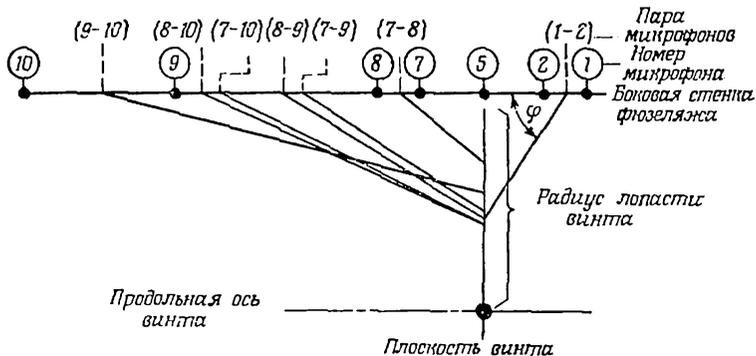


Рис. 7.16. Локализация акустического центра производимого винтом шума на основе данных о фазе, полученных от нескольких пар датчиков.

любой скорости вращения двигателя, откуда можно заключить, что давление вызывается акустическим шумом; на частотах ниже 200 Гц преобладают аэродинамические силы. Подставив в формулу (7.56) скорость звука  $c=340$  м/с,  $d=0,254$  м,  $\theta_{12}(f)=\pi/2$  при  $f=610$  Гц, получим, что угол падения акустической волны равен

$$\varphi = \arccos \frac{340 \cdot \pi/2}{2\pi \cdot 610 \cdot 0,254} = 57^\circ.$$

Воздушный винт, конечно, представляет собой распределенный источник шума, но вычисления подобного рода с использованием результатов разд. 7.3.1 можно провести с целью определения эквивалентного акустического центра шума, производимого винтом. Результаты таких вычислений по фазовым зависимостям, проведенных для различных пар микрофонов (рис. 7.13), представлены на рис. 7.16. Заметим, что направления, полученные для всех пар микрофонов, определяют положение акустического центра примерно в одной и той же области винта.

#### 7.4. Идентификация системы по наблюдениям ее выходных процессов

В гл. 4 и 5 показано, что, основываясь на анализе входных и выходных процессов, можно определить структуру системы. Нередко, однако, входной сигнал не поддается точному измере-

нию или генерированию. Особенно часто это бывает при изучении поведения больших инженерных сооружений, таких, как высотные здания, длинные мосты или платформы в открытом море. Если удастся использовать искусственный сигнал, то динамические характеристики таких конструкций можно оценить методами, изложенными в разд. 5.1.2. Во многих случаях, однако, разумные оценки основных динамических свойств можно получить путем соответствующего анализа только измерений выходных процессов, представляющих собой реакцию конструкции на естественные динамические силы, случайные по своему характеру, например ветровую нагрузку на здания, воздействие транспортного потока на мосты или действие волн на конструкции в открытом море [7.6, 7.7].

#### 7.4.1. Определение резонансных частот

Если слабодемпфированная конструкция подвержена случайному воздействию, то, как следует из соотношения (4.8), спектр реакции, измеренный в любой точке конструкции, достигает максимума на тех же частотах, на которые приходится максимум либо спектра воздействия, либо частотной характеристики конструкции. В разд. 1.3 показано, что острые максимумы частотной характеристики слабодемпфированной механической системы располагаются на частотах, соответствующих нормальным модам системы (резонансных частотах). Следовательно, можно считать, что максимумы спектра реакции свидетельствуют, как правило, или о максимумах спектра воздействия, или о нормальных модах конструкции.

Для того чтобы отличить максимумы выходного спектра, обусловленные вибрационными модами конструкции, от максимумов, вызванных пиками входного спектра, можно воспользоваться тем фактом, что в первом случае все точки конструкции будут либо в фазе, либо в противофазе в зависимости исключительности от формы нормальной моды (см. разд. 1.3.4). Рис. 7.17 иллюстрирует это положение для случая мод изгиба в конструкции типа консольной балки. Показанные на этом рисунке две продольно расположенные точки перемещаются при поперечной вибрации в фазе в случае первой и третьей мод изгиба и в противофазе при второй и четвертой модах изгиба. Моды изгиба от мод кручения можно отличить при помощи дополнительных измерений фазового угла между двумя датчиками, расположенными на противоположных сторонах конструкции на перпендикуляре к ее продольной оси. Выходные сигналы от любых двух таких датчиков, расположенных в поперечной плоскости, должны быть в фазе в случае мод изгиба и в противофазе для мод кручения при условии, что моды полностью не

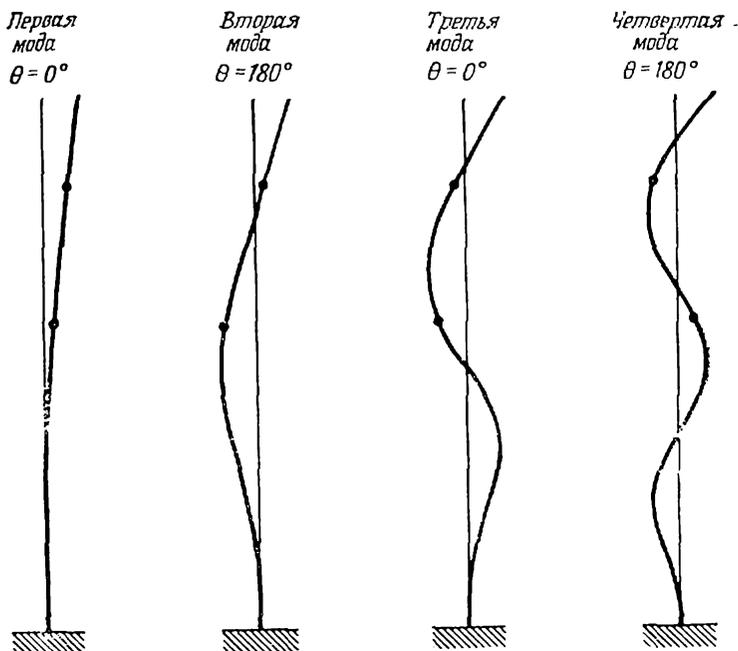


Рис. 7.17. Первые четыре нормальные моды консольной балки.

связаны. На тех частотах, на которых максимум выходного спектра вызван максимумом спектра воздействия, а не реакцией конструкции на резонансной частоте, фазовый угол между двумя выходными измерениями примет значение между нулем и  $180^\circ$ .

Для иллюстрации этих выводов рассмотрим эксперимент, проведенный на большой конструкции в открытом море (рис. 7.18). На конструкции, которая уходит под уровень моря и прочно закреплена на его дне, установлены акселерометры, производящие измерения перемещения конструкции как целого, при этом  $y_1(t)$  находится на правой ближайшей к берегу опоре недалеко от вершины конструкции,  $y_2(t)$  — на правой ближайшей к берегу опоре чуть выше уровня моря и  $y_3(t)$  — на левой дальней от берега опоре чуть выше уровня моря. Все данные анализировались при разрешении по частоте  $B_e = 0,04$  Гц и  $n_d = 55$  усреднениях.

Спектры сигналов, снимаемых с трех акселерометров, регистрирующих волновое воздействие, приведены на рис. 7.19. На всех трех графиках, соответствующих трем акселерометрам, видны спектральные пики, но эти графики не позволяют иден-

тифицировать искомые нормальные моды конструкции. На рис. 7.20 показаны модули взаимных спектров, фазовые характеристики и функции когерентности. Эти результаты более показательны. В частности, модули взаимных спектров между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ , а также между  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$  обнаруживают три

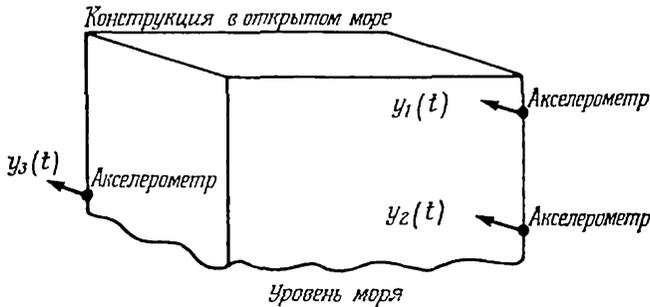


Рис. 7.18. Эксперимент по определению реакции на волновое воздействие конструкции в открытом море.

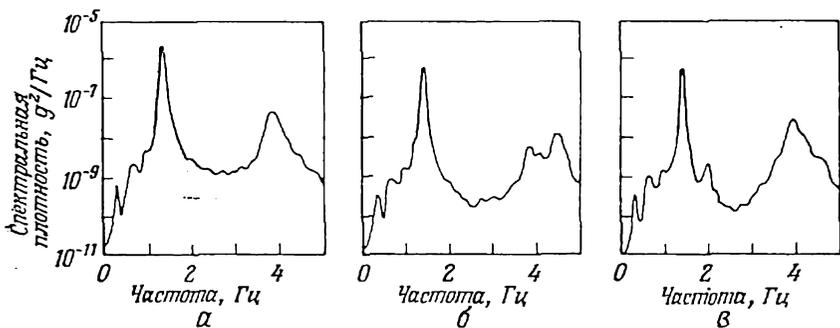


Рис. 7.19. Спектры реакции конструкции в открытом море.

Разрешение по частоте  $B_p=0,04$  Гц; число усреднений  $n_d=55$ .

а)  $y_1(t)$ ; б)  $y_2(t)$ ; в)  $y_3(t)$ .

выделяющихся максимума на частотах примерно 1,4, 3,9 и 4,5 Гц. Кроме того, имеется несколько менее значительных максимумов на частотах ниже 1 Гц, но они, вероятно, свидетельствуют о спектральных пиках волнового воздействия. Фаза взаимного спектра, соответствующая этим трем главным максимумам, равна либо нулю, либо  $180^\circ$ , что говорит о резонансной реакции конструкции. Данные о фазе сведены в табл. 7.1. Результаты при 1,4 Гц указывают на моду изгиба (колебания) конструкции, поскольку все измерения находятся в фазе. При 3,9 Гц измерения находятся в фазе при продольном расположении датчиков и в противофазе при их поперечном расположении; сле-

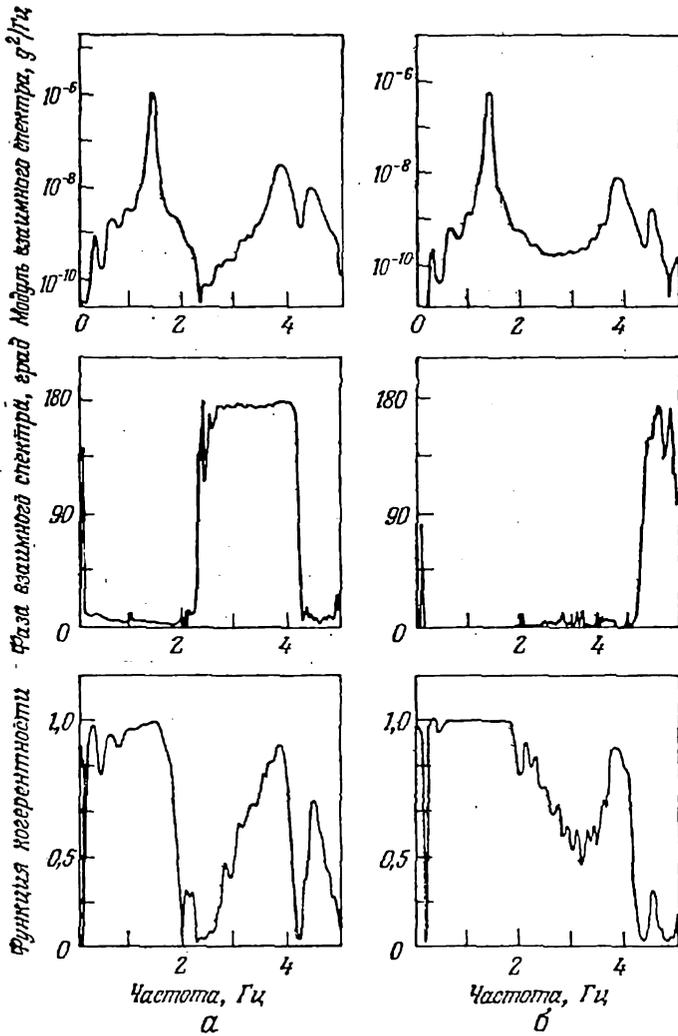


Рис. 7.20. Взаимные спектры и функция когерентности между выходными датчиками на конструкции в открытом море.  
 Разрешение по частоте  $B_c=0,04$  Гц; число усреднений  $n_d=55$ .  
 а — между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$ ; б — между  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$ .

Таблица 7.1

Результаты измерения фазы реакции конструкции в открытом море

Пара измерений	Расположение датчиков	Относительная фаза на главных частотах, град		
		1,4 Гц	3,9 Гц	4,5 Гц
$y_1(t)$ и $y_2(t)$	Продольное	0	0	180
$y_2(t)$ и $y_3(t)$	Поперечное	0	180	0

довательно, имеет место мода кручения. При 4,5 Гц, наоборот, измерения находятся в противофазе при продольном расположении датчиков и в фазе при их поперечном расположении, что указывает на наличие моды изгиба более высокого порядка на этой частоте.

Функции когерентности между  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  и между  $y_2(t)$  и  $y_3(t)$  изображены на рис. 7.20. Эти функции когерентности нужны для определения случайных ошибок оценивания фаз, что в свою очередь позволяет установить статистическую значимость расхождений между ожидаемыми значениями фазы и ее оценками [см. формулу (7.66)]. Однако функции когерентности могут оказаться полезными и при определении форм нормальных мод (см. следующий раздел). Заметим, что функции когерентности на рис. 7.20 имеют максимумы на частотах идентифицированных нормальных мод. Это является следствием того, что нормальные моды появляются как острые максимумы выходного спектра, и поэтому отношение сигнала к шуму максимально на этих частотах; подробнее об этом см. в разд. 7.1.

#### 7.4.2. Определение форм нормальных мод

Если частоты нормальных мод определены, то теоретически можно определить как порядок, каждой нормальной моды, так и ее форму, если на интересующей нас конструкции установить достаточное число датчиков. Относительная форма  $i$ -й нормальной моды может быть приближенно определена в  $r$  дискретных точках по измерениям в данном направлении по следующей формуле:

$$\varphi_i(y_j) = [G_{y_j y_j}(f_i)]^{1/2}, \quad i=1,2,3,\dots; \quad j=1,2,\dots,r. \quad (7.69)$$

Здесь  $G_{y_j y_j}(f_i)$  — значение спектральной плотности выходного процесса на частоте  $i$ -й нормальной моды в  $j$ -й точке. Вообще говоря, для уверенного определения нормальной моды  $i$ -го порядка требуется  $r=i$  измерений, но для точного и детального определения формы  $i$ -й нормальной моды может понадобиться

значительно большее число измерений. Конечно, если в нашем распоряжении есть какая-то дополнительная информация, например если форму нормальной моды можно предсказать по результатам аналитического изучения конструкции, то для определения таких мод и оценки их формы можно ограничиться меньшим числом наблюдений и соответствующими аналитическими результатами.

Но даже когда можно сделать достаточное число измерений, существует ряд ограничений на применение формулы (7.69). Спектральные пики при измерениях выходного спектра в действительности приходится на резонансные частоты, а не на собственные частоты незатухающих колебаний, что желательно для определения нормальных мод. Из формулы (1.56) следует, что эти частоты близки между собой только при очень малых значениях коэффициента затухания мод  $\zeta$ . Поэтому применение этого метода ограничено случаями, когда коэффициент затухания невелик, скажем  $\zeta < 0,05$ .

Значительный внешний шум в наблюдениях на выходе и взаимодействие нормальных мод приводят к искажению результатов. Однако искажения этого типа можно обнаружить измерениями когерентности и фазового угла между выходными данными. Согласно формуле (7.10), внешний шум в наблюдении, производимом в определенном месте, приводит к тому, что функция когерентности между этим наблюдением и всеми другими будет меньше единицы. Взаимодействие между нормальными модами сдвигает фазовый угол, по крайней мере между некоторыми наблюдениями, на величину, отличную от нуля или  $180^\circ$ . Можно руководствоваться следующим общим правилом: спектр в определенной точке нельзя использовать для определения формы нормальной моды, если функция когерентности между этим наблюдением и всеми другими не близка к единице, а фазовый угол отличается от нуля или  $180^\circ$ . Например, значения спектральной плотности при 1,4 Гц (рис. 7.19 и 7.20) дадут точную оценку относительного отклонения моды в трех использованных точках измерения, поскольку значения функции когерентности между измерениями на этой частоте близки к единице, а фазовые углы — к нулю. На частоте 3,9 Гц фазовые данные все еще хорошие, но значение функции когерентности составляет около  $\gamma^2 = 0,9$ . Это указывает на то, что значения спектральной плотности незначительно искажены внешним шумом, но все же они позволяют оценить относительные отклонения моды с разумной точностью. На частоте 4,5 Гц функция когерентности уменьшается до  $\gamma^2 = 0,25$ . Это означает, что одна или несколько оценок спектра на этой частоте искажены сильным внешним шумом, и их использование приведет к значительно завышенной оценке относительного отклонения моды.

### 7.4.3. Оценивание коэффициента затухания системы

Для каждой нормальной моды, определенной способом, описанным в разд. 7.4.1, иногда можно по выходным спектральным и (или) взаимно-спектральным данным оценить эквивалентный коэффициент вязкого затухания. В частности, должны выполняться четыре условия: а) спектр воздействия  $G_{xx}(f)$  должен быть достаточно равномерным в окрестности частоты нормальной моды, б) коэффициент затухания моды  $\zeta_i$  должен быть небольшим, в) разрешение по частоте анализа  $B_e$  должно быть наиниже, чем полоса пропускания моды по уровню половинной энергии  $B_i$ , и г) мода не должна иметь значительных пересечений с соседними модами. Приближенно можно считать, что должны выполняться следующие условия:

- а)  $G_{xx}(f) \approx$  константа для  $f_i - 3B_i \leq f \leq f_i + 3B_i$ ;
- б)  $\zeta_i < 0,05$ ;
- в)  $B_e < 0,2B_i$ ;
- г)  $(f_i - f_{i-1}) > 2(B_i + B_{i-1})$ .

Если эти условия выполнены, то, как следует из формулы (1.59), эквивалентный коэффициент вязкого затухания  $i$ -й моды оценивается следующим образом:

$$\zeta_i = B_i / 2f_i, \quad (7.70)$$

где  $B_i$  — полоса пропускания по уровню половинной энергии спектрального пика, связанного с  $i$ -й модой. Величину  $B_i$  предпочтительно вычислять по взаимному спектру между двумя наблюдениями выходных процессов, а не по автоспектру, поскольку взаимный спектр менее подвержен искажению шумом.

Для иллюстрации применения формулы (7.70) предположим, что данные, представленные на рис. 7.19, удовлетворяют условиям «а» и «б» из числа перечисленных выше. Полосы пропускания по уровню половины энергии и оценки коэффициентов затухания трех нормальных мод, определенных главными максимумами на взаимных спектрах, представленных на рис. 7.20, равны:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1,4 \text{ Гц}, & B_1 &= 0,10 \text{ Гц}, & \zeta_1 &= 0,036; \\ f_2 &= 3,9 \text{ Гц}, & B_2 &= 0,30 \text{ Гц}, & \zeta_2 &= 0,038; \\ f_3 &= 4,5 \text{ Гц}, & B_3 &= 0,23 \text{ Гц}, & \zeta_3 &= 0,025. \end{aligned}$$

Однако первый спектральный максимум при  $f_1 = 1,4$  Гц не удовлетворяет требованию к разрешению по частоте:  $B_e = 0,04$  Гц =  $= 0,4 B_1$ , что больше максимально допустимого значения  $0,2 B_1$ , а спектральные максимумы при  $f_2 = 3,9$  Гц и  $f_3 = 4,5$  Гц не удов-

летворяют условию, касающемуся пересечений соседних мод, так как  $f_3 - f_2 = 0,6 \text{ Гц} = 1,1(B_3 + B_2)$ , что меньше минимально допустимого значения  $2(B_3 + B_2)$ . Нарушение этих двух условий приводит к завышенным оценкам коэффициента затухания; следовательно, вычисленные выше значения  $\zeta$ , вероятно, слишком велики.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 7.1. Carter G. C. Time Delay Estimation, NUSC TR-5335, Naval Underwater Systems Center, New London, Connecticut, April 1976.
- 7.2. Cron B. J., Sherman C. H. Spatial-Correlation Functions for Various Noise Models, *Journal of the Acoustical Society of America*, 34, No. 11, 1732 (November 1962).
- 7.3. Piersol A. G. Use of Coherence and Phase Data Between Two Receivers in Evaluation of Noise Environments, *Journal of Sound and Vibration*, 56, No. 2, 215 (1978).
- 7.4. Morrow C. T. Point-to-Point Correlation of Sound Pressures in Reverberant Chambers, *Shock and Vibration Bulletin*, No. 39 (1969).
- 7.5. Blake W. K., Waterhouse R. V. The Use of Cross-Spectral Density Measurements in Partially Reverberant Sound Fields, *Journal of Sound and Vibration*, 54, No. 4, 589 (1977).
- 7.6. Abel-Ghaffer A. M., Housner G. W. Ambient Vibration Tests of Suspension Bridge, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, 104, No. EM5, 983 (1978).
- 7.7. Begg R. D., Mackenzie A. C., Dodds C. J., Loland O. Structural Integrity Monitoring Using Digital Processing of Vibration Signals, Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 2549, Vol. 2, 1976.

## Глава 8

### СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРОЦЕССАМИ НА ВХОДЕ И ВЫХОДЕ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ

Эта глава посвящена выводу основных соотношений между процессами на входе и выходе многомерных систем. Предполагается, что на вход системы поступают реализации стационарных (эргодических) или переходных случайных процессов с нулевыми математическими ожиданиями, а системы линейны и имеют постоянные параметры.

#### 8.1. Многомерные системы

Рассмотрим  $q$  доступных измерению процессов  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , поступающих на вход  $q$  линейных систем с не зависящими от времени частотными характеристиками  $H_i(f)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ . На выходе системы наблюдается один процесс  $y(t)$ , который представляет собой сумму линейных преобразований  $v_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , а все отклонения от этой идеальной модели включаются в неизвестную аддитивную помеху  $n(t)$  (рис. 8.1). При оптимальном в среднеквадратичном смысле оценивании частотных характеристик  $H_i(f)$  процесс  $n(t)$  не коррелирован (не когерентен) с входными процессами  $x_i(t)$ . Такая модель вполне соответствует реальной ситуации, когда задача заключается в оценивании частотных характеристик  $H_i(f)$  и помехи  $n(t)$  по измеренным значениям процессов  $x_i(t)$  и  $y(t)$ .

Если одни и те же входные процессы генерируют несколько подлежащих исследованию выходных процессов, как в случае систем со многими входами и многими выходами, то диаграмма, подобная рис. 8.1, должна строиться для каждого процесса на выходе системы. Это позволяет свести такую многомерную систему к набору более простых систем со многими входами, но с одним выходным процессом.

Чтобы подчеркнуть, насколько важно производить анализ именно в частотной области, мы дадим здесь вывод всех соотношений, не обращаясь к ковариационным или взаимным ковариационным функциям. Конечно, при желании можно получить соответствующие формулы и для статистических характеристик, зависящих от времени, а не от частоты, но во многих инженерных приложениях, связанных с определением зависящих от ча-

стоты характеристик системы, в них вообще нет необходимости. Однако они могут оказаться нужными в других случаях, когда речь идет об определении запаздывания в различных трактах системы (см. гл. 6).

Для упрощения формул будут использоваться двусторонние спектральные плотности  $S(f)$ , а не односторонние [см. уравне-

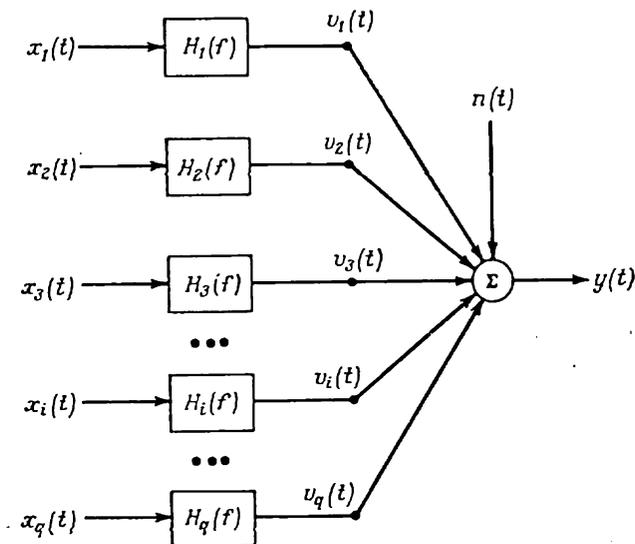


Рис. 8.1. Система со многими входными процессами и одним процессом на выходе.

ния (3.45)—(3.47)]. Однако все полученные соотношения остаются справедливыми и при замене  $S(f)$  на односторонние спектры  $G(f)$ . Наконец, для упрощения обозначений все финитные преобразования Фурье будут обозначаться просто прописными буквами без указания зависимости от частоты и от длины реализации. Например, в принятой до сих пор системе обозначений основные уравнения для преобразования Фурье выходного процесса  $y(t)$ , соответствующие модели, показанной на рис. 8.1, имеют вид

$$Y(f, T) = \sum_{i=1}^q V_i(f, T) + N(f, T), \quad (8.1)$$

$$V_i(f, T) = H_i(f) X_i(f, T), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (8.2)$$

где  $Y(f, T)$ ,  $V_i(f, T)$ ,  $N(f, T)$  и  $X_i(f, T)$  — преобразования Фурье процессов  $y(t)$ ,  $v_i(t)$ ,  $n(t)$  и  $x_i(t)$  соответственно, рассчитанные

по реализациям достаточно большой длительности  $T$ . В системе обозначений, принятой в этой главе, уравнения (8.1) и (8.2) переписуются в виде

$$Y = \sum_{i=1}^q V_i + N, \quad V_i = H_i X_i, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (8.3)$$

### 8.1.1. Основные соотношения между входными и выходными процессами

Согласно уравнению (8.3), произведение  $Y^*$  и  $Y$  имеет вид

$$Y^*Y = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_i^* H_j X_i^* X_j + N^*N. \quad (8.4)$$

Математические ожидания двух других слагаемых равны нулю, если процессы  $n(t)$  и  $x_i(t)$  не коррелированы. Кроме того, согласно тому же уравнению (8.3), имеем

$$Y^*Y = \sum_{i=1}^q H_i^* X_i^* Y + N^*Y. \quad (8.5)$$

По определению [см. формулу (3.45)] математическое ожидание величины  $Y^*Y/T$  при  $T \rightarrow \infty$  переходит в спектральную плотность процесса  $y(t)$ , так что, согласно (8.4),

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_i^* H_j S_{ij} + S_{nn} \quad (8.6)$$

или, согласно (8.5),

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^q H_i^* S_{iy} + S_{ny}. \quad (8.7)$$

При конечном значении  $T$  спектральные плотности определяются формулами

$$\begin{aligned} S_{yy} &= E[Y^*Y]/T, & S_{ij} &= E[X_i^*X_j]/T, \\ S_{nn} &= E[N^*N]/T, & S_{iy} &= E[X_i^*Y]/T, \\ S_{ny} &= E[N^*Y]/T, & S_{in} &= E[X_i^*N]/T. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Заметим, что если  $S_{in} = 0$ , то

$$S_{ni} = S_{nn}. \quad (8.9)$$

Кроме того, поскольку  $S_{yy}^* = S_{yy}$  и  $S_{iy}^* = S_{iy}$ , уравнение (8.7) можно переписать в виде

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^q H_i S_{yi} + S_{ny}. \quad (8.10)$$

Заменяя в формуле (8.3) индекс суммирования на  $j$  и умножив обе части уравнения на  $X_i^*$ , получим

$$X_i^* Y = \sum_{j=1}^q H_j X_i^* X_j + X_i^* N, \quad (8.11)$$

откуда после перехода к математическим ожиданиям и деления на  $T$  имеем

$$S_{iy} = \sum_{j=1}^q H_j S_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, q, \quad (8.12)$$

причем  $S_{in} = 0$ .

Соотношение (8.12) представляет собой систему уравнений, из которой можно найти  $q$  неизвестных частотных характеристик  $H_j(f)$  (при условии что система хорошо определена и все спектральные плотности  $S_{iy}$  и  $S_{ij}$  известны). Рекомендуемые вычислительные методы обсуждаются в гл. 10.

### 8.1.2. Оптимальные частотные характеристики

Согласно уравнению (8.3), преобразование Фурье помехи  $n(t)$  имеет вид

$$N = Y - \sum_{i=1}^q H_i X_i, \quad (8.13)$$

а ее комплексно сопряженная величина равна

$$N^* = Y^* - \sum_{j=1}^q H_j^* X_j^*. \quad (8.14)$$

После перемножения этих уравнений будем иметь

$$\begin{aligned} N^* N = Y^* Y - \sum_{i=1}^q H_i Y^* X_i - \sum_{j=1}^q H_j^* X_j^* Y + \\ + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_j^* H_i X_j^* X_i. \end{aligned} \quad (8.15)$$

перейдя к математическим ожиданиям и разделив на  $T$ , получим

$$S_{nn} = S_{yy} - \sum_{i=1}^q H_i S_{yi} - \sum_{j=1}^q H_j^* S_{jy} + \sum_{l=1}^q \sum_{j=1}^q H_j^* H_l S_{jl}. \quad (8.16)$$

Это уравнение определяет спектральную плотность  $S_{nn}$  при любом выборе частотных характеристик  $H_j$  линейной системы с постоянными параметрами. Система называется *оптимальной*, если ей соответствует минимальное значение спектральной плотности  $S_{nn}$  при всех возможных выборах частотных характеристик  $H_j$ . Как показано в разд. 5.1.1, оптимальные частотные характеристики определяются из условий

$$\frac{\partial S_{nn}}{\partial H_j} = 0, \quad \frac{\partial S_{nn}}{\partial H_j^*} = 0 \quad (8.17)$$

при фиксированных  $H_j^*$  и  $H_j$  в первом и втором уравнениях (8.17) соответственно. Имея это в виду, легко показать, что

$$\frac{\partial S_{nn}}{\partial H_j^*} = -S_{jy} + \sum_{i=1}^q H_i S_{ji} = 0, \quad (8.18)$$

откуда следует

$$S_{jy} = \sum_{i=1}^q H_i S_{ji}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (8.19)$$

Таким образом, равенство (8.13) действительно приводит к условию  $S_{jn} = 0$  при всех  $j$ .

Если считать, что входные процессы  $x_i(t)$  не коррелированы друг с другом, то уравнения (8.12) и (8.19) принимают вид

$$S_{jy} = H_j S_{jj}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (8.20)$$

Другими словами, в этом случае вся система, изображенная на рис. 8.1, сводится к комбинации простых систем с одним входом и одним выходом, и каждая частотная характеристика  $H_j$  может быть определена без учета зависимости от других трактов системы. Понятно, однако, что входные процессы, поступающие на другие тракты системы, влияют на функцию когерентности и на выборочную изменчивость оценок  $H_j$ , полученных по данным измерений.

### 8.1.3. Система с двумя входами и одним выходом

Для того чтобы лучше понять основные этапы анализа систем с произвольным числом входов, рассмотрим более детально частный случай системы с двумя входными процессами и од-

ним процессом на выходе (рис. 8.2). Функции  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  представляют собой произвольные стационарные или переходные случайные процессы, вообще говоря, коррелированные друг с другом. Задача заключается в определении частотных характеристик  $H_1(f)$ ,  $H_2(f)$  и спектральной плотности  $S_{nn}(f)$  по измерениям процессов  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  и  $y(t)$ .

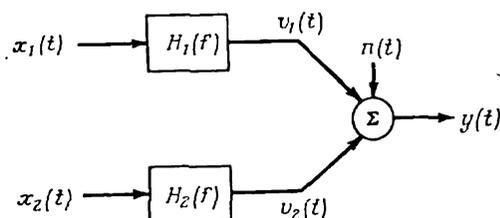


Рис. 8.2. Система с двумя входными процессами и одним процессом на выходе.

При  $q=2$  система уравнений (8.12) принимает вид

$$S_{1y} = H_1 S_{11} + H_2 S_{12}, \quad S_{2y} = H_1 S_{21} + H_2 S_{22}. \quad (8.21)$$

Пусть функция когерентности между  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  отлична от единицы:

$$\gamma_{12}^2 = \frac{|S_{12}|^2}{S_{11}S_{22}} \neq 1, \quad (8.22)$$

т. е. входные процессы не связаны строго линейной зависимостью. Тогда решение системы уравнений (8.21) имеет вид

$$H_1 = \frac{S_{22}S_{1y} - S_{12}S_{2y}}{S_{11}S_{22} - |S_{12}|^2} = \frac{S_{1y} \left[ 1 - \frac{S_{12}S_{2y}}{S_{22}S_{1y}} \right]}{S_{11} [1 - \gamma_{12}^2]}, \quad (8.23)$$

$$H_2 = \frac{S_{11}S_{2y} - S_{21}S_{1y}}{S_{11}S_{22} - |S_{12}|^2} = \frac{S_{2y} \left[ 1 - \frac{S_{21}S_{1y}}{S_{11}S_{2y}} \right]}{S_{22} [1 - \gamma_{12}^2]}.$$

Заметим, что при  $S_{12}=0$  и  $\gamma_{12}^2=0$  эти уравнения сводятся к виду

$$H_1 = S_{1y}/S_{11}, \quad H_2 = S_{2y}/S_{22}, \quad (8.24)$$

что соответствует рассмотренному в гл. 4 случаю системы с одним входным и одним выходным процессами.

Случай системы с полностью коррелированными входами ( $\gamma_{12}^2=1$ ) можно рассмотреть отдельно. Если функция когерентности между входными процессами  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  равна единице, то они связаны строго линейно. В этом случае следует принять

во внимание наличие соответствующей линейной системы, связывающей эти процессы (рис. 8.3). Первый входной процесс  $x_1(t)$  дает вклад в выходной процесс  $y(t)$  по двум трактам, и

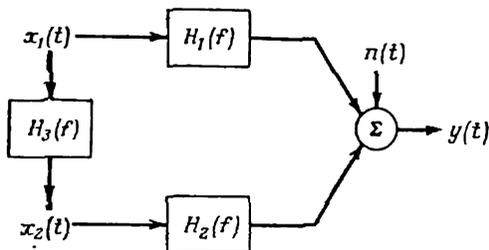


Рис. 8.3. Система с двумя полностью коррелированными входными процессами.

полную частотную характеристику, связывающую  $y(t)$  и  $x_1(t)$ , можно записать в виде

$$H(f) = H_1(f) + H_2(f)H_3(f). \quad (8.25)$$

Предположим теперь, что функция когерентности  $\gamma^2_{12}$  удовлетворяет неравенству  $0 < \gamma^2_{12} < 1$ . Тогда, согласно уравнению (8.6), спектральная плотность выходного процесса есть

$$S_{yy} = |H_1|^2 S_{11} + H_1^* H_2 S_{12} + H_1 H_2^* S_{21} + |H_2|^2 S_{22} + S_{nn}. \quad (8.26)$$

Слагаемые  $H_1^* H_2 S_{12}$  и  $H_1 H_2^* S_{21}$  определяют вклад в спектральную плотность  $S_{yy}$  при наличии зависимости между процессами  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  (эти слагаемые обращаются в нуль, если  $S_{12} = 0$ ). Обычные функции когерентности между входными и выходными процессами задаются в виде

$$\gamma^2_{1y} = \frac{|S_{1y}|^2}{S_{11}S_{yy}} = \frac{|H_1 S_{11} + H_2 S_{12}|^2}{S_{11}S_{yy}}, \quad (8.27)$$

$$\gamma^2_{2y} = \frac{|S_{2y}|^2}{S_{22}S_{yy}} = \frac{|H_1 S_{21} + H_2 S_{22}|^2}{S_{22}S_{yy}}.$$

Эти уравнения довольно трудно интерпретировать, не очевидно даже, что функции  $\gamma^2_{1y}$  и  $\gamma^2_{2y}$  находятся между нулем и единицей.

Рассмотрим часть спектра выходного процесса  $y(t)$ , когерентную входному процессу  $x_1(t)$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} \gamma^2_{1y} S_{yy} &= \frac{|H_1 S_{11} + H_2 S_{12}|^2}{S_{11}} = \\ &= \frac{|H_1|^2 S_{11}^2 + H_1 H_2^* S_{11} S_{21} + H_1^* H_2 S_{12} S_{11} + |H_2|^2 |S_{12}|^2}{S_{11}} = \\ &= |H_1|^2 S_{11} + H_1 H_2^* S_{21} + H_1^* H_2 S_{12} + \gamma^2_{12} |H_2|^2 S_{22}. \quad (8.28) \end{aligned}$$

Произведение  $\gamma^2_{12}S_{yy}$  определяет ту часть спектральной плотности выходного процесса  $y(t)$ , которая генерируется входным процессом  $x_1(t)$  при прохождении его через обе системы  $H_1$  и  $H_2$ . Поменяв местами индексы входных процессов, получим аналогичное соотношение

$$\gamma^2_{2y}S_{yy} = |H_2|^2 S_{22} + H_2 H_1^* S_{12} + H_2^* H_1 S_{21} + \gamma^2_{12} |H_1|^2 S_{11}, \quad (8.29)$$

которое определяет вклад второго входного процесса  $x_2(t)$  в спектр процесса  $y(t)$  после прохождения  $x_2(t)$  через обе системы  $H_1$  и  $H_2$ . Наконец, при  $S_{12} = 0$  уравнения (8.26) и (8.27) сводятся к виду

$$S_{yy} = |H_1|^2 S_{11} + |H_2|^2 S_{22} + S_{nn}, \quad (8.30)$$

$$\gamma^2_{1y} = \frac{|H_1|^2 S_{11}}{S_{yy}}, \quad \gamma^2_{2y} = \frac{|H_2|^2 S_{22}}{S_{yy}}. \quad (8.31)$$

Здесь  $\gamma^2_{1y}S_{yy}$  есть вклад входного процесса  $x_1(t)$  в спектр процесса  $y(t)$  при прохождении  $x_1(t)$  только через систему с частотной характеристикой  $H_1$  (второй тракт для процесса  $x_1(t)$  закрыт). Аналогичным образом интерпретируется и величина  $\gamma^2_{2y}S_{yy}$ . Если, кроме того,  $S_{nn} = 0$ , то очевидно, что

$$\gamma^2_{1y} + \gamma^2_{2y} = 1. \quad (8.32)$$

Если входные процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  дают одинаковый вклад в спектральную плотность выходного процесса  $y(t)$ , то  $\gamma^2_{1y} = \gamma^2_{2y}$ , и, следовательно,

$$\gamma^2_{1y} = \gamma^2_{2y} = 0,5. \quad (8.33)$$

Таким образом, обычная функция когерентности оказывается меньше единицы, если даже зависимости между выходным процессом и каждым из входных процессов строго линейны. Этот результат объясняется тем, что при определении функций обычной когерентности для системы с двумя входами второй вход действует как помеха на выходе системы.

## 8.2. Функция множественной когерентности

Функция множественной когерентности представляет собой непосредственное обобщение на многомерный случай функции обычной когерентности и служит мерой линейной зависимости между процессом на выходе системы и всеми ее входными процессами (в общем случае — коррелированными).

### 8.2.1. Определение и основные соотношения

Обращаясь к рис. 8.1, можно видеть, что функция множественной когерентности между выходным процессом  $y(t)$  и всеми входными процессами  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, q$ , которые генерируют

$y(t)$ , определяется как отношение спектра  $S_{vv}$  процесса на выходе идеальной линейной системы к спектру  $S_{yy}$  процесса  $y(t)$ , измеренного на выходе системы. Таким образом, если

$$S_{yy} = S_{vv} + S_{nn}, \quad (8.34)$$

где  $S_{nn}$  — спектральная плотность шума на выходе системы, то функция множественной когерентности

$$\gamma^2_{y:x} = \frac{S_{vv}}{S_{yy}} = \frac{S_{yy} - S_{nn}}{S_{yy}} = 1 - \frac{S_{nn}}{S_{yy}}. \quad (8.35)$$

Символ  $y:x$  означает, что эта функция является мерой линейного вклада входных процессов  $x_1(t), \dots, x_q(t)$  в выходной процесс  $y(t)$ . Согласно уравнениям (8.6) и (8.7), спектральная плотность  $S_{vv}$  имеет вид

$$S_{vv} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q H_i^* H_j S_{ij} = \sum_{i=1}^q H_i^* S_{iy}. \quad (8.36)$$

Поскольку  $S_{vv} \leq S_{yy}$ ,  $S_{nn} \leq S_{yy}$  и все эти величины не отрицательны, функция когерентности  $\gamma^2_{y:x}$  удовлетворяет для всех частот  $f$  неравенству

$$0 \leq \gamma^2_{y:x} \leq 1. \quad (8.37)$$

Как видно из формулы (8.35), произведение функции множественной когерентности на спектральную плотность выходного процесса есть

$$\gamma^2_{y:x} S_{yy} = S_{vv} = S_{yy} - S_{nn}. \quad (8.38)$$

Эта величина, называемая *множественным когерентным спектром (мощности) выходного процесса*, представляет собой непосредственное обобщение когерентного спектра (мощности) выходного процесса, определенного уравнением (4.30). Она задает ту часть спектральной плотности  $S_{yy}$ , которая определяется линейным преобразованием измеренных входных процессов  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ . Спектр  $S_{nn}$  шума на выходе, который не обусловлен ни одним из входных процессов  $x_i(t)$ , есть, очевидно,

$$S_{nn} = (1 - \gamma^2_{y:x}) S_{yy}. \quad (8.39)$$

Для применения этих результатов необходимо, чтобы шумы на входе были пренебрежимо малы по сравнению с входными сигналами, а измерения всех входных и выходных реализаций проводились в одной шкале времени для обеспечения неизменности относительных фазовых сдвигов.

### 8.2.2. Некоторые частные случаи

Чтобы сделать более понятными интерпретацию функции множественной когерентности и ее связь с обычной функцией когерентности, рассмотрим несколько частных случаев. Для системы с одним входным процессом имеем

$$S_{vv} = |H_1|^2 S_{11} = H_1^* S_{1v} = \gamma_{1v}^2 S_{yy}, \quad S_{nn} = (1 - \gamma_{1v}^2) S_{yy}.$$

Следовательно, согласно уравнению (8.35),

$$\gamma_{y;x}^2 = \gamma_{1v}^2. \tag{8.40}$$

Таким образом, обычная функция когерентности есть частный случай функции множественной когерентности.

Для системы с двумя входами имеем

$$\begin{aligned} S_{vv} &= H_1^* S_{1v} + H_2^* S_{2v} = \\ &= H_1^* (H_1 S_{11} + H_2 S_{12}) + H_2^* (H_1 S_{21} + H_2 S_{22}), \end{aligned}$$

так что функция множественной когерентности задается равенством

$$\gamma_{y;x}^2 = \frac{H_1^* (H_1 S_{11} + H_2 S_{12}) + H_2^* (H_1 S_{21} + H_2 S_{22})}{S_{yy}}, \tag{8.41}$$

где  $S_{yy} = S_{vv} + S_{nn}$ . В такой форме это уравнение трудно интерпретировать, но если  $S_{12} = 0$ , то, согласно соотношению (8.41),

$$\gamma_{y;x}^2 = \frac{|H_1|^2 S_{11} + |H_2|^2 S_{22}}{S_{yy}} = \gamma_{1v}^2 + \gamma_{2v}^2. \tag{8.42}$$

Другими словами, в случае двух некоррелированных входов функция множественной когерентности равна сумме обычных функций когерентности, связывающих выходной процесс с каждым из входных процессов. Покажем, что это утверждение справедливо для системы с любым числом некоррелированных входных процессов. В общем случае системы с  $q$  некоррелированными входами (т. е. когда  $S_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ) уравнение (8.36) принимает вид

$$S_{vv} = \sum_{i=1}^q |H_i|^2 S_{ii}.$$

Поскольку

$$\gamma_{y;x}^2 = \frac{S_{vv}}{S_{yy}} = \frac{\sum_{i=1}^q |H_i|^2 S_{ii}}{S_{yy}} \tag{8.43}$$

и

$$\gamma_{iv}^2 = \frac{|H_i|^2 S_{ii}}{S_{yy}}, \quad i = 1, 2, \dots, q, \tag{8.44}$$

то

$$\gamma_{y;x}^2 = \sum_{i=1}^q \gamma_{iy}^2. \quad (8.45)$$

Нужно еще раз отметить, что этот результат справедлив только для систем с некоррелированными входными процессами. В противном случае следует пользоваться более общим уравнением (10.69), содержащим функции частной когерентности (см. гл. 10).

### 8.3. Анализ, основанный на условных спектрах

Этот раздел представляет собой введение в методы анализа систем со многими входами, основанные на использовании условных процессов. Последние определяются путем вычитания из исходного процесса его оптимального линейного прогноза по одному или нескольким входам. Для упрощения выкладок приведенные здесь основные соотношения относятся к случаю системы с двумя входными процессами и одним процессом на выходе. Обобщение на случай системы с произвольным числом входов и соответствующие алгоритмы даются в гл. 10.

#### 8.3.1. Определения и основные соотношения

Рассмотрим показанную на рис. 8.2 систему с двумя входными процессами  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , которые будем считать коррелированными, но не связанными строго линейной зависимостью. Таким образом, функция когерентности удовлетворяет на всех частотах неравенству  $0 < \gamma_{12}^2 < 1$ . Задача заключается в исследовании линейной зависимости между процессами  $x_1(t)$  и  $y(t)$  при условии, что линейный вклад процесса  $x_2(t)$  в  $x_1(t)$  и  $y(t)$  исключен. Аналогичным образом можно рассматривать зависимость между  $x_2(t)$  и  $y(t)$  при исключении линейного вклада  $x_1(t)$ . С физической точки зрения эта задача эквивалентна задаче установления зависимости между выходным процессом и только одним из входных процессов, но *в предположении, что все зависимости между входными процессами обусловлены именно исключенным входом.*

Рассмотрим сначала случай, когда исключается процесс  $x_1(t)$ . Очевидно, что полученные ниже выводы останутся справедливыми, если поменять местами процессы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

Пусть  $X_{2 \cdot 1} = X_{2 \cdot 1}(f, T)$  есть финитное преобразование Фурье (на интервале длиной  $T$ ) процесса  $x_2(t)$ , из которого исключен линейный вклад процесса  $x_1(t)$ . Аналогично  $Y_{y \cdot 1} = Y_{y \cdot 1}(f, T)$  есть финитное преобразование Фурье процесса

$y(t)$ , из которого исключен линейный вклад  $x_1(t)$ . Функции  $X_{2 \cdot 1}$  и  $Y_{y \cdot 1}$  можно рассматривать как преобразования Фурье помех на выходах двух простейших линейных систем, показанных на рис. 8.4. Частотная характеристика  $L_{12} = L_{12}(f)$  описывает оператор оптимального линейного прогнозирования процесса  $x_2(t)$  по  $x_1(t)$ , а  $L_{1y} = L_{1y}(f)$  есть оператор оптимального линейного прогнозирования  $y(t)$  по  $x_1(t)$ . В соответствии с физическим смыслом индекс входного процесса  $x_1(t)$ , по которому осу-

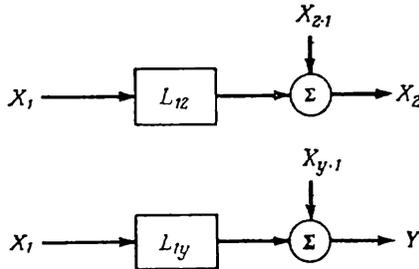


Рис. 8.4. Одномерные модели для системы с двумя входными процессами.

ществляется прогноз, в операторах  $L_{12}$  и  $L_{1y}$  предшествует индексу выходного (прогнозируемого) процесса.

Согласно формуле (5.15), частотные характеристики  $L_{12}$  и  $L_{1y}$  имеют вид

$$L_{12} = S_{12}/S_{11}, \quad (8.46)$$

$$L_{1y} = S_{1y}/S_{11}, \quad (8.47)$$

а из рис. 8.4 следует, что

$$X_{2 \cdot 1} = X_2 - L_{12}X_1 = X_2 - (S_{12}/S_{11})X_1, \quad (8.48)$$

$$Y_{y \cdot 1} = Y - L_{1y}X_1 = Y - (S_{1y}/S_{11})X_1. \quad (8.49)$$

Эти две функции соответствуют изображенной на рис. 8.5 системе с условными процессами на входе и выходе, причем  $L_{2y}$  есть оператор оптимального линейного прогнозирования  $Y_{y \cdot 1}$  по  $X_{2 \cdot 1}$ <sup>1)</sup>, а  $N = Y_{y \cdot 1, 2}$  — финитное преобразование Фурье соответствующего условного процесса, т. е. той части  $y(t)$ , из которой исключен линейный вклад процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Другими словами,  $Y_{y \cdot 1, 2}$  есть финитное преобразование Фурье помехи  $n(t)$  на выходе системы, показанной на рис. 8.2. Оператор  $L_{2y}$  совпадает с оператором  $H_2$  на рис. 8.2 при любом значении

<sup>1)</sup> Точнее, частотная характеристика фильтра, осуществляющего оптимальный линейный прогноз остаточного процесса  $y(t)$  по  $x_2(t)$ . — Прим. перев.

$\gamma_{12}^2$ , поскольку  $X_{2 \cdot 1}$  генерирует  $Y_{y \cdot 1}$  только по тракту, соответствующему  $H_2$ . Тракт, содержащий оператор  $H_1$ , «отключается» путем вычитания линейного вклада процесса  $x_1(t)$  из  $x_2(t)$ .

### 8.3.2. Условные спектральные плотности

Для упрощения выкладок введем в соответствии с уравнением (8.8) следующие обозначения:

$$\begin{aligned} S_{22 \cdot 1} &= E[X_{2 \cdot 1}^* X_{2 \cdot 1}] / T, \\ S_{yy \cdot 1} &= E[Y_{y \cdot 1}^* Y_{y \cdot 1}] / T, \\ S_{2y \cdot 1} &= E[X_{2 \cdot 1}^* Y_{y \cdot 1}] / T. \end{aligned} \quad (8.50)$$

Функции  $S_{22 \cdot 1}$  и  $S_{yy \cdot 1}$  представляют собой *условные (остаточные) спектры* процессов  $x_2(t)$  и  $y(t)$  соответственно после ис-

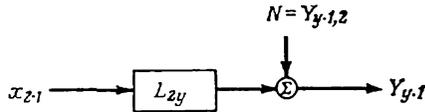


Рис. 8.5. Модель с условными процессами для системы с двумя входами.

ключения из них линейного вклада, вносимого процессом  $x_1(t)$ . Функция  $S_{2y \cdot 1}$  — условный (остаточный) взаимный спектр процессов  $x_2(t)$  и  $y(t)$ , из которых исключен линейный вклад  $x_1(t)$ .

Частотная характеристика  $L_{2y}$  системы с одним входом и одним выходом, показанной на рис. 8.5, есть, очевидно,

$$L_{2y} = S_{2y \cdot 1} / S_{22 \cdot 1}. \quad (8.51)$$

Ниже будет показано, что это равенство представляет собой просто сокращенную форму записи уравнения (8.23), определяющего частотную характеристику  $H_2$ . Помеха на выходе системы, изображенной на рис. 8.5, имеет вид

$$Y_{y \cdot 1, 2} = Y_{y \cdot 1} - L_{2y} X_{2 \cdot 1} = Y_{y \cdot 1} - (S_{2y \cdot 1} / S_{22 \cdot 1}) X_{2 \cdot 1}, \quad (8.52)$$

и по определению

$$S_{yy \cdot 1, 2} = E[Y_{y \cdot 1, 2}^* Y_{y \cdot 1, 2}] / T. \quad (8.53)$$

Иными словами,  $S_{yy \cdot 1, 2}$  есть условный (остаточный) спектр процесса  $y(t)$  после вычитания из него оптимального линейного прогноза как по  $x_1(t)$ , так и по  $x_2(t)$ . Посмотрим теперь, каким образом связаны друг с другом уравнения (8.8), (8.50) и (8.53).

Подставляя выражения (8.48) и (8.49) в формулу (8.50) и учитывая (8.8), после некоторых преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} S_{yy \cdot 1} &= \frac{E \left[ \left( Y^* - \frac{S_{1y}}{S_{11}} X_1^* \right) \left( Y - \frac{S_{1y}}{S_{11}} X_1 \right) \right]}{T} = \\ &= S_{yy} - \left( \frac{S_{1y}}{S_{11}} \right) S_{y1} - \left( \frac{S_{y1}}{S_{11}} \right) S_{1y} + \frac{|S_{1y}|^2}{S_{11}^2} S_{11} = \\ &= S_{yy} - \frac{|S_{1y}|^2}{S_{11}} = S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2), \end{aligned} \quad (8.54)$$

где

$$\gamma_{1y}^2 = |S_{1y}|^2 / S_{11} S_{yy}. \quad (8.55)$$

Уравнение (8.54) описывает спектр помехи на выходе линейной системы, на вход которой поступает процесс  $x_1(t)$ , а на выходе наблюдается процесс  $y(t)$ . Положив  $y(t) = x_2(t)$ , получим

$$S_{22 \cdot 1} = S_{22} (1 - \gamma_{12}^2), \quad (8.56)$$

где

$$\gamma_{12}^2 = |S_{12}|^2 / S_{11} S_{22}. \quad (8.57)$$

Аналогичным образом легко показать, что

$$\begin{aligned} S_{2y \cdot 1} &= \frac{E \left[ \left( X_2^* - \frac{S_{21}}{S_{11}} X_1^* \right) \left( Y - \frac{S_{1y}}{S_{11}} X_1 \right) \right]}{T} = \\ &= S_{2y} - \left( \frac{S_{1y}}{S_{11}} \right) S_{21} - \left( \frac{S_{21}}{S_{11}} \right) S_{1y} + \frac{S_{21} S_{1y}}{S_{11}^2} S_{11} = \\ &= S_{2y} - \left( \frac{S_{1y}}{S_{11}} \right) S_{21}. \end{aligned} \quad (8.58)$$

Заменяв  $x_2(t)$  на  $y(t)$ , получим

$$S_{yy \cdot 1} = S_{yy} - (S_{1y}/S_{11}) S_{y1} = S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2), \quad (8.59)$$

что совпадает с уравнением (8.54). Подстановка (8.58) и (8.56) в (8.51) приводит к равенству

$$L_{2y} = \frac{S_{2y} \left[ 1 - \frac{S_{21} S_{1y}}{S_{11} S_{2y}} \right]}{S_{22} [1 - \gamma_{12}^2]}, \quad (8.60)$$

которое совпадает с формулой (8.23), определяющей частотную характеристику  $H_2$ .

Следует отметить, что операторы математического ожидания над преобразованиями Фурье в (8.50) не являются необходимыми для вычисления остаточных спектральных плотностей; эти функции можно выразить непосредственно через спектраль-

ные плотности, как это сделано в формулах (8.54), (8.56) и (8.58). С другой стороны, равенства (8.50) и (8.53), определяющие условные спектры, можно переписать в виде

$$TS_{2y \cdot 1} = E[X_2^* Y_{y \cdot 1}] = E[X_{2 \cdot 1}^* Y], \quad (8.61)$$

$$TS_{yy \cdot 1, 2} = E[Y^* Y_{y \cdot 1, 2}] = E[Y_{y \cdot 1, 2}^* Y], \quad (8.62)$$

причем спектры  $S_{22 \cdot 1}$  и  $S_{yy \cdot 1}$  представляют собой частные случаи остаточной спектральной плотности  $S_{2y \cdot 1}$ <sup>1)</sup>. Из формулы (8.61) следует, что для определения  $S_{2y \cdot 1}$  достаточно исключить линейный вклад  $x_1(t)$  только из  $x_2(t)$  или из  $y(t)$ , оставив вторую реализацию без изменений. Из уравнения (8.62) видно, что для определения  $S_{yy \cdot 1, 2}$  линейный вклад, вносимый в  $y(t)$  процессами  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , должен быть исключен только из одной функции, входящей под знак математического ожидания.

Справедливость утверждения, относящегося к формуле (8.61), видна из приводимых ниже равенств, которые следуют из соотношений (8.48) и (8.49):

$$S_{2y \cdot 1} = \frac{E \left[ X_2^* \left( Y - \frac{S_{1y}}{S_{11}} X_1 \right) \right]}{T} = S_{2y} - \left( \frac{S_{1y}}{S_{11}} \right) S_{21},$$

$$S_{2y \cdot 1} = \frac{E \left[ \left( X_2^* - \frac{S_{21}}{S_{11}} X_1^* \right) Y \right]}{T} = S_{2y} - \left( \frac{S_{21}}{S_{11}} \right) S_{1y}.$$

Этот результат совпадает с формулой (8.58). Аналогичным образом, подставляя (8.52) в (8.62), получаем равенства (8.53):

$$S_{yy \cdot 1, 2} = \frac{E \left[ Y^* \left( Y_{y \cdot 1} - \frac{S_{2y \cdot 1}}{S_{22 \cdot 1}} X_{2 \cdot 1} \right) \right]}{T} = S_{yy \cdot 1} - \left( \frac{S_{2y \cdot 1}}{S_{22 \cdot 1}} \right) S_{y2 \cdot 1},$$

$$S_{yy \cdot 1, 2} = \frac{E \left[ \left( Y_{y \cdot 1}^* - \frac{S_{y2 \cdot 1}}{S_{22 \cdot 1}} X_{2 \cdot 1}^* \right) Y \right]}{T} = S_{yy \cdot 1} - \left( \frac{S_{y2 \cdot 1}}{S_{22 \cdot 1}} \right) S_{2y \cdot 1}.$$

#### 8.4. Функции частной когерентности

Введенные в предыдущем разделе остаточные спектральные плотности позволяют определить особый тип функций когерентности, которые, как и обычные функции когерентности, служат мерой линейности рассматриваемых систем. Определение и интерпретация таких *функций частной когерентности* будут даны

<sup>1)</sup> При  $y(t) = x_2(t)$  и  $x_2(t) = y(t)$  соответственно. — Прим. перев.

здесь вначале для случая системы с двумя входными процессами, а затем обобщены на случай системы с произвольным числом входов.

#### 8.4.1. Система с двумя входами и одним выходом

В случае системы, показанной на рис. 8.2, функцию частной когерентности  $\gamma^2_{2y \cdot 1}$ , связывающую процессы  $x_2(t)$  и  $y(t)$  после исключения вклада  $x_1(t)$  в  $y(t)$  и  $x_2(t)$ , можно определить как обычную функцию когерентности между условными (остаточными) случайными величинами  $X_{2 \cdot 1}$  и  $Y_{y \cdot 1}$ <sup>1)</sup>. В соответствии с формулой (8.50) имеем

$$\gamma^2_{2y \cdot 1} = |S_{2y \cdot 1}|^2 / S_{22 \cdot 1} S_{yy \cdot 1}. \quad (8.63)$$

Функция частной когерентности является мерой линейной зависимости между величинами  $X_{2 \cdot 1}$  и  $Y_{y \cdot 1}$  (рис. 8.5) на соответствующих частотах.

Согласно формулам (8.54), (8.56) и (8.58), общее выражение для функции частной когерентности, заданной уравнением (8.63), имеет вид

$$\gamma^2_{2y \cdot 1} = \frac{|S_{2y} S_{11} - S_{1y} S_{21}|^2}{S_{11}^2 S_{22} S_{yy} (1 - \gamma^2_{12}) (1 - \gamma^2_{1y})}. \quad (8.64)$$

В случае когда входные процессы не коррелированы друг с другом (т. е.  $S_{12} = 0$  и  $\gamma^2_{12} = 0$ ), последнее уравнение сводится к виду

$$\gamma^2_{2y \cdot 1} = \frac{|S_{2y}|^2}{S_{22} S_{yy} (1 - \gamma^2_{1y})} = \frac{\gamma^2_{2y}}{1 - \gamma^2_{1y}}, \quad (8.65)$$

где  $\gamma^2_{1y} \neq 1$ . Таким образом,

$$(1 - \gamma^2_{1y})(1 - \gamma^2_{2y \cdot 1}) = 1 - \gamma^2_{1y} - \gamma^2_{2y}. \quad (8.66)$$

Чтобы показать, как функция частной когерентности может быть использована при решении инженерных задач, рассмотрим турбулентный поток жидкости в гидротрансформаторе (см. схему на рис. 8.6). Жидкость перекачивается насосом через лопатки статорного кольца и приводит в движение турбину. Турбулентные пульсации скорости измеряются тремя тепловыми анемометрами: запись  $x_1(t)$  осуществляется внутри рабочего колеса насоса,  $x_2(t)$  — внутри рабочего колеса турбины и  $y(t)$  — на выходе из турбины. Анализировалась полоса частот от 0 до 3000 Гц с разрешающей способностью  $B_e = 50$  Гц и при числе усреднений  $n_d = 64$ .

<sup>1)</sup> Точнее, между условными случайными процессами, которым соответствуют эти преобразования Фурье. — *Прим. перев.*

Спектры всех трех (центрированных) реализаций турбулентных пульсаций скорости показаны на рис. 8.7. Заметим, что спектр пульсаций скорости  $x_1(t)$  внутри рабочего колеса насоса содержит острый максимум на частоте около 400 Гц, совпадающей с лопаточной частотой насоса. Спектры процессов  $x_2(t)$  и  $y(t)$  содержат максимумы на частотах, кратных 300 Гц (лопаточной частоте турбины). Наконец, все три спектра имеют небольшой максимум на частоте 1920 Гц. При обработке изме-

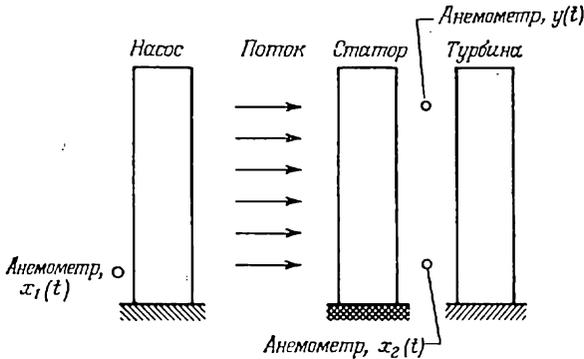


Рис. 8.6. Расположение датчиков в гидротрансформаторе.

рений масштаб времени был уменьшен в 32 раза, так что в реальном масштабе частоте 1920 Гц соответствует частота 60 Гц; этот максимум указывает частоту питающего напряжения.

Задача заключается в исследовании линейной зависимости между турбулентными пульсациями скорости внутри рабочего колеса и на выходе из турбины, т. е. между процессами  $x_2(t)$  и  $y(t)$ . Вначале была рассчитана обычная функция когерентности между  $x_2(t)$  и  $y(t)$  (рис. 8.8, а). Как и следовало ожидать, оценка функции когерентности  $\hat{\gamma}_{2y}^2(f)$  содержит острые максимумы на частотах, кратных лопаточной частоте турбины, и очень острый максимум на частоте источника энергии 1920 Гц в масштабе обработки. На этой частоте когерентность практически соответствует случаю двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами. Оценка функции когерентности  $\hat{\gamma}_{2y}^2(f)$  при  $f=1920$  Гц не достигает единицы только потому, что разрешение по частоте конечно ( $B_e=50$  Гц), так что оценка искажена влиянием случайных колебаний с частотами, близкими к 1920 Гц. Помимо этих вполне понятных максимумов, связанных с лопаточной частотой турбины, общий уровень когерентности возрастает с увеличением частоты. Остается определить, чем обусловлен этот фон: локальными возмущениями, возникающи-

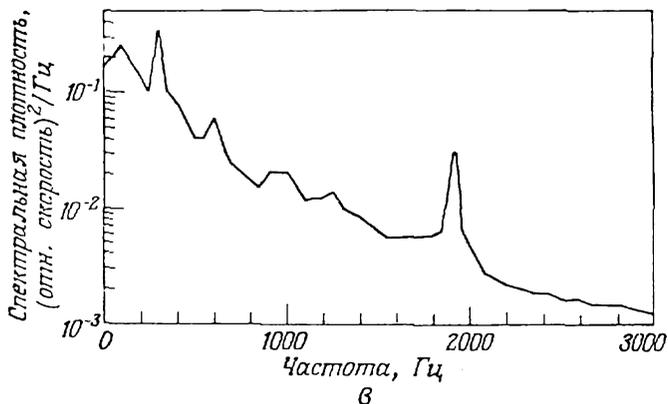
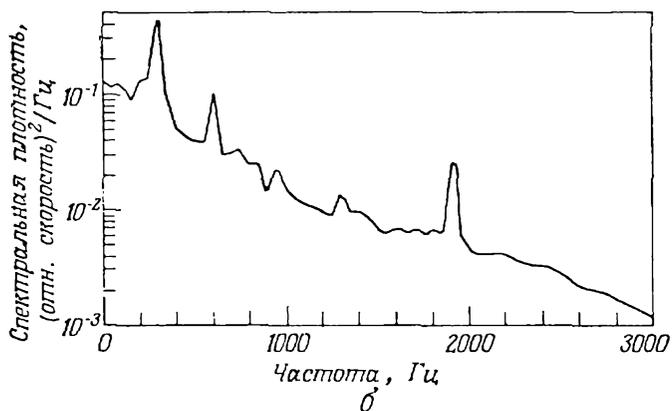
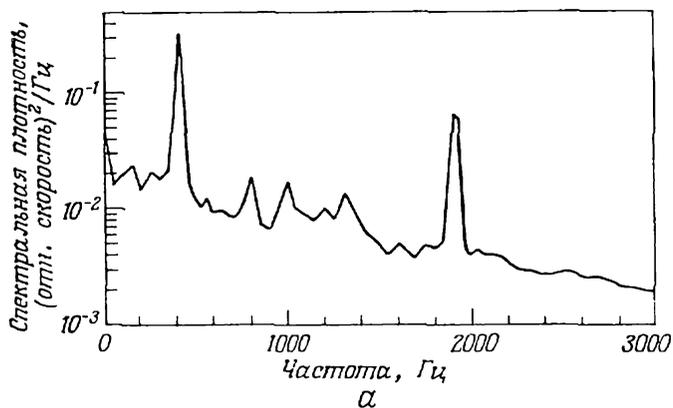


Рис. 8.7. Спектры турбулентности, полученные в экспериментах с гидротрансформатором.

Разрешение по частоте  $\nu_e=50$  Гц; число усреднений  $n_d=64$ .

а — на рабочем колесе насоса; б — на рабочем колесе турбины; в — на выходе из турбины.

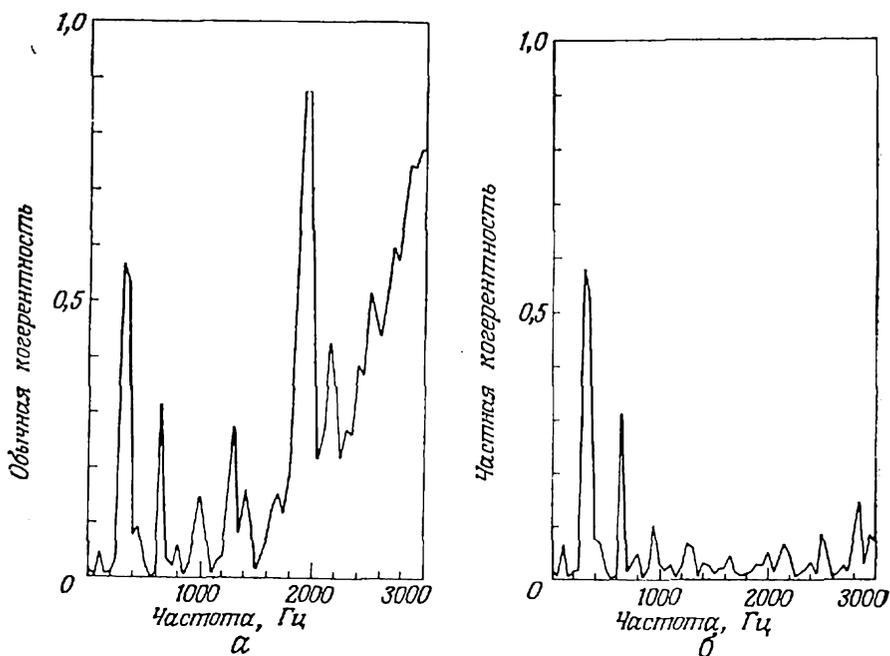


Рис. 8.8. Функции когерентности между измерениями на рабочем колесе турбины и на выходе из турбины.

*а* — обычная когерентность; *б* — частная когерентность.

ми при работе турбины, или общим случайным характером потока в гидротрансформаторе (акустическими шумами).

Локальные возмущения, возникающие в турбине, никак не отражаются на измерениях  $x_1(t)$ , получаемых внутри рабочего колеса насоса, поэтому ответить на поставленный вопрос нетрудно, если исключить из  $x_2(t)$  и  $y(t)$  линейный вклад, вносимый процессом  $x_1(t)$ . Полученная при этом функция частной когерентности показана на рис. 8.8, *б*. Как видно, значимые максимумы функции когерентности на частотах, соответствующих лопаточной частоте турбины, сохранились, что вполне понятно, поскольку локальные возмущения потока действительно имеют место. Однако значения функции когерентности на высоких частотах резко снизились; это свидетельствует о том, что линейная зависимость между  $x_2(t)$  и  $y(t)$ , на которую указывают высокие значения функции когерентности  $\hat{\gamma}^2_{2y}(f)$  на таких частотах, есть просто следствие общей реакции турбины на возмущения потока в гидротрансформаторе. Наконец, максимум функции когерентности на частоте 1920 Гц исчез потому, что соот-

ветствующий максимум на частоте источника энергии наблюдался в спектрах всех трех реализаций, и при построении условных процессов он был автоматически исключен.

#### 8.4.2. Система со многими входами и одним выходом

Вернемся теперь к показанной на рис. 8.1 системе с  $q$  входными процессами  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , и процессом  $y(t)$  на выходе. Считается, что все  $q+1$  реализаций известны. Рассмотрим любое подмножество входных процессов, из которых путем оптимального линейного прогнозирования исключен вклад  $r$  заданных входов. Предполагается также, что эффект этих  $r$  «ненужных» входных процессов исключен таким же способом и из процесса на выходе  $y(t)$ . Упорядочим входные процессы таким образом, чтобы вначале было  $r$  реализаций, эффект которых исключается из  $q-r$  оставшихся входов и из выхода  $y(t)$ , и введем для условных (остаточных) процессов обозначения

$$\begin{aligned} x_{i \cdot r1}(t) &= x_{i \cdot 1, 2, \dots, r}(t), & i=r+1, r+2, \dots, q. \\ y_{y \cdot r1}(t) &= y_{y \cdot 1, 2, \dots, r}(t), \end{aligned}$$

С помощью формул, которые будут выведены в гл. 10, по этим условным реализациям можно вычислить оценки условных спектров  $S_{ii \cdot r1}$ ,  $S_{yy \cdot r1}$  и условных взаимных спектров  $S_{iy \cdot r1}$ . Таким образом, мы приходим к новой многомерной линейной системе, в которой вместо исходных реализаций фигурируют реализации условных процессов с известными спектрами и взаимными спектрами.

По определению функция частной когерентности  $\gamma^2_{iy \cdot r1}$  есть обычная функция когерентности между процессами  $x_{i \cdot r1}(t)$  и  $y_{y \cdot r1}(t)$ , построенная по соответствующим остаточным спектральным плотностям. Заметим, что при наличии только двух входных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  функция  $\gamma^2_{2y \cdot 1}$  уже определена формулой (8.64).

Чтобы продемонстрировать связь между функциями частной и множественной когерентности, вернемся еще раз к системе с двумя входами и одним выходом (рис. 8.2). Подставив выражение (8.52) в (8.53) или (8.62), после простых преобразований получим

$$S_{yy \cdot 1, 2} = S_{yy \cdot 1} (1 - \gamma^2_{2y \cdot 1}), \quad (8.67)$$

где

$$\gamma^2_{2y \cdot 1} = |S_{2y \cdot 1}|^2 / S_{22 \cdot 1} S_{yy \cdot 1}. \quad (8.68)$$

Согласно формуле (8.54), имеем

$$S_{yy \cdot 1, 2} = S_{yy} (1 - \gamma^2_{1y}) (1 - \gamma^2_{2y \cdot 1}), \quad (8.69)$$

что соответствует спектру шума на выходе системы (см. рис. 8.2 или 8.4):

$$S_{nn} = S_{yy \cdot 1, 2}. \quad (8.70)$$

Теперь соотношение (8.35), определяющее функцию множественной когерентности, можно переписать в виде

$$\gamma_{y \cdot x}^2 = 1 - (1 - \gamma_{1y}^2)(1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2). \quad (8.71)$$

Это равенство задает функцию множественной когеренции в общем случае системы с двумя коррелированными процессами на входе и одним выходным процессом. Когда входы не коррелированы друг с другом, то в соответствии с уравнением (8.66) имеем

$$\gamma_{y \cdot x}^2 = \gamma_{1y}^2 + \gamma_{2y}^2. \quad (8.72)$$

Если поменять местами индексы входных процессов, то уравнения (8.69) и (8.71) переписутся в виде

$$S_{yy \cdot 1, 2} = S_{yy} (1 - \gamma_{2y}^2)(1 - \gamma_{1y \cdot 2}^2), \quad (8.73)$$

$$\gamma_{y \cdot x}^2 = 1 - (1 - \gamma_{2y}^2)(1 - \gamma_{1y \cdot 2}^2). \quad (8.74)$$

Таким образом,

$$(1 - \gamma_{1y}^2)(1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2) = (1 - \gamma_{2y}^2)(1 - \gamma_{1y \cdot 2}^2), \quad (8.75)$$

или

$$(1 - \gamma_{1y}^2)/(1 - \gamma_{2y}^2) = (1 - \gamma_{1y \cdot 2}^2)/(1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2), \quad (8.76)$$

откуда следует, что

$$\gamma_{1y \cdot 2}^2 \geq \gamma_{2y \cdot 1}^2 \quad \text{при} \quad \gamma_{1y}^2 \geq \gamma_{2y}^2. \quad (8.77)$$

Из уравнения (8.69) видно, что в случае системы с двумя входами и одним выходом множественный когерентный спектр выходного процесса, определенный выше формулой (8.38), принимает вид

$$\begin{aligned} S_{y \cdot x} &= \gamma_{y \cdot x}^2 S_{yy} = S_{yy} - S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2)(1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2) = \\ &= \gamma_{1y}^2 S_{yy} + \gamma_{2y \cdot 1}^2 S_{yy \cdot 1}. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Поскольку  $S_{nn} = S_{yy \cdot 1, 2}$ , полный спектр выходного процесса можно представить как

$$\begin{aligned} S_{yy} &= \gamma_{y \cdot x}^2 S_{yy} + S_{nn} = S_{y \cdot x} + S_{nn} = \\ &= \gamma_{1y}^2 S_{yy} + \gamma_{2y \cdot 1}^2 S_{yy \cdot 1} + S_{yy \cdot 1, 2}. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Поменяв местами входы, получим

$$S_{yy} = \gamma_{2y}^2 S_{yy} + \gamma_{1y \cdot 2}^2 S_{yy \cdot 2} + S_{yy \cdot 1, 2}. \quad (8.80)$$

Равенства (8.78) — (8.80) сохраняют аналогичную форму и для системы с произвольным числом входов. Например, при  $q=3$

имеем

$$\begin{aligned} S_{yy} &= \gamma_{y:x}^2 S_{yy} + S_{nn} = \\ &= \gamma_{1y}^2 S_{yy} + \gamma_{2y \cdot 1}^2 S_{yy \cdot 1} + \gamma_{3y \cdot 1, 2}^2 S_{yy \cdot 1, 2} + S_{yy \cdot 1, 2, 3}. \end{aligned} \quad (8.81)$$

Слагаемое  $\gamma_{1y}^2 S_{yy}$  в уравнении (8.81) определяет часть спектра (в данном случае — спектра мощности) выходного процесса  $y(t)$ , когерентную входу  $x_1(t)$  [см. формулу (4.30)]. Для односторонних спектральных плотностей это слагаемое имеет вид

$$G_{y:x_1} = G_{y:1} = \gamma_{1y}^2 G_{yy}. \quad (8.82)$$

Второй член равенства (8.81) называется *частным когерентным спектром (мощности)* процесса  $y(t)$  по  $x_2(t)$  при исключении вклада, вносимого входом  $x_1(t)$ . Соответствующие обозначения для односторонних спектров имеют вид

$$G_{y:x_2 \cdot x_1} = G_{y:2 \cdot 1} = \gamma_{2y \cdot 1}^2 G_{yy \cdot 1}. \quad (8.83)$$

Аналогично третье слагаемое в формуле (8.81) есть частный когерентный спектр процесса  $y(t)$  по  $x_3(t)$  при исключении вкладов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , т. е.

$$G_{y:x_3 \cdot 1, 2} = \gamma_{3y \cdot 1, 2}^2 G_{yy \cdot 1, 2}. \quad (8.84)$$

и т. д. Эти характеристики удобно использовать для интерпретации результатов анализа, но нужно иметь в виду, что они существенно зависят от порядка индексации входных процессов. Соответствующие примеры будут даны в разд. 9.4, а более подробное обсуждение и алгоритмы — в гл. 10.

## ЛИТЕРАТУРА

- 8.1. Bendat J. S., Piersol A. G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]
- 8.2. Bendat J. S. Solutions for the Multiple Input/Output Problem, *Journal of Sound and Vibration*, 44, No. 3, 311 (1976).
- 8.3. Bendat J. S. Systems Identification from Multiple Input/Output Data, *Journal of Sound and Vibration*, 49, No. 3, 293 (1976).

## Глава 9

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ИСТОЧНИКОВ ЭНЕРГИИ

Соотношения между характеристиками многомерных линейных систем, полученные в предыдущей главе, могут быть с успехом использованы для решения задач, связанных с идентификацией источников энергии, поступающей в систему. Например, работа большого числа станков может создать чрезмерно высокий уровень акустического шума в какой-то части заводского цеха; в этом случае нужно определить, какие станки следует сделать как можно более тихими, с тем чтобы наиболее эффективно понизить уровень шума в заданной точке. Очевидно, что для правильного решения этой задачи следует знать вклад каждого станка в уровень шума, регистрируемый приемником.

#### 9.1. Постановка задачи

Задачу идентификации источников энергии можно графически представить моделью, изображенной на рис. 9.1. На вход системы поступает  $q$  процессов  $u_i(t)$ , которые преобразуются датчиками в сигналы  $w_i(t)$ , а измеренные входные процессы  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , представляют собой сумму сигналов  $w_i(t)$  и помех  $m_i(t)$ . Истинные входные процессы  $u_i(t)$  проходят через линейные системы с не зависящими от времени частотными характеристиками  $H_{iy}(f)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , а измеренный на выходе процесс  $y(t)$  представляет собой сумму внешней помехи  $n(t)$  и процессов  $v_i(t)$  — выходов линейных систем, на вход которых поступают процессы  $u_i(t)$ . Частотные характеристики  $H_{ii}(f)$  связывают истинные входные процессы с неискаженными шумом измеренными входными процессами  $w_i(t)$ . В идеальном случае частотные характеристики  $H_{ii}(f)=1$  при  $i=1, 2, \dots, q$ . Разумно принять, что помехи  $m_i(t)$  и  $n(t)$  не коррелированы друг с другом и с процессами  $w_i(t)$  и  $v_i(t)$ , так что

$$G_{m_i n}(f) = G_{w_i m_i}(f) = G_{v_i n}(f) = G_{v_i m_i}(f) = 0,$$

$$G_{m_i m_j}(f) = G_{w_i w_j}(f) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, q; \quad i \neq j. \quad (9.1)$$

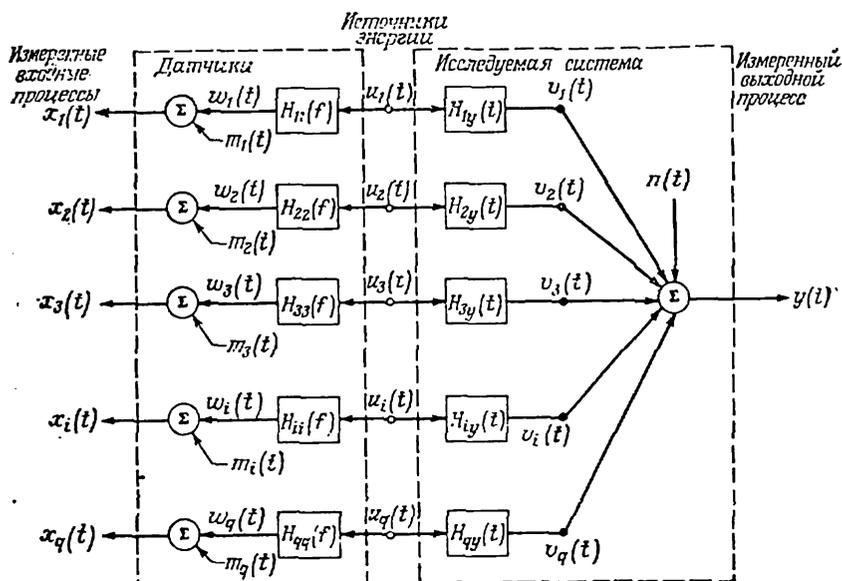


Рис. 9.1. Модель многомерной системы в задаче идентификации источников энергии.

### 9.1.1. Случай некоррелированных источников

Рассмотрим случай, когда источники энергии  $u_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$  (рис. 9.1), не коррелированы друг с другом, т. е.

$$G_{u_i u_j} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, q; \quad i \neq j. \quad (9.2)$$

Предположим пока, что измерения производятся безошибочно и не содержат внешних помех, так что  $x_i(t) = u_i(t)$ , и, следовательно,

$$H_{ii}(f) = 1, \quad m_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q. \quad (9.3)$$

При таких допущениях модель, показанная на рис. 9.1, совпадает с многомерной линейной системой, рассмотренной в предыдущей главе (рис. 8.1).

Как следует из результатов, полученных в разд. 3.3.3, в этой идеальной ситуации взаимные ковариационные функции, связывающие процессы  $x_i(t)$  и  $y(t)$ , будут иметь (в бездисперсной системе) только один максимум (см. рис. 3.13). Кроме того, вклад каждого входа  $x_i(t)$  в дисперсию  $\sigma_y^2$  процесса  $y(t)$ , наблюдаемого на выходе системы, определяется, согласно формуле (3.72), соотношением

$$\sigma_{y: x_i}^2 = \rho_{i y}^2(d/c) \sigma_y^2 = \sigma_{v_i}^2, \quad i = 1, 2, \dots, q; \quad (9.4)$$

где  $\rho_{iy}(d/c)$  — максимальное значение модуля коэффициента корреляции между  $x_i(t)$  и  $y(t)$ . Если, однако, энергия распространяется одновременно по  $r$  трактам, соотношение для коррелированной энергии выходного процесса принимает вид

$$\sigma_{y;x_i}^2 = \sigma_y^2 \sum_{k=1}^r \rho_{iky}^2 (d_k/c_k) = \sigma_{v_i}^2, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (9.5)$$

Здесь  $\rho_{iky}(d_k/c_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, r$ , представляют собой экстремальные значения коэффициентов корреляции между процессами  $x_i(t)$  и  $y(t)$ , соответствующие различным трактам системы (см. разд. 6.1). Наконец, если один или несколько трактов системы дисперсные, то использование уравнения (9.5) становится более сложным и требует учета практических соображений, изложенных в разд. 6.3.

Если мы интересуемся только вкладом процесса  $x_i(t)$  в выход  $y(t)$  независимо от того, по каким трактам распространяется энергия этого входа, и от наличия дисперсии в системе, то наиболее эффективный способ решения этой задачи заключается в анализе частотных свойств системы с использованием уравнения (4.30), определяющего когерентную часть спектра выходного процесса. При  $q$  некоррелированных входах часть спектра выходного процесса, обусловленная только одним входом  $x_i(t)$ , задается в виде

$$G_{y;x_i}(f) = \gamma_{x_i y}^2(f) G_{yy}(f) = G_{v_i v_i}(f), \quad i=1, 2, \dots, q, \quad (9.6)$$

где  $\gamma_{x_i y}^2(f)$  — обычная функция когерентности между  $x_i(t)$  и  $y(t)$ , заданная формулой (3.43). Следовательно, суммарный вклад всех входных процессов в спектр выхода есть

$$G_{y;x}(f) = G_{yy}(f) \sum_{i=1}^q \gamma_{x_i y}^2(f) = G_{v v}(f). \quad (9.7)$$

Как показано в разд. 8.2, сумма обычных функций когерентности, входящая в эту формулу, совпадает в случае некоррелированных входов с функцией множественной когерентности.

### 9.1.2. Случай отсутствия помех в измерениях входных процессов

Рассмотрим теперь случай, когда истинные входные процессы  $u_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , не коррелированы друг с другом [т. е. уравнение (9.2) остается справедливым], но частотные характеристики, связывающие истинные и измеряемые входные процессы, отличны от единицы, т. е. уравнение (9.3) теряет силу, и  $u_i(t) \neq x_i(t)$ . Однако мы будем по-прежнему считать, что изме-

рения входных процессов не искажены помехами, так что при всех значениях  $i$  справедливы равенства  $m_i(t) = 0$  и  $x_i(t) = w_i(t)$ . Тогда в соответствии с формулой (4.8) имеем

$$G_{x_i x_i}(f) = |H_{ii}(f)|^2 G_{u_i u_i}(f), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (9.8)$$

а взаимные спектральные плотности между измеренными входными процессами и выходным процессом принимают вид

$$G_{x_i y}(f) = H_{ii}^*(f) G_{u_i y}(f) = H_{ii}^*(f) H_{iy}(f) G_{u_i u_i}(f). \quad (9.9)$$

Функция когерентности между измеренными входными процессами и процессом на выходе теперь есть

$$\gamma_{x_i y}^2(f) = \frac{|G_{x_i y}(f)|^2}{G_{x_i x_i}(f) G_{yy}(f)} = \frac{|H_{iy}(f)|^2 G_{u_i u_i}(f)}{G_{yy}(f)}. \quad (9.10)$$

Поскольку

$$|H_{iy}(f)|^2 G_{u_i u_i}(f) = G_{v_i v_i}(f), \quad (9.11)$$

то

$$G_{y x_i}(f) = \gamma_{x_i y}^2(f) G_{yy}(f) = G_{v_i v_i}(f), \quad i = 1, 2, \dots, q, \quad (9.12)$$

что совпадает с формулой (9.6).

Из формулы (9.12) следует важный результат: если измеренные входные процессы  $x_i(t)$  не искажены помехами и строго линейно связаны с истинными входными процессами  $u_i(t)$ , то они полностью определяют когерентную часть спектра выходного процесса. С практической точки зрения это означает, что для измерения энергии, поступающей в систему, можно использовать любое измерительное устройство, обладающее строго линейной характеристикой. При этом даже нет необходимости калибровать датчики, поскольку калибровка автоматически осуществляется при расчете функций когерентности.

### 9.1.3. Практические соображения

Метод идентификации источников энергии, основанный на формуле (9.6), отличается теоретической простотой, однако при его использовании для решения практических задач могут возникать существенные трудности. Поэтому пользоваться таким подходом нужно лишь в том случае, если другие, более непосредственные методы идентификации представляются нецелесообразными. Если, например, все источники, за исключением того, которым мы интересуемся, можно просто отключить, то, очевидно, так и нужно сделать. Это позволит непосредственно определить вклад этого источника в выходной процесс  $y(t)$ . Возможен и обратный случай, когда можно отключить только тот источник, который мы хотим исследовать, и тогда его вклад

в выходной процесс определяется путем вычитания вкладов всех других источников из процесса, наблюдаемого на выходе системы. Если исследуемые входные процессы имеют узкополосные спектры или, более того, являются периодическими, то их индивидуальные вклады в выходной процесс можно определить путем выделения соответствующих участков спектра процесса  $y(t)$ , разумеется, в предположении, что спектры входов не перекрываются. Анализ с помощью формулы (9.6) оказывается, как правило, целесообразным только в тех случаях, когда различные источники могут наблюдаться лишь одновременно, а их спектры существенно перекрываются.

Ниже перечислены основные практические трудности, которые могут воспрепятствовать эффективному использованию формулы (9.6):

- 1) ошибки в измерениях входных процессов;
- 2) присутствие внешних помех в измерениях входных процессов;
- 3) ошибки в определении запаздывания в различных трактах;
- 4) эффекты реверберации;
- 5) наличие обратных связей в системе;
- 6) нелинейность трактов;
- 7) наличие взаимодействия между измерениями входных процессов;
- 8) корреляция между входными процессами;
- 9) присутствие одних и тех же гармонических компонент в различных входных процессах;
- 10) выборочная изменчивость оценок.

Первые шесть пунктов относятся только к индивидуальным трактам системы; подобные трудности могут возникнуть независимо от степени корреляции входных процессов. Эти проблемы обсуждаются в разд. 9.2. Следующие три пункта связаны с наличием корреляции между входами, которая может появиться по двум причинам: из-за взаимодействия (перекрестных искажений) между измерениями входных процессов и наличия реальной зависимости между истинными входными процессами. Эти вопросы рассматриваются в разд. 9.3 и 9.4 соответственно. Сводка результатов, относящихся к выборочной изменчивости оценок, приведена в разд. 9.4.3, а детальному обсуждению соответствующих вопросов посвящена гл. 11.

## 9.2. Проблемы, связанные с индивидуальными трактами

При расчете когерентного спектра выходного процесса с помощью формулы (9.6) осложнения могут возникнуть даже в том случае, когда входные процессы не коррелированы друг с другом. Такая возможность должна быть тщательно рассмотрена до начала эксперимента.

### 9.2.1. Измерение входных процессов

При рассмотрении показанной на рис. 9.1 системы предполагается, что все входные процессы  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , описывающие источники поступающей в систему энергии, доступны наблюдению. С практической точки зрения это означает, что можно 1) правильно определить примерное положение энергетически значимых источников, 2) установить там датчики, и 3) эти датчики обеспечивают безошибочное измерение входных процессов. Иногда два первых условия не выполняются либо потому, что положение источников неизвестно, либо из-за невозможности установить там измерительную аппаратуру. В такой ситуации следует пользоваться описанным в гл. 7 методом, основанным на использовании только данных о выходном процессе. Возможны и такие случаи, когда можно выполнить только первые два условия. Это чаще всего имеет место при исследовании распределенных источников, например акустических шумов аэродинамического происхождения (типа шумов, создаваемых выходящим из трубы потоком воздуха). В этом случае измерения в самом источнике следует выполнять сразу несколькими датчиками, как для нескольких точечных источников.

Помимо трудностей, связанных с измерением вероятных источников энергии, следует также учитывать возможное наличие посторонних помех в данных измерений. Как показано в разд. 4.2, присутствие посторонних шумов в измерениях входных или выходного процессов приводит к уменьшению значений функции когерентности, которая входит в формулу (9.6). Однако при интерпретации результатов анализа с целью идентификации вкладов отдельных источников энергии мы предполагаем, что шумы могут исказить только результаты измерений процесса на выходе системы; измерения  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , считаются неискаженными внешними помехами. Если в действительности помехи присутствуют и в измерениях процессов, поступающих на вход системы, то значения функций когерентности снизятся и расчет по формуле (9.6) приведет к занижению вклада, вносимого каждым источником в выходной процесс  $y(t)$ . Пусть измеренные входные процессы имеют вид  $x_i(t) = w_i(t) + m_i(t)$ , где  $w_i(t)$  — истинный входной процесс, а  $m_i(t)$  — шумы измерения. Тогда в соответствии с уравнением (4.48) оценка когерентного спектра выходного процесса принимает вид

$$\hat{G}_{y:x_i}(f) = G_{y:w_i}(f) \frac{G_{w_i w_i}(f)}{G_{w_i w_i}(f) + G_{m_i m_i}(f)}. \quad (9.13)$$

Отсюда видно, что важно получить максимально возможное отношение сигнала к шуму при измерении входных процессов.

### 9.2.2. Смещение оценок при наличии сдвигов по времени

При решении инженерных задач, связанных с исследованием многомерных систем, регистрация всех процессов обычно выполняется в одном масштабе времени. Если иметь в виду оценивание функцией когерентности, то такой подход приемлем до тех пор, пока длина реализации  $T$  существенно превышает сдвиг по времени  $\tau_1$  между парами реализаций. Вместе с тем при  $\tau_1 \rightarrow T$  оценка функции когерентности становится смещенной. Как показано в гл. 11 [формула (11.31)], при наличии сдвига по времени между реализациями величина отрицательного смещения оценки  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  функции когерентности  $\gamma_{xy}^2(f)$  определяется соотношением

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) \approx \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right)^2 \gamma_{xy}^2(f). \quad (9.14)$$

Если процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  дельта-коррелированы (т. е. представляют собой физически нереализуемые белые шумы), то уравнение (9.14) является точным. Однако оно дает хорошее приближение и в случае, когда ширина спектров процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  такова, что  $BT \gg 1$ .

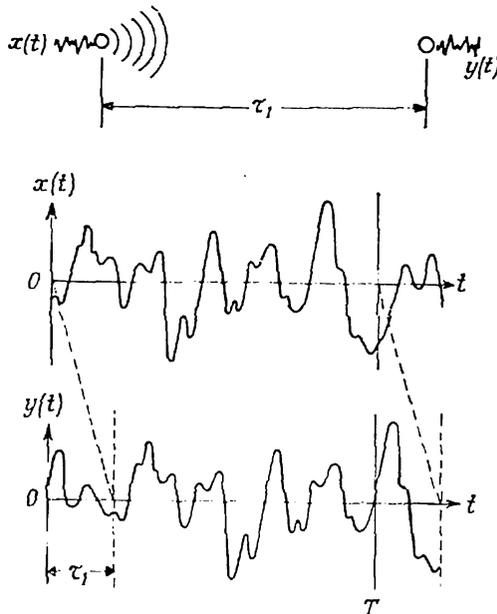


Рис. 9.2. Система с запаздыванием в задаче об идентификации источника энергии.

Систематическая ошибка за счет сдвига по времени, определенная уравнением (9.14), возникает во всех случаях, когда распространение импульса  $x(t)$  по тракту системы происходит не мгновенно, а измерения выполняются синхронно (рис. 9.2). Смещение может быть особенно большим при расчете функций когерентности на основе широко распространенного сейчас метода быстрого преобразования Фурье (БПФ), согласно которому оценки спектральной плотности находятся путем усреднения по ансамблю оценок, построенных по многим относительно коротким реализациям (см. разд. 3.4.2). Однако этой ошибки легко избежать, заранее оценив вероятные задержки по времени в трактах системы и вводя соответствующие сдвиги между реализациями до начала анализа. Как правило, современные анализаторы оборудованы нужными для этой цели устройствами.

### 9.2.3. Влияние реверберации

Влияние реверберации может проявляться двояко. Во-первых, как входной, так и выходной сигнал может подвергаться многократному отражению. Как показано в разд. 7.3.4, подобный реверберационный эффект может привести к тому, что

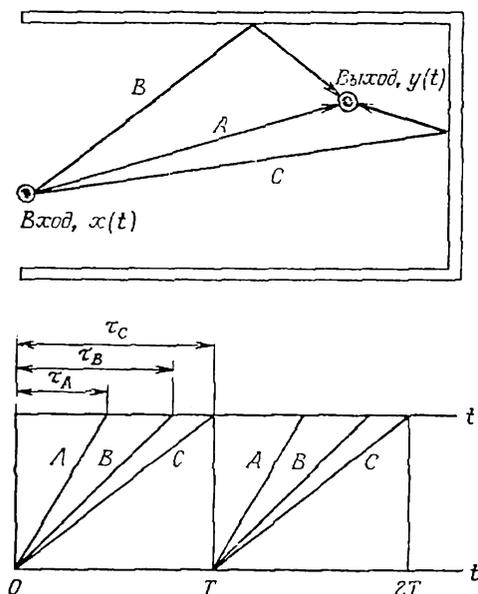


Рис. 9.3. Запоздывание из-за присутствия отраженных сигналов в выходном процессе.

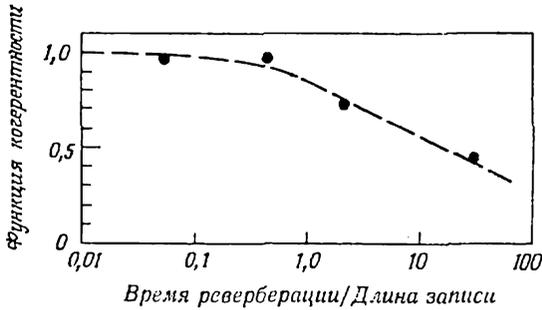


Рис. 9.4. Смещение оценки функции когерентности из-за присутствия отраженных сигналов в выходном процессе.

оценка функции когерентности между входным процессом  $x(t)$  и выходным процессом  $y(t)$  будет вести себя, как в описанном уравнением (7.64) случае диффузных шумов. В результате уравнение (9.6) даст заниженные оценки вкладов входных процессов в спектр выхода, что приведет к целому ряду ограничений на методы идентификации источников энергии в многомерных системах. Во-вторых, возможен и такой случай, когда реверберация сказывается только на выходном процессе и не влияет существенно на входной процесс  $x(t)$ . Тогда можно просто считать, что процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  связаны несколькими трактами (см. гл. 6) с различными временами распространения сигнала (рис. 9.3). Для введения поправки на время распространения возмущения по основному тракту достаточно сдвинуть по времени реализацию выходного процесса, что, однако, не избавит нас от описанным уравнением (9.14) ошибок смещения, связанных с присутствием отраженных сигналов в реализации выходного процесса. Таким образом, для получения правильной оценки функции когерентности длина реализации в этом случае должна быть существенно больше времени распространения всех энергетически значимых отраженных сигналов. Следует подчеркнуть, что длина реализации  $T$  есть в данном случае продолжительность участков записи каждого из анализируемых процессов, по которым строятся оценки спектральной плотности. Как показано в разд. 3.4.2, величина  $T$  связана с общей длиной анализируемого процесса соотношением  $T_{\text{общ}} = n_d T$ .

Смещение оценки функции когерентности за счет задержки сигнала иногда можно оценить с помощью отношения  $T_r/T$ , где  $T_r$  — время реверберации. Последняя величина определяется следующим образом: если сигнал  $x(t)$  прерывается мгновенно, то  $T_r$  есть время, в течение которого дисперсия сигнала на выходе  $y(t)$  убывает на 60 дБ (т. е. в  $10^6$  раз). На рис. 9.4 показаны результаты эмпирического анализа системы, в которой ре-

верберация искажает только измерения выходного процесса, а источник, генерирующий акустический шум, таких искажений не содержит. Запись производилась в помещении объемом около  $60 \text{ м}^3$  при полосе частот от 0,1 до 10 кГц. Как видно из рис. 9.4, смещение оценки функции когерентности за счет задержки распространения сигнала мало, если длина записи  $T$  превышает время реверберации  $T_r$ .

Заметим в заключение, что наличие смещения в оценке функции когерентности можно иногда с успехом использовать для анализа систем, в которых эффекты реверберации проявляются только на выходе. В частности, иногда нас интересует лишь непосредственный вклад входного процесса в процесс, наблюдаемый на выходе системы. Если ширина полосы частот источника достаточно велика, так что максимумы взаимной ковариационной функции  $R_{xy}(\tau)$ , соответствующие прямому тракту и первому отраженному сигналу, отстоят друг от друга на заметное расстояние, то оценку непосредственного вклада входного процесса можно получить, правильно выбрав длину реализаций. Допустим, что взаимная ковариационная функция, связывающая процессы  $x(t)$  и  $y(t)$ , может быть представлена в виде (6.2). Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — моменты, при которых наблюдаются максимумы взаимной ковариационной функции, соответствующие сдвигам по времени для сигналов, поступающих в приемник непосредственно и после первого отражения, и пусть за-

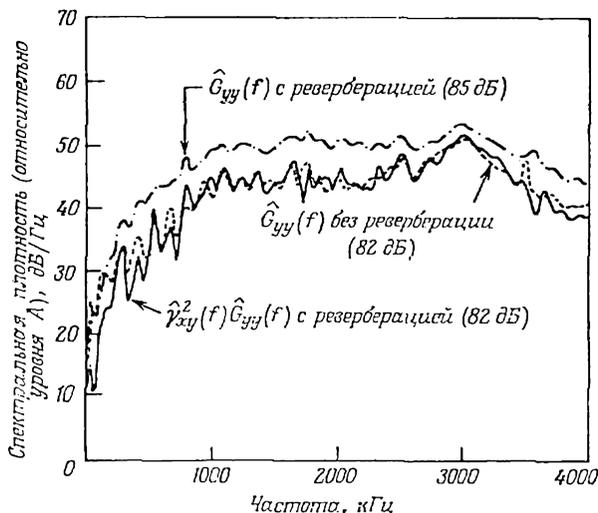


Рис. 9.5. Расчет смещенной оценки когерентного спектра выходного процесса, содержащего отраженные сигналы [9.1].

Разрешение по частоте  $B_e = 40$  Гц; число усреднений  $n_d = 400$ .

паздывания  $\tau_k$  в других трактах превышают величину  $\tau_2$  (т. е.  $\tau_k > \tau_2$ ,  $k=3, 4, 5, \dots$ ). Если теперь выбрать длину реализации  $T$  таким образом, чтобы  $\tau_1 < T < \tau_2$ , и вычислить функцию когерентности между  $x(t)$  и  $y(t)$ , то смещенная оценка  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f, T)$  определит непосредственный вклад  $x(t)$  в  $y(t)$ :

$$G_{y;x_d}(f) = \hat{\gamma}_{xy}^2(f, T) G_{yy}(f), \quad \tau_1 < T < \tau_2. \quad (9.15)$$

Рассмотрим в качестве примера акустический эксперимент, проведенный Халворсеном [9.1]; соответствующая схема показана выше на рис. 9.3. Источник возмущения  $x(t)$  представляет собой широкополосный случайный шум, а спектр процесса  $y(t)$  на выходе системы определяется только по непосредственному вкладу источника на основании уравнения (9.15). Затем отражающие стенки были убраны и вновь был определен спектр выходного процесса  $y(t)$ . Во всех расчетах разрешающая способность спектра  $B_e$  была равна 40 Гц при  $n_d=400$ . Результаты приведены на рис. 9.5. Как видно, совпадение между оценками, полученными с использованием уравнения (9.15) и при практическом отсутствии отраженных сигналов, очень хорошее почти на всех частотах.

#### 9.2.4. Обратные связи и нелинейные эффекты

Соотношение (9.6) получено в предположении, что между процессами  $x(t)$  и  $y(t)$  нет обратной связи, так что  $x(t)$  генерирует процесс  $y(t)$ , который не может в свою очередь повлиять на  $x(t)$ . Для анализа систем с обратной связью необходимы дополнительные измерения (разд. 4.3). Однако на практике вполне возможны случаи, когда обратная связь существует. К ним относится и рассмотренная в предыдущем разделе проблема реверберации, когда процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  подвергаются отражениям. Приведем более тонкий пример системы с обратной связью. Пусть изучаемая конструкция испытывает акустические вибрации, вызываемые мощным источником, причем интенсивность источника измеряется при помощи микрофона, а интенсивность вибраций — акселерометром. Однако при вибрации конструкции также возникают акустические колебания, которые могут быть зарегистрированы микрофоном, если он расположен слишком близко к вибрирующей конструкции. Здесь явно присутствует обратная связь, и это необходимо иметь в виду для получения правильных результатов.

Что касается нелинейных эффектов, то, как показано в разд. 5.1.1, общий подход, используемый при выводе уравнения (9.6), приводит к тому, что все нелинейные зависимости между  $x(t)$  и  $y(t)$  проявляются как статистически независимый (внеш-

ний) шум на выходе системы, т. е. нелинейные эффекты входят в помеху  $n(t)$  (рис. 9.1). В этом случае уравнение (9.6) даст заниженный вклад источника в сигнал на выходе системы. Поэтому при решении задачи идентификации источника нужно доказывать линейный характер трактов системы.

При механических вибрациях наиболее часто встречаются нелинейные эффекты, связанные с возникновением «дребезжания». Если дребезжание имеет место вблизи выхода системы (так что именно им определяется в первую очередь сигнал  $y(t)$  на выходе), то значения функции когерентности, связывающей выход  $y(t)$  с измерениями  $x(t)$  истинного источника вибрации, будут сильно занижены, показывая тем самым, что истинный источник не дает существенного вклада в выходной процесс. И наоборот, если измерения производятся вблизи источника дребезжания, то именно он будет идентифицирован как источник энергии, поступающей в систему. Такой подход вполне оправдан в тех случаях, когда задача состоит именно в обнаружении дребезжания, а не источника вибрации. Однако во многих других случаях дребезжание и другие нелинейные эффекты просто исказят результаты анализа и могут привести к ошибочным выводам.

### 9.3. Взаимодействие между наблюдениями

Возвращаясь к рис. 9.1, заметим, что показанная на нем система построена таким образом, что каждый измеренный входной процесс  $x_i(t)$  является результатом линейного преобразования истинного входного процесса  $u_i(t)$  и никак не связан с другими источниками  $u_j(t)$ ,  $i \neq j$ . Однако на практике не всегда можно сконструировать датчики, которые будут регистрировать только данный процесс, не реагируя на другие близко расположенные источники возмущения. Особенно серьезной эта проблема является в акустике, когда источники возмущения регистрируются при помощи микрофонов. Взаимодействия такого рода могут привести к появлению корреляции между наблюдаемыми входными процессами  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , даже тогда, когда истинные входы  $u_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , не коррелированы друг с другом. В таком случае вычисления по уравнению (9.6) дадут завышенные оценки вклада отдельных источников в процесс, наблюдаемый на выходе системы.

#### 9.3.1. Расчет когерентного спектра выходного процесса

Для того чтобы проиллюстрировать проблемы, возникающие при наличии взаимодействий между наблюдаемыми входными процессами, рассмотрим систему с двумя независимыми входа-

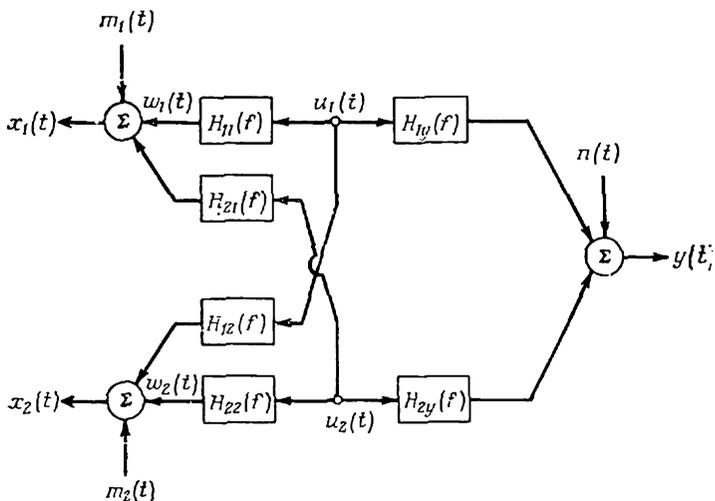


Рис. 9.6. Взаимодействия между измеренными входными процессами в системе с двумя входами и одним выходом.

ми  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , генерирующими процесс  $y(t)$  на выходе системы (рис. 9.6). Первый источник измеряется датчиком 1 с частотной характеристикой  $H_{11}(f)$ ; частотная характеристика датчика 2, измеряющего процесс  $u_2(t)$ , есть  $H_{22}(f)$ . Однако датчик 2 испытывает некоторое влияние первого источника, а датчик 1 — влияние второго источника; соответствующие частотные характеристики, связывающие датчики 2 и 1 с первым и вторым источниками, суть  $H_{12}(f)$  и  $H_{21}(f)$ . Связь источников  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  с выходным процессом  $y(t)$  задается частотными характеристиками  $H_{1y}(f)$  и  $H_{2y}(f)$  соответственно. На выходе может присутствовать также внешняя помеха  $n(t)$ , однако считается, что измеренные входные процессы свободны от посторонних искажений. Для получения количественных оценок предположим, что на некоторой частоте функции  $H_{11}$ ,  $H_{22}$ ,  $H_{1y}$  и  $H_{2y}$  удовлетворяют следующим равенствам:

$$H_{11} = H_{22} = 1,00, \quad H_{1y} = H_{2y} = 0,50.$$

Допустим также, что на той же частоте значения спектральной плотности истинных источников  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  равны<sup>1)</sup>

$$G_{u_1 u_1} = 1,00A; \quad G_{u_2 u_2} = 2,00A.$$

Начнем рассмотрение с идеального случая, когда система вообще не содержит внешних помех, а взаимодействие между

<sup>1)</sup> Здесь  $A$  есть некоторое число. — Прим. перев.

наблюдаемыми входными процессами отсутствует, т. е.  $H_{12} = H_{21} = 0$ . Согласно результатам, полученным в разд. 8.1.3, имеем

$$\begin{aligned} G_{x_1x_1} &= G_{u_1u_1} = 1,00A, & G_{x_2x_2} &= G_{u_2u_2} = 2,00A, \\ G_{x_1y} &= G_{u_1y} = H_{1y}G_{u_1u_1} = 0,50A, & G_{x_2y} &= G_{u_2y} = H_{2y}G_{u_2u_2} = 1,00A, \\ G_{yy} &= |H_{1y}|^2 G_{u_1u_1} + |H_{2y}|^2 G_{u_2u_2} = 0,75A, \\ \gamma_{x_1y}^2 &= \frac{|G_{x_1y}|^2}{G_{x_1x_1}G_{yy}} = 0,333, & \gamma_{x_2y}^2 &= \frac{|G_{x_2y}|^2}{G_{x_2x_2}G_{yy}} = 0,667. \end{aligned}$$

В соответствии с формулой (9.6) получаем

$$G_{y:x_1} = \gamma_{x_1y}^2 G_{yy} = 0,25A, \quad G_{y:x_2} = \gamma_{x_2y}^2 G_{yy} = 0,50A, \quad (9.16)$$

что, очевидно, является правильным ответом. Действительно, поскольку  $H_{1y} = H_{2y}$ , выходной процесс должен быть на одну треть обусловлен источником 1 и на две трети — источником 2.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда внешняя помеха по-прежнему отсутствует, но взаимодействие между наблюдаемыми входами имеет место, причем  $H_{12} = H_{21} = 0,50$ . Тогда оценки спектральных плотностей имеют вид

$$\begin{aligned} G_{x_1x_1} &= |H_{11}|^2 G_{u_1u_1} + |H_{21}|^2 G_{u_2u_2} = 1,50A, \\ G_{x_2x_2} &= |H_{12}|^2 G_{u_1u_1} + |H_{22}|^2 G_{u_2u_2} = 2,25A, \\ G_{x_1y} &= H_{11}^* H_{1y} G_{u_1u_1} + H_{21}^* H_{2y} G_{u_2u_2} = 1,00A, \\ G_{x_2y} &= H_{12}^* H_{1y} G_{u_1u_1} + H_{22}^* H_{2y} G_{u_2u_2} = 1,25A, \\ G_{x_1x_2} &= H_{11}^* H_{12} G_{u_1u_1} + H_{21}^* H_{22} G_{u_2u_2} = 1,50A, \\ G_{yy} &= |H_{1y}|^2 G_{u_1u_1} + |H_{2y}|^2 G_{u_2u_2} = 0,75A, \\ \gamma_{x_1y}^2 &= \frac{|G_{x_1y}|^2}{G_{x_1x_1}G_{yy}} = 0,889, & \gamma_{x_2y}^2 &= \frac{|G_{x_2y}|^2}{G_{x_2x_2}G_{yy}} = 0,926. \end{aligned}$$

Окончательно формула (9.6) дает следующие оценки когерентных вкладов источников в спектр выходного процесса:

$$G_{y:x_1} = \gamma_{x_1y}^2 G_{yy} = 0,667A, \quad G_{y:x_2} = \gamma_{x_2y}^2 G_{yy} = 0,694A. \quad (9.17)$$

Отличие этих уравнений от уравнений (9.16) и (9.17) характеризует эффект, связанный с взаимодействием наблюдаемых входных процессов. Заметим, что абсолютный вклад каждого источника завышен, а относительный — занижен.

Рассмотрим, наконец, случай, когда помимо взаимодействия между измерениями входных процессов на выходе системы присутствует посторонняя помеха, спектральная плотность которой  $G_{nn} = 0,25A$ . Значения частотных характеристик  $H_{12}$  и  $H_{21}$  не меняются:  $H_{12} = H_{21} = 0,50$ . При этом спектры входных процессов и взаимные спектры, связывающие входные процессы с выходом

$y(t)$ , по-прежнему задаются равенствами, непосредственно предшествующими формулам (9.17), а спектр выходного процесса и функции когерентности принимают вид

$$G_{yy} = |H_{1y}|^2 G_{u_1 u_1} + |H_{2y}|^2 G_{u_2 u_2} + G_{nn} = 1,00A,$$

$$\gamma_{x_1 y}^2 = \frac{|G_{x_1 y}|^2}{G_{x_1 x_1} G_{y y}} = 0,667, \quad \gamma_{x_2 y}^2 = \frac{|G_{x_2 y}|^2}{G_{x_2 x_2} G_{y y}} = 0,694,$$

что отличается от полученных ранее значений. Однако из формулы (9.6) следует, что

$$G_{y \cdot x_1} = \gamma_{x_1 y}^2 G_{y y} = 0,667A, \quad G_{y \cdot x_2} = \gamma_{x_2 y}^2 G_{y y} = 0,694A. \quad (9.18)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, внешний шум не сказывается на вкладе источников в спектр выходного процесса. Присутствие помехи на выходе приводит к изменению относительного вклада каждого входного процесса в спектр процесса  $y(t)$ , но не меняет их абсолютных значений<sup>1)</sup>.

### 9.3.2. Вычисление функций частной когерентности

Посмотрим теперь, каким образом можно использовать функции частной когерентности, когда наблюдаемые входные процессы взаимодействуют друг с другом. Для ответа на этот вопрос вернемся к показанной на рис. 9.6 системе с двумя процессами на входе. Согласно формулам, полученным в разд. 8.3, функции частной когерентности, связывающие выходной процесс с каждым из входов, имеют вид

$$\gamma_{x_i y \cdot x_j}^2 = \frac{|G_{x_i y \cdot x_j}|^2}{G_{x_i x_i} G_{y y \cdot x_j}}, \quad i \neq j = 1, 2, \quad (9.19)$$

а остаточные спектральные плотности задаются равенствами

$$G_{x_1 x_1 \cdot x_2} = G_{x_1 x_1} (1 - \gamma_{x_1 x_2}^2), \quad G_{x_2 x_2 \cdot x_1} = G_{x_2 x_2} (1 - \gamma_{x_2 x_1}^2),$$

$$\{G_{x_1 y \cdot x_2} = G_{x_1 y} - \frac{G_{x_1 x_2} G_{x_2 y}}{G_{x_2 x_2}}, \quad G_{x_2 y \cdot x_1} = G_{x_2 y} - \frac{G_{x_2 x_1} G_{x_1 y}}{G_{x_1 x_1}},$$

$$G_{y y \cdot x_2} = G_{y y} (1 - \gamma_{x_2 y}^2), \quad G_{y y \cdot x_1} = G_{y y} (1 - \gamma_{x_1 y}^2).$$

В первом случае, рассмотренном в разд. 9.3.1, когда между входными процессами нет взаимодействия ( $H_{12} = H_{21} = 0$ ), из приведенных выше соотношений и результатов, полученных в

<sup>1)</sup> Величина относительного вклада совпадает со значением функции когерентности, которое уменьшается при наличии помехи на выходе системы. — Прим. перев.

предыдущем разделе, следует, что

$$\begin{aligned} G_{x_1 x_1 \cdot x_2} &= 1,00A, & G_{x_2 x_2 \cdot x_1} &= 2,00A, \\ G_{x_1 y \cdot x_2} &= 0,50A, & G_{x_2 y \cdot x_1} &= 1,00A, \\ G_{yy \cdot x_2} &= 0,25A, & G_{yy \cdot x_1} &= 0,50A. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно формуле (9.19), функции частной когерентности равны

$$\gamma^2_{x_1 y \cdot x_2} = 1,00, \quad \gamma^2_{x_2 y \cdot x_1} = 1,00. \quad (9.20)$$

Итак, при исключении эффекта одного из входных процессов обнаруживается, как и следовало ожидать, строго линейная зависимость между вторым входом и выходом.

Во втором случае, когда входные процессы взаимодействуют друг с другом и  $H_{12} = H_{21} = 0,50$ , имеем

$$G_{x_1 x_2} = H_{11} * H_{12} G_{u_1 u_1} + H_{21} * H_{22} G_{u_2 u_2} = 1,50A,$$

и окончательно получаем

$$\begin{aligned} G_{x_1 x_1 \cdot x_2} &= 0,50A, & G_{x_2 x_2 \cdot x_1} &= 0,75A, \\ G_{x_1 y \cdot x_2} &= 0,167A, & G_{x_2 y \cdot x_1} &= 0,250A, \\ G_{yy \cdot x_2} &= 0,0555A, & G_{yy \cdot x_1} &= 0,0833A, \\ \gamma^2_{x_1 y \cdot x_2} &= 1,00, & \gamma^2_{x_2 y \cdot x_1} &= 1,00. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Следовательно, взаимодействие между входными процессами не влияет на функции частной когерентности, и они по-прежнему указывают на строго линейный характер системы.

Наконец, если на выходе системы присутствует помеха со спектральной плотностью  $G_{nn} = 0,25A$ , то

$$\begin{aligned} G_{x_1 x_1 \cdot x_2} &= 0,50A, & G_{x_2 x_2 \cdot x_1} &= 0,75A, \\ G_{x_1 y \cdot x_2} &= 0,167A, & G_{x_2 y \cdot x_1} &= 0,250A, \\ G_{yy \cdot x_2} &= 0,30A, & G_{yy \cdot x_1} &= 0,33A, \\ \gamma^2_{x_1 y \cdot x_2} &= 0,19, & \gamma^2_{x_2 y \cdot x_1} &= 0,25. \end{aligned} \quad (9.22)$$

Этот результат интерпретируется следующим образом. При исключении вклада, вносимого наблюдаемым процессом  $x_2(t)$ , 19% энергии выходного процесса определяется входом  $x_1(t)$ , а остальные 81% — помехой на выходе системы. После исключения вклада процесса  $x_1(t)$  процесс  $x_2(t)$  определяет 25% энергии выходного процесса, а остальные 75% создаются помехой. Следует отметить, что функции частной когерентности не позволяют определить относительные вклады входных процессов, что,

конечно, было бы весьма желательно. Однако более мощному источнику соответствует несколько более высокое значение частной когерентности. Если считать, что степень взаимодействия одинакова для всех датчиков, то этот вывод справедлив в общем случае, и он хорошо описывает роль функций частной когерентности при решении задач подобного рода.

### 9.3.3. Подавление взаимодействий между измерениями

Единственный способ избавиться от взаимодействия между наблюдаемыми входными процессами заключается в том, чтобы использовать для измерения входных процессов  $u_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , такие датчики, которые по возможности менее чувствительны к посторонним источникам. Здесь особенно полезен результат, полученный в разд. 9.1.2: для измерения можно пользоваться любым датчиком, обладающим линейной частотной характеристикой. Если, например, источником акустического сигнала является вибрация некоторой конструкции, то для измерения лучше использовать акселерометр, установленный на конструкции, а не находящийся вблизи нее датчик давления (микрофон). Поскольку колебания конструкции и генерируемый ими акустический шум связаны линейно, установленный в некоторой точке акселерометр будет с вполне приемлемой точностью измерять акустический шум, если, конечно, можно считать, что рассматриваемая конструкция колеблется в общем как единое целое. Конечно, показания акселерометра не будут полностью свободны от посторонних воздействий, поскольку он будет регистрировать вибрации конструкции, генерируемые другими акустическими источниками. Однако во многих случаях эти помехи будут значительно меньше, чем при измерении сигнала с помощью датчика давления.

Для иллюстрации приведенных выше соображений рассмотрим эксперимент, иллюстрируемый рис. 9.7: вибрирующая пластина, возбуждаемая широкополосным случайным сигналом, генерирует акустический шум, который регистрируется внешним микрофоном. Спектр этого шума, записанного при отсутствии фоновых помех, представлен на рис. 9.8. К создаваемому пластиной акустическому сигналу добавляется сильный статистически независимый фоновый шум, генерируемый расположенным вблизи громкоговорителем. Энергия шума превышает энергию сигнала на 27 дБ (т. е. в 500 раз). Спектр выходного сигнала при наличии шума также показан на рис. 9.8. Если измерять генерируемый пластиной шум с помощью расположенного поблизости микрофона, то, как видно из рис. 9.9, а, вычисление когерентного спектра выходного сигнала по формуле (9.6) приведет к совершенно неверным результатам. Это происходит

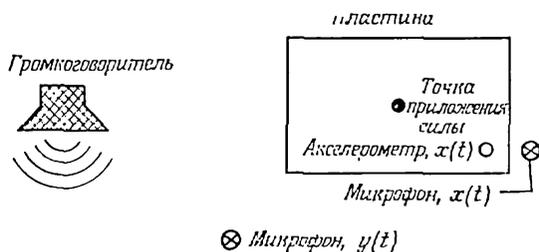


Рис. 9.7. Акустический эксперимент с вибрирующей пластиной.

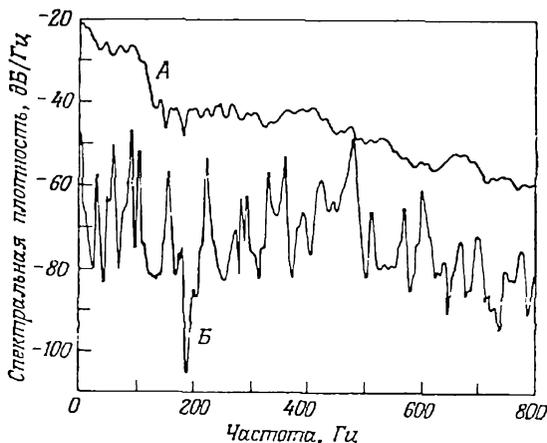


Рис. 9.8. Спектр акустического сигнала, генерируемого вибрирующей пластиной (Б), и спектр суммы этого сигнала с внешней помехой (А).

Разрешение по частоте  $B_e=2$  Гц; число усреднений  $n_d=1024$ .

Спектральная плотность измеряется относительно общего среднего квадрата суммарного процесса.

потому, что микрофон регистрирует в первую очередь не сигнал источника, а фоновый шум. Если же сигнал измеряется при помощи установленного на пластине акселерометра, то вычисление когерентного спектра выходного процесса дает вполне приемлемые результаты (рис. 9.9, б). Все оценки, приведенные на рис. 9.8 и 9.9, получены при разрешении по частоте  $B_e=2$  Гц и числе усреднений  $n_d=1024$ .

#### 9.4. Физически связанные источники

Последняя задача идентификации источников энергии, относится к случаю, когда между некоторыми из источников существуют физически реальные зависимости. Этот случай отличается от рассмотренной в предыдущем разделе задачи взаимодей-

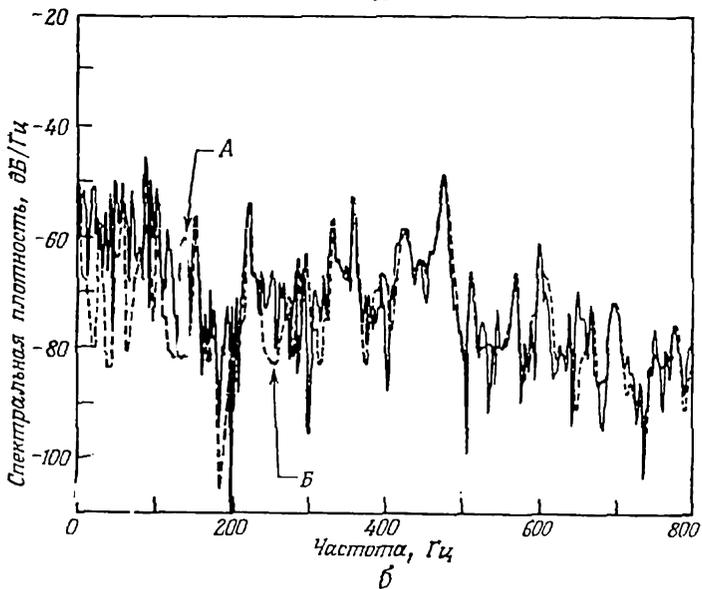
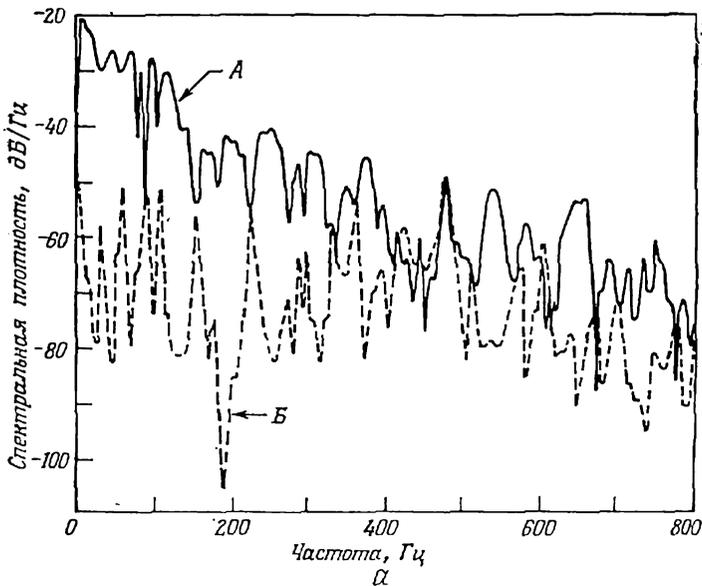


Рис. 9.9. Когерентный спектр шума, генерируемый пластиной, при измерении входного процесса микрофоном (а) и акселерометром (б).  
Разрешение по частоте  $B_p = 2$  Гц; число усреднений  $n_d = 1024$ .

Спектральная плотность измеряется относительно общего среднего квадрата процесса.  
А — когерентный спектр выхода; Б — спектр акустического сигнала.

ствия между наблюдаемыми входными процессами, поскольку теперь коррелированы не измерения  $x_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , а истинные входные процессы  $u_i(t)$ . Однако мы будем считать, что никакие два источника не связаны строго линейно, поскольку при этом меняется смысл задачи (разд. 8.1.3). Заметим, что две синусоиды с одинаковой частотой всегда связаны строго линейно. Поэтому описываемые здесь методы не могут быть использованы для анализа систем, на вход которых поступают периодические сигналы, имеющие общие частоты.

#### 9.4.1. Анализ когерентных спектров

Как следует из результатов, полученных в гл. 8, непосредственное вычисление когерентного спектра выходного процесса по формуле (9.6) приведет к завышению вкладов отдельных источников в спектр выхода, если отдельные входы коррелированы друг с другом. Чтобы сделать это утверждение более понятным, рассмотрим систему с двумя источниками возмущения, показанную на рис. 9.10. Этот случай близок к задаче анализа системы с взаимодействующими наблюдениями над входными процессами (ср. рис. 9.6), но здесь коррелированы не измерения входных процессов, а сами входные процессы. Предположим, что часть вклада, вносимого в выходной процесс источником 2, обусловлена источником 1, который связан со вторым входным процессом линейной системой, имеющей частотную характеристику  $H_{12}$ , так что  $U_2 = U_1 + H_{12}U_1$ .

Для получения количественных оценок примем, как и в разд. 9.3.1, что

$$H_{12} = H_{11} = H_{22} = 1,00; \quad H_{1y} = H_{2y} = 0,50.$$

Предположим также, что *статистически независимые* части спектров одинаковы для обоих входов и равны 1,00А. Тогда

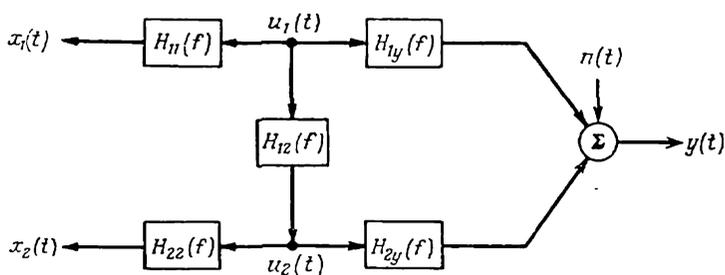


Рис. 9.10. Система с двумя коррелированными входными процессами и одним процессом на выходе.

спектральные характеристики истинных входных процессов и их измерений имеют вид

$$G_{x_1x_1} = G_{u_1u_1} = G_{11} = 1,00A, \quad G_{x_2x_2} = G_{u_2u_2} = G_{22} = 2,00A,$$

$$G_{x_1x_2} = G_{u_1u_2} = G_{12} = 1,00A, \quad \gamma_{12}^2 = \frac{|G_{12}|^2}{G_{11}G_{22}} = 0,50.$$

В соответствии с результатами, полученными в разд. 8.1.3, при отсутствии помех на выходе имеем

$$G_{1y} = H_{1y}G_{11} + H_{2y}G_{12} = 1,00A, \quad G_{2y} = H_{2y}G_{22} + H_{1y}G_{21} = 1,50A,$$

$$G_{yy} = |H_{1y}|^2 G_{11} + H_{1y}^* H_{2y} G_{12} + H_{2y}^* H_{1y} G_{21} + |H_{2y}|^2 G_{22} = 1,25A,$$

$$\gamma_{1y}^2 = \frac{|G_{1y}|^2}{G_{11}G_{yy}} = 0,80, \quad \gamma_{2y}^2 = \frac{|G_{2y}|^2}{G_{22}G_{yy}} = 0,90.$$

Поэтому, согласно формуле (9.6), когерентные спектры имеют вид

$$G_{y:1} = \gamma_{1y}^2 G_{yy} = 1,00A; \quad G_{y:2} = \gamma_{2y}^2 G_{yy} = 1,125A. \quad (9.23)$$

Эти результаты, очевидно, неверны, поскольку  $G_{y:1} + G_{y:2} > > G_{yy}$ . Однако если сделать правильное предположение, что корреляция между входными процессами физически обусловлена источником 1, то когерентный спектр  $G_{y:1}$ , заданный формулой (9.23), получит правильную интерпретацию. Величина  $G_{y:1} = 1,00A$  есть суммарный вклад источника 1 в выходной процесс  $y(t)$  по всем возможным трактам. Это утверждение справедливо потому, что статистически независимый вклад источника 2 в  $y(t)$  есть

$$G_{y:2 \cdot 1} = |H_{2y}|^2 G_{22 \cdot 1} = |H_{2y}|^2 A = 0,25A. \quad (9.24)$$

Следовательно, суммарный вклад источника 1 с учетом его корреляции с источником 2 определяется в виде

$$G_{y:1} = G_{yy} - G_{y:2 \cdot 1} = 1,00A, \quad (9.25)$$

что совпадает с формулой (9.23). Можно рассуждать и по-другому: если бы источник 2 был «выключен» и по соответствующему тракту в выходной процесс поступал только сигнал, обусловленный корреляцией с источником 1, то, согласно формуле (8.6), спектральная плотность выходного процесса определялась бы равенством

$$G_{yy} = |H_{1y} + H_{2y}H_{12}|^2 G_{11} = 1,00A. \quad (9.26)$$

Понятно, что если бы мы ошибочно предположили, что корреляция между входными процессами физически обусловлена источником 2, то приведенная выше интерпретация формул (9.23) была бы совершенно неверной.

Пусть теперь на выходе системы присутствует внешняя помеха, имеющая спектральную плотность  $G_{nn}=0,25A$ . Тогда спектр выходного процесса есть  $G_{yy}=1,50A$  и

$$\gamma^2_{1y}(f) = 0,667; \quad \gamma^2_{2y}(f) = 0,750.$$

Согласно формуле (9.6), имеем

$$G_{y:1} = 1,00A; \quad G_{y:2} = 1,125A, \quad (9.27)$$

что совпадает с формулами (9.23). Таким образом, присутствие внешней помехи на выходе системы не влияет на когерентный спектр выходного сигнала (хотя, как будет показано ниже, внешний шум увеличивает случайную погрешность оценок).

#### 9.4.2. Использование частных когерентных спектров

Имея в виду результаты, полученные в гл. 8. при анализе системы с коррелированными источниками, можно воспользоваться частными когерентными спектрами, как это было сделано выше [см. формулу (8.83)] для системы с двумя входными процессами. Заметим, однако, что полное решение задачи таким путем получить не удастся. Поясним этот подход на примере системы, показанной на рис. 9.10. Будем сначала считать, что помеха на выходе отсутствует, т. е.  $n(t) = 0$ . Согласно вышеизложенному (разд. 8.3 и 9.4.1), имеем

$$\begin{aligned} G_{1y:2} &= G_{1y} - \frac{G_{12}G_{2y}}{G_{22}} = 0,25A, & G_{2y:1} &= G_{2y} - \frac{G_{21}G_{1y}}{G_{11}} = 0,50A, \\ G_{11:2} &= G_{11}(1 - \gamma^2_{12}) = 0,50A, & G_{22:1} &= G_{22}(1 - \gamma^2_{21}) = 1,00A, \\ G_{yy:2} &= G_{yy}(1 - \gamma^2_{2y}) = 0,125A, & G_{yy:1} &= G_{yy}(1 - \gamma^2_{1y}) = 0,25A, \\ \gamma^2_{1y:2} &= \frac{|G_{1y:2}|^2}{G_{11:2}G_{yy:2}} = 1,00, & \gamma^2_{2y:1} &= \frac{|G_{2y:1}|^2}{G_{22:1}G_{yy:1}} = 1,00. \end{aligned}$$

Из формулы (8.83) следует, что частные когерентные спектры определяются как

$$G_{y:1:2} = \gamma^2_{1y:2} G_{yy:2} = 0,125A, \quad G_{y:2:1} = \gamma^2_{2y:1} G_{yy:1} = 0,25A. \quad (9.28)$$

В противоположность случаю, рассмотренному в разд. 9.4.1, частные когерентные спектры правильно определяют вклад источника 2, а не источника 1. Действительно, как следует из формулы (9.24), статистически независимый вклад источника 2 в спектр выходного процесса есть  $G_{y:2:1} = 0,25A$ , что совпадает со вторым из соотношений (9.28). С другой стороны, величина  $G_{y:1:2}$ , определенная первым соотношением (9.28), оказывается физически бессмысленной. Наличие помехи на выходе не скажется на этих результатах и на их интерпретации.

Итак, если правильно предположить, что причиной корреляции между входными процессами является источник 1 (как это и показано на рис. 9.10), то правильная оценка суммарного вклада источников в выходной процесс задается формулой (8.78):

$$G_{y;x} = \gamma^2_{1y} G_{yy} + \gamma^2_{2y \cdot 1} G_{yy \cdot 1}, \quad (9.29)$$

где

$$\gamma^2_{1y} G_{yy} = 1,00A = \text{Вклад источника 1,}$$

$$\gamma^2_{2y \cdot 1} G_{yy \cdot 1} = 0,25A = \text{Вклад источника 2.}$$

Заметим, что эти результаты оказываются верными не только чисто математически, но и физически. Если бы источник 1 был выключен, то спектральная плотность выходного процесса действительно бы упала до 1,00A. Если же выключить источник 2,

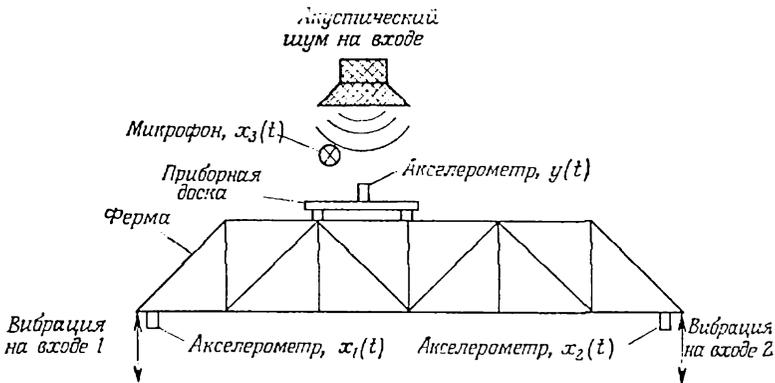


Рис. 9.11. Схема виброакустического эксперимента.

сохранив поступающий через него вклад источника 1, то спектр выходного процесса станет равным 0,25A. Конечно, на практике основная трудность заключается в правильном определении источника корреляции входных процессов.

Чтобы проиллюстрировать эти соображения, рассмотрим выполненный Барретом [9.2] лабораторный виброакустический эксперимент, схема которого показана на рис. 9.11. Приборная доска была установлена на ферме, на концы которой подавались тесно коррелированные механические вибрационные нагрузки и статистически независимый акустический шум с полосой частот от 5 до 1000 Гц. Входные процессы регистрировались двумя акселерометрами, установленными на концах фермы, и микрофоном, который был расположен над приборной доской. Выходной процесс измерялся акселерометром, установленным на приборной доске. Выходное ускорение  $y(t)$  выражалось через ускорение свободного падения ( $g=9,8 \text{ м/с}^2$ ), а спек-

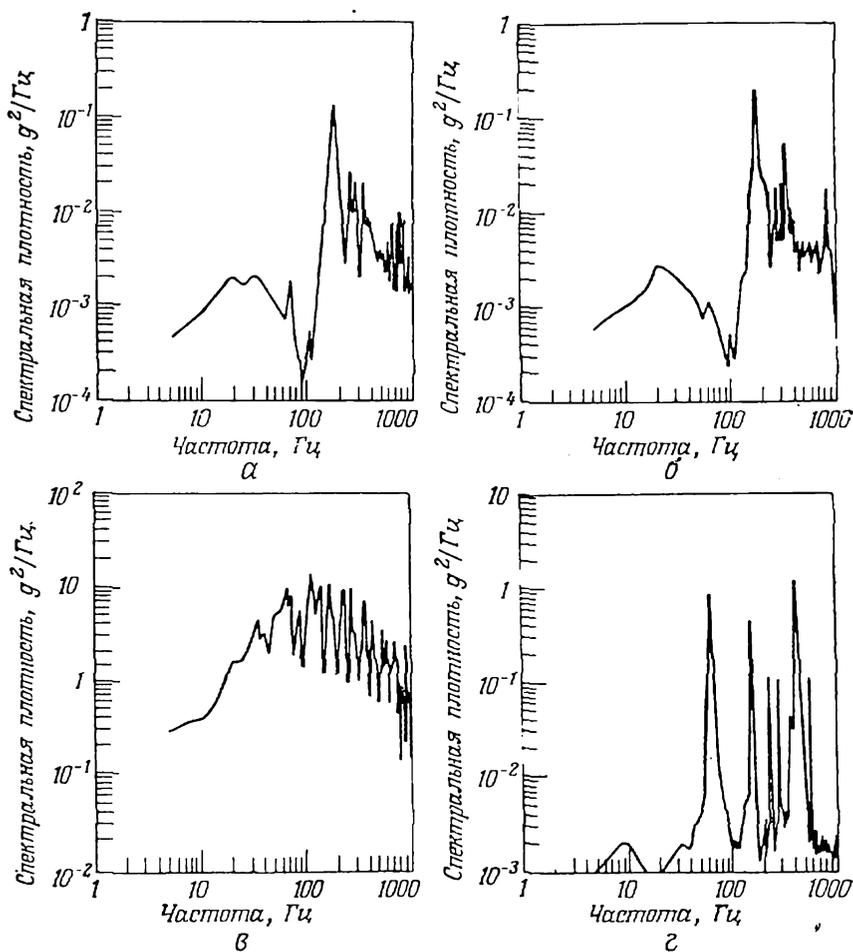


Рис. 9.12. Спектры входных и выходного процессов.

а, б — источники вибрации 1 и 2 соответственно; в — акустический шум на входе; г — вибрация пластины. Разрешение по частоте  $B_e=5$  Гц; число усреднений  $n_d=50$ . Рисунок заимствован из работы [9.2].

тральные оценки имели разрешающую способность  $B_e=5$  Гц и число усреднений  $n_d=50$ .

Спектры всех трех входных процессов и выхода  $y(t)$  в этом эксперименте с фермой показаны на рис. 9.12. Заметим, что реакция приборной доски почти целиком сосредоточена в нескольких узких частотных диапазонах, соответствующих слабодемпфированным вибрационным модам (собственным частотам) конструкции, состоящей из фермы и приборной доски (разд. 1.3.3).

Таблица 9.1

## Оценки частного когерентного спектра в эксперименте с вибрирующей пластиной

Частота, Гц	Значения функции когерентности				Спектр выхода, $g^2/\Gamma_c$		Частный когерентный спектр, $g^2/\Gamma_c$		
	$\gamma_{y,x}^2$	$\gamma_{1y}^2$	$\gamma_{2y-1}^2$	$\gamma_{3y-1,2}^2$	суммарный $G_{yy}$	когерентный $G_{y,z}$	$G_y: 1 = \gamma_{1y}^2 G_{yy}$	$G_y: 2: 1 = \gamma_{2y-1}^2 G_{yy-1}$	$G_y: 3: 1, 2 = \gamma_{3y-1,2}^2 G_{yy-1,2}$
68	0,81	0,78	0,09	0,04	0,91	0,74	0,71 (96%)	0,02 (3%)	0,01 (1%)
161	0,73	0,44	0,47	0,08	0,41	0,30	0,18 (60%)	0,11 (37%)	0,01 (3%)
230	0,72	0,15	0,56	0,26	0,14	0,10	0,02 (20%)	0,07 (70%)	0,01 (10%)
290	0,86	0,02	0,01	0,85	0,12	0,10	<0,01 (—)	<0,01 (—)	0,09 (90%)
420	0,64	0,05	0,06	0,60	1,2	0,77	0,06 (8%)	0,07 (9%)	0,64 (83%)

Поэтому при анализе можно ограничиться рассмотрением только этих резонансных частот. Значения функции множественной когерентности для пяти первых мод приведены в табл. 9.1. Величина  $\gamma^2_{y;x}$  находится в пределах от 0,64 до 0,86, что вполне приемлемо; вероятно, функция когерентности не достигает более высоких значений из-за смещения оценок на резонансных частотах в связи с низким спектральным разрешением (разд. 5.2.3). В табл. 9.1 приведены также значения частных когерентных спектров, которые вычислялись в следующем порядке:  $x_1(t)$  — входной процесс, генерируемый вибратором 1 (левая сторона фермы, ближайшая к приборной доске);  $x_2(t)$  — входной процесс, генерируемый вибратором 2 (правая сторона фермы);  $x_3(t)$  — акустический шум.

Из приведенных в табл. 9.1 результатов легче всего интерпретировать частный когерентный спектр, обусловленный входом  $x_3(t)$ , потому что этот процесс практически не коррелирован с вибрациями  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Как видно, относительный вклад статистически независимого процесса  $x_3(t)$  в когерентный спектр  $G_{y;x}$  возрастает почти от нуля (примерно 1%) на частоте 68 Гц до высоких значений (83%) на частоте 420 Гц. Этот результат с очевидностью демонстрирует, что вибрации  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  определяют реакцию  $y(t)$  на низких частотах, тогда как акустический шум  $x_3(t)$  обуславливает отклик на высоких частотах. Однако к оценкам относительных вкладов, создаваемых вибраторами, следует подходить с осторожностью, потому что входы  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  тесно коррелированы друг с другом. Так, можно предположить, что на частоте 68 Гц входной процесс  $x_1(t)$  определяет когерентный спектр выходного процесса на 96%, но нужно помнить, что значительная часть этого вклада может быть обусловлена корреляцией между  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . С другой стороны, на частоте 161 Гц вклад  $x_1(t)$  в когерентный спектр выходного процесса составляет, видимо, 60%, а 37% можно приписать статистически независимому вкладу, создаваемому только процессом  $x_2(t)$ . Это означает, что суммарный вклад  $x_2(t)$  составляет не менее 37%. На частоте 230 Гц статистически независимый вклад только процесса  $x_2(t)$  равен 70%, откуда следует, что вход  $x_2(t)$  определяет реакцию системы на этой частоте независимо от возможного вклада, вносимого процессом  $x_1(t)$ .

#### 9.4.3. Ошибки оценок

Сведения о случайных ошибках оценок функций частной когерентности и частных когерентных спектров приведены в гл. 11, а сводка результатов дана в табл. 9.2. Заметим, что величина ошибки во всех случаях зависит от значений функций когерент-

Таблица 9.2

Случайные ошибки оценок функций частной когерентности и частных когерентных спектров

Оценка	Случайная ошибка оценки
$\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$	$\frac{\sqrt{2} [1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(j)]}{ \hat{\gamma}_{xy}(f)  \sqrt{n_d}}$
$\hat{G}_{y: x}(f)$	$\frac{[2 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)]^{1/2}}{ \hat{\gamma}_{xy}(f)  \sqrt{n_d}}$
$\hat{\gamma}_{2y \cdot x_1}^2(f)$	$\frac{\sqrt{2} [1 - \hat{\gamma}_{2y \cdot x_1}^2(f)]}{ \hat{\gamma}_{2y \cdot x_1}(f)  \sqrt{n_d - 1}}$
$\hat{G}_{y: x_2 \cdot x_1}(f)$	$\frac{[2 - \hat{\gamma}_{2y \cdot x_1}^2(f)]^{1/2}}{ \hat{\gamma}_{2y \cdot x_1}(f)  \sqrt{n_d - 1}}$
$\hat{\gamma}_{3y \cdot x_1 \cdot x_2}^2(f)$	$\frac{\sqrt{2} [1 - \hat{\gamma}_{3y \cdot x_1 \cdot x_2}^2(f)]}{ \hat{\gamma}_{3y \cdot x_1 \cdot x_2}(f)  \sqrt{n_d - 2}}$
$\hat{G}_{y: x_3 \cdot x_1 \cdot x_2}(f)$	$\frac{[2 - \hat{\gamma}_{3y \cdot x_1 \cdot x_2}^2(f)]^{1/2}}{ \hat{\gamma}_{3y \cdot x_1 \cdot x_2}(f)  \sqrt{n_d - 2}}$

пости и от числа усреднений  $n_d$ . Необходимо подчеркнуть также, что приведенные здесь формулы справедливы только при относительно небольших значениях случайной ошибки ( $\epsilon_r < 0,20$ ). Выражения для ошибок оценок условных характеристик более высокого порядка получаются путем простого обобщения формул, приведенных в табл. 9.2. Ошибки оценок обычных спектральных характеристик были приведены выше (табл. 3.2).

Помимо случайных ошибок, о которых здесь идет речь, имеются еще и многочисленные источники систематических ошибок, которые могут привести к получению завышенных или заниженных оценок функций когерентности и когерентных спектров (см. разд. 9.2 и 9.3). Это смещение оценок также необходимо принимать во внимание при решении любых прикладных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Halvorsen W. G., Bendat J. S. Noise Source Identification Using Coherent Output Power Spectra, *Sound and Vibration*, 9, 15 (1975).
- Barrett S. On the Use of Coherence Functions to Evaluate Sources of Dynamic Excitation, *Shock and Vibration Bulletin*, No. 49, Part 1, 43 (1979).

## Глава 10

### МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

В гл. 4 и 8 были получены некоторые соотношения, необходимые для анализа систем с одним или несколькими процессами на входе и выходе. В этой главе описаны итерационные методы, на основе которых можно построить эффективные вычислительные алгоритмы и осуществить моделирование многомерных систем. Здесь получены формулы для условных характеристик и оптимальных частотных характеристик, для разложения спектра выходного процесса на физически разумные составляющие и, наконец, для функций множественной и частной когерентности. Как и в гл. 8, прописными буквами обозначены преобразования Фурье, а все выводы даются через двусторонние спектральные плотности.

#### 10.1. Построение моделей

Получим сначала основные соотношения для системы с двумя входными процессами, а затем обобщим их на случай произвольного числа входов  $q$ .

##### 10.1.1. Система с двумя входными процессами

Чтобы лучше понять общий случай системы с  $q$  входными процессами, рассмотрим сначала показанную на рис. 10.1 систему, на вход которой поступают два стационарных эргодических или переходных случайных процесса. Предполагается, что входные процессы коррелированы друг с другом, но корреляция не идеальна, так что  $0 < \gamma^2_{12} < 1$ . Согласно изложенному в гл. 8, в этом случае имеем

$$\begin{aligned} Y &= H_{1y}X_1 + H_{2y}X_2 + N, \\ H_{1y} &= S_{1y \cdot 2} / S_{11 \cdot 2}, \quad H_{2y} = S_{2y \cdot 1} / S_{22 \cdot 1}, \\ S_{yy} &= |H_{1y}|^2 S_{11} + H_{1y}^* H_{2y} S_{12} + H_{1y} H_{2y}^* S_{21} + |H_{2y}|^2 S_{22} + S_{nn}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Заметим, что здесь частотные характеристики  $H_{1y}$  и  $H_{2y}$  задаются сходными формулами. Отметим также, что спектр  $S_{yy}$  представлен пятью слагаемыми, причем членам, содержащим

взаимные спектры  $S_{12}$  и  $S_{21}$ , трудно дать простую интерпретацию. При  $q$  входных процессах спектр выхода будет содержать  $q^2 + 1$  слагаемых. В рассматриваемом случае нельзя сказать, какая часть спектра выходного процесса  $y(t)$  определяется только входом  $x_1(t)$ , и четко определить смысл частотной характери-

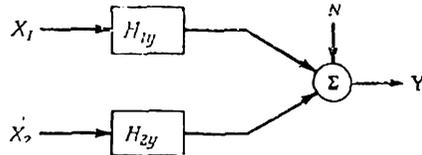


Рис. 10.1. Система с двумя произвольными входными процессами и одним процессом на выходе.

стики, по которой можно было бы прогнозировать значения  $y(t)$  на основании  $x_1(t)$ . Остается неясным, какая часть спектра выходного процесса  $y(t)$  обусловлена остаточным процессом  $x_{2\cdot 1}(t)$ , который получается после исключения из  $x_2(t)$  линейного вклада, вносимого входом  $x_1(t)$ . На все эти вопросы можно ответить, если вместо модели на рис. 10.1 рассматривать систему, содержащую условные входные процессы.

Как следует из результатов, полученных в гл. 8, использование условных процессов, которые могут быть вычислены по заданным входным процессам, позволяет заменить показанную на рис. 10.1 систему некоторой новой моделью, объединяющей отдельные части систем, изображенных на рис. 8.4 и 8.5. В результате такого объединения получается система с некоррелированными входными процессами (рис. 10.2), причем спектр  $S_{yy}$  выхода представляется теперь тремя слагаемыми, имеющими вполне очевидный физический смысл. Для системы с  $q$  процессами на входе спектр выходного процесса будет представлен  $q+1$  слагаемым.

Согласно изложенному в разд. 8.3, изображенная на рис. 10.2 система описывается соотношениями

$$\begin{aligned} Y &= L_{1y}X_1 + L_{2y}X_{2\cdot 1} + N, \\ L_{1y} &= S_{1y}/S_{11}, \quad L_{2y} = S_{2y\cdot 1}/S_{22\cdot 1}, \\ S_{yy} &= |L_{1y}|^2 S_{11} + |L_{2y}|^2 S_{22\cdot 1} + S_{nn}, \\ S_{nn} &= S_{yy\cdot 1, 2} = S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y\cdot 1}^2). \end{aligned} \quad (10.2)$$

Этим характеристикам можно дать следующую физическую интерпретацию.  $|L_{1y}|^2 S_{11} = \gamma_{1y}^2 S_{yy}$  есть часть спектра выходного процесса  $y(t)$ , обусловленная входом  $x_1(t)$  после прохождения его через систему с частотной характеристикой  $L_{1y}$ , определяющей оператор оптимального линейного прогноза процесса  $y(t)$

по  $x_1(t)$ ;  $|L_{2y}|^2 S_{22 \cdot 1} = \gamma_{2y \cdot 1}^2 S_{yy \cdot 1}$  есть часть спектра выходного процесса  $y(t)$ , обусловленная входом  $x_{2 \cdot 1}(t)$  после прохождения его через систему с частотной характеристикой  $L_{2y}$ , определяющей оператор оптимального линейного прогноза процесса  $y(t)$  по  $x_{2 \cdot 1}(t)$ ;  $S_{nn} = S_{yy \cdot 1, 2}$  есть часть спектра выходного процесса  $y(t)$ , обусловленная шумом  $n(t)$ , который отражает все независимые внешние шумы на выходе, не связанные линейно с вкладом входных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  после прохождения их через соответствующие системы, осуществляющие оптимальный прогноз выходного процесса  $y(t)$ .

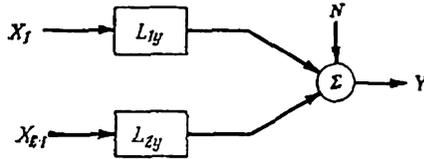


Рис. 10.2. Система с условными входными процессами и одним процессом на выходе.

Заметим, что функции  $S_{nn}$  и  $S_{yy}$  имеют один и тот же смысл для систем, показанных на рис. 10.1 и 10.2.

Меняя нумерацию входных процессов, получим другой вариант модели, изображенной на рис. 10.2 (рис. 10.3). Теперь спектр выходного процесса представляется в виде

$$\begin{aligned}
 S_{yy} &= \left| \frac{S_{2y}}{S_{22}} \right|^2 S_{22} + \left| \frac{S_{1y \cdot 2}}{S_{11 \cdot 2}} \right|^2 S_{11 \cdot 2} + S_{nn} = \\
 &= \gamma_{2y}^2 S_{yy} + \gamma_{1y \cdot 2}^2 S_{yy \cdot 2} + S_{nn},
 \end{aligned}
 \tag{10.3}$$

где  $\gamma_{2y}^2 S_{yy}$  есть часть спектра выходного процесса  $y(t)$ , обусловленная входом  $x_2(t)$  после его прохождения через систему с частотной характеристикой  $S_{2y}/S_{22}$ , определяющей оператор оптимального линейного прогноза процесса  $y(t)$  по  $x_2(t)$ ;  $\gamma_{1y \cdot 2}^2 S_{yy \cdot 2}$  есть часть спектра выходного процесса  $y(t)$ , обусловленная входом  $x_{1 \cdot 2}(t)$  после прохождения его через систему с частотной характеристикой  $S_{1y \cdot 2}/S_{11 \cdot 2}$ , определяющей оператор оптимального линейного прогноза процесса  $y(t)$  по  $x_{1 \cdot 2}(t)$ .

Смысл функций  $S_{nn}$  и  $S_{yy}$  остается прежним.

Отсюда видно, что нумерация входных процессов имеет существенное значение, поскольку от нее зависит интерпретация результатов. Если по физическому смыслу задачи порядок следования входных процессов может быть любым, то рекомендуется вначале вычислить функции обычной когерентности между выходом и каждым из входов и обозначить через  $x_1(t)$  ту реализацию, которой соответствует более высокая когерентность. Тогда остаточный процесс  $x_{2 \cdot 1}(t)$  будет соответствовать исклю-

чению линейного вклада процесса  $x_1(t)$ , связанного с выходным процессом более тесной линейной зависимостью, чем  $x_2(t)$ ; при этом  $x_{2.1}(t)$  обеспечит лучший линейный прогноз выходного процесса (рис. 10.2). Если же заранее известно, что процесс  $x_1(t)$  играет меньшую роль, чем  $x_2(t)$ , то в качестве первого входа следует, конечно, взять  $x_2(t)$ , и, как показано на рис. 10.3, вторым входным процессом будет служить  $x_{1.2}(t)$ .

На рис. 10.4 показана *неверная* модель, которую, по крайней мере на первый взгляд, можно предложить вместо модели, изо-

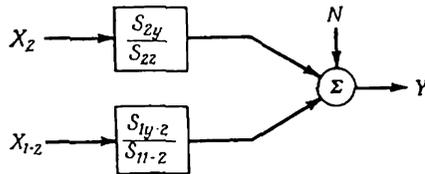


Рис. 10.3. Другой способ представления системы с условными входными процессами.

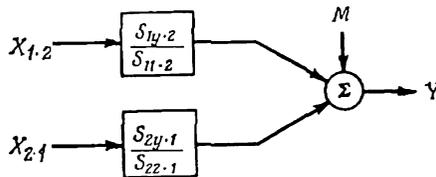


Рис. 10.4. Ошибочное представление системы с двумя входными процессами и одним процессом на выходе.

браженной на рис. 10.1. Оба условных процесса, поступающих на вход системы, можно определить непосредственно по входам  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ; однако помеха  $M$  отличается в этом случае от помехи  $N$ . Согласно рис. 10.4, имеем

$$Y = \left( \frac{S_{1y.2}}{S_{11.2}} \right) X_{1.2} + \left( \frac{S_{2y.1}}{S_{22.1}} \right) X_{2.1} + M,$$

$$\begin{aligned} S_{yy} &= \gamma_{1y.2}^2 S_{yy.2} + \gamma_{2y.1}^2 S_{yy.1} + S_{mm} = \\ &= \gamma_{1y.2}^2 (1 - \gamma_{2y}^2) S_{yy} + \gamma_{2y.1}^2 (1 - \gamma_{1y}^2) S_{yy} + S_{mm}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S_{mm} = S_{yy} [1 - \gamma_{1y.2}^2 (1 - \gamma_{2y}^2) - \gamma_{2y.1}^2 (1 - \gamma_{1y}^2)].$$

С другой стороны, согласно формуле (8.69), имеем

$$S_{nn} = S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y.1}^2) \neq S_{mm},$$

откуда следует, что системы, показанные на рис. 10.1 и 10.4, не эквивалентны.

10.1.2. Системы со многими входами

Общий случай системы со многими входными процессами показан на рис. 10.5. Здесь символами  $X_i, i=1, 2, \dots, q$ , обозначены финитные преобразования Фурье соответствующих входных процессов, порядок следования которых определен заранее. Финитное преобразование Фурье выходного процесса есть  $Y=X_{q+1}$ , а частотные характеристики линейных систем (с постоянными параметрами), связывающих входные процессы с вы-

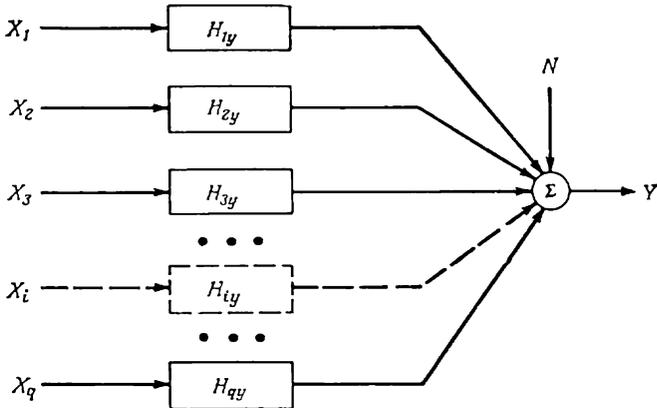


Рис. 10.5. Многомерная система с произвольными входными процессами и одним процессом на выходе.

ходным, суть  $H_{iy}, i=1, 2, \dots, q$ , причем индекс входного процесса *предшествует* индексу выходного процесса. Любые отклонения от этой идеальной линейной модели включены в неизвестную помеху на выходе, финитное преобразование Фурье которой обозначено символом  $N$ . Подобные модели можно строить, меняя порядок входных процессов или задавая другой процесс на выходе системы.

На спектры и взаимные спектры процессов не накладыва-ется никаких ограничений; предполагается только, что они существуют и могут быть определены по данным наблюдений. Считается, что все преобразованные входные процессы (т. е. результаты их прохождения через системы с частотными характеристиками  $H_{iy}$ ) и помеха на выходе не могут быть измерены непосредственно. В общем случае все частотные характеристики  $H_{iy}$  не известны и подлежат оцениванию. Конечно, в некоторых случаях отдельные частотные характеристики могут быть известны заранее или их можно измерить. Множество  $\{H_{iy}\}$  совсем не обязательно описывает истинные физически осуществимые характеристики, соответствующие рассматриваемой задаче. Они могут представлять собой лишь результаты математи-

ческой обработки данных наблюдений, которые описывают зависимости выходного процесса от каждого входа, причем эти зависимости строятся на основе теории оптимального в среднеквадратичном смысле линейного прогноза выходного процесса.

Для полного определения описываемой модели необходимо выполнение четырех условий:

1. Все обычные функции когерентности, связывающие пары входных процессов, должны быть отличны от единицы. В противном случае соответствующая пара входных процессов дает лишь избыточную информацию, и один из этих процессов должен быть исключен из рассмотрения. Это соображение позволяет рассматривать системы с распределенными источниками как системы с точечными входами.

2. Все обычные функции когерентности, связывающие входные процессы с процессом на выходе, должны быть отличны от единицы. В противном случае все процессы, для которых функция когерентности не равна единице, не дают вклада в выходной процесс, и рассматриваемая многомерная модель сводится к системе с одним входным процессом и одним процессом на выходе.

3. Ни одна из функций множественной когерентности, связывающей любой данный входной процесс с другими входами, не может быть равна единице. В противном случае соответствующий вход можно получить линейным преобразованием других входных процессов, так что он не дает никакой дополнительной информации о процессе на выходе системы и поэтому должен быть исключен из рассмотрения.

4. Для того чтобы исходные теоретические предположения и сделанные в результате анализа выводы были в разумной степени надежными, необходимо, чтобы оценки функции множественной когерентности, связывающей выходной процесс с данным набором входов, были достаточно высокими (скажем, не менее 0,5). В противном случае можно полагать, что модель учитывает не все действительно важные входные процессы или она существенно нелинейна. Значение 0,5 функции когерентности не является строго обоснованным, и понятно, что его следует выбирать на основе физических соображений и исходя из объема имеющихся исходных данных.

Модель, показанную на рис. 10.5, можно представить в иной форме, заменив входные процессы упорядоченным набором условных реализаций. На рис. 10.6 соответствующие преобразования Фурье обозначены символами  $X_{i-(i-1)}$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ . Для каждого значения  $i$  функция  $X_{i-(i-1)}$  соответствует условному процессу, полученному из входного процесса  $X_i(t)$  путем исключения из него линейного вклада, вносимого всеми предыдущими процессами  $X_1(t), \dots, X_{i-1}(t)$ , причем эта операция осуществля-

ется путем оптимального в среднеквадратичном смысле линейного прогноза процесса  $X_i(t)$  по  $X_1(t), \dots, X_{i-1}(t)$ . Эти упорядоченные условные входы не коррелированы друг с другом, чего обычно нельзя сказать об исходной системе.

Оптимальные и не зависящие от времени частотные характеристики обозначены на рис. 10.6 символами  $L_{iy}, i=1, 2, \dots, q$ .

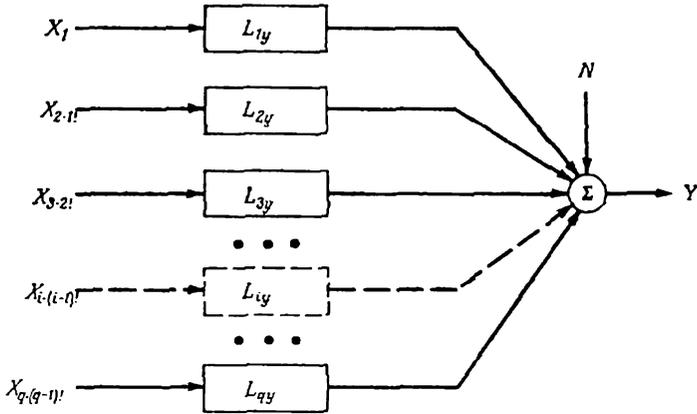


Рис. 10.6. Многомерная система с условными входными процессами и одним процессом на выходе.

Как правило, функции  $L_{iy}$  существенно отличаются от частотных характеристик  $H_{iy}$ , соответствующих системе, изображенной на рис. 10.5. Процессы  $n(t)$  и  $y(t)$  на выходе системы, которым соответствуют преобразования Фурье  $N$  и  $Y$ , одинаковы для обеих моделей. Заметим, что для исходной модели можно построить  $q!$  различных аналогов в зависимости от того, какой из процессов выбран в качестве  $X_1(t), X_{2,1}(t), X_{3,2}(t)$  и т. д. Ниже принято, что порядок следования входных процессов определен и не меняется в процессе анализа. Понятно, что аналогичные результаты можно получить при любом наперед заданном порядке нумерации входов.

### 10.1.3. Преобразования Фурье и спектральные функции

В соответствии с изложенным в гл. 3 финитные преобразования Фурье для любой пары реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$ , заданных на интервале длиной  $T$ , определяются в виде

$$X(f, T) = \int_0^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt, \quad Y(f, T) = \int_0^T y(t) e^{-i2\pi ft} dt. \tag{10.4}$$

При вычислениях по этим формулам на цифровой ЭВМ частота  $f$  принимает дискретный набор значений с шагом  $\Delta f = 1/T$ . Предполагается, что  $x(t)$  и  $y(t)$  являются реализациями стационарных эргодических или переходных случайных процессов, так что моменты распределения вычисляются усреднением по ансамблю. Двусторонние спектральные плотности

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= (1/T) E [X^*(f, T) X(f, T)], \\ S_{yy}(f) &= (1/T) E [Y^*(f, T) Y(f, T)] \end{aligned} \quad (10.5a)$$

и взаимные спектры

$$S_{xy}(f) = (1/T) E [X^*(f, T) Y(f, T)] \quad (10.5b)$$

определяются таким же образом, как и в формулах (8.8). На практике, конечно, можно найти лишь оценки этих характеристик, поскольку оператор математического ожидания заменен усреднением по конечному числу реализаций. Заметим также, что в случае переходных процессов множитель  $1/T$  следует опустить. Как показано в разд. 3.4.2, оценка  $\hat{S}_{xy}(f)$  взаимного спектра  $S_{xy}(f)$  обычно находится в виде

$$\hat{S}_{xy}(f) = \frac{1}{n_d T} \sum_{k=1}^{n_d} X_k^*(f, T) Y_k(f, T), \quad (10.5b)$$

где  $n_d$  есть число независимых (неперекрывающихся) реализаций, каждая из которых имеет длительность  $T$ . Общая длина реализации есть  $T_{\text{общ}} = n_d T$ . При заданном значении  $T_{\text{общ}}$  выбор длины реализации  $T$  и их числа  $n_d$  осуществляется на основе компромиссных соображений. Как будет показано в гл. 11, для минимизации систематической ошибки оценок нужны как можно более длинные реализации, тогда как случайная ошибка оценок убывает с ростом числа реализаций  $n_d$ .

В дальнейшем мы будем считать, что исходные параметры выбраны таким образом, чтобы можно было получить достаточно хорошие оценки спектров и взаимных спектров для всех  $q+1$  реализаций, описывающих исходную систему с  $q$  входными процессами и одним процессом на выходе. Операции математического ожидания (усреднения), входящие в формулы (10.5a—10.5b), осуществляются только для этих  $q+1$  выборочных реализаций. Хотя условные спектральные характеристики содержат оператор математического ожидания, для их вычисления не требуется ни выбора исходных параметров, ни определения средних значений. Здесь будет показано, что условные спектральные характеристики можно вычислить по некоторым рекуррентным формулам.

Финитные преобразования Фурье (Ф.Т.) исходных реализа-

ций и соответствующих остаточных реализаций, выполненные по интервалам достаточно большой длины  $T$ , обозначаются ниже прописными буквами, причем для упрощения обозначений аргументы  $T$  и  $f$  опускаются. Таким образом, имеем

$$X_i = \text{F.T. } x_i(t) \quad \text{при } i=1, 2, \dots, q+1,$$

$$Y = X_{q+1} = \text{F.T. } y(t) = \text{F.T. } x_{q+1}(t).$$

Пусть, кроме того, при любом  $r=1, 2, \dots, q$  и  $i > r$

$$X_{i \cdot r} = X_{i \cdot 1, 2, \dots, r} \quad \text{есть преобразование Фурье}$$

реализации  $x_i(t)$  после исключения из нее линейного вклада всех предыдущих реализаций от  $x_1(t)$  до  $x_r(t)$ ,

(10.7)

$$N = X_{q+1 \cdot q} = Y_{y \cdot q} = \text{F.T. } n(t).$$

При любом значении  $i$  величина  $X_{i \cdot r} = 0$ , если  $r \geq i$ , так как в этом случае из  $x_i(t)$  следует исключить саму эту реализацию  $x_i(t)$ .

Функции спектральной и взаимной спектральной плотности исходных реализаций в соответствии с формулами (10.5a) — (10.5в) определяются равенствами

$$TS_{ii} = E[X_i^* X_i] = E[|X_i|^2],$$
(10.8)

$$TS_{ij} = E[X_i^* X_j], \quad i \neq j,$$

$$TS_{yy} = E[|Y|^2] = E[|X_{q+1}|^2],$$
(10.9)

$$TS_{iy} = E[X_i^* Y] = E[X_i^* X_{q+1}],$$

а условные спектральные плотности, соответствующие остаточным процессам, задаются в виде

$$TS_{ii \cdot r} = E[|X_{i \cdot r}|^2],$$
(10.10)

$$TS_{nn} = TS_{(q+1) \cdot (q+1) \cdot q} = E[|N|^2].$$

Условные взаимные спектры имеют вид

$$TS_{ij \cdot r} = E[X_{i \cdot r}^* X_{j \cdot r}],$$
(10.11)

где  $i \neq j$  и  $i > r, j > r$ . Заметим, что

$$S_{ij \cdot r}^* = S_{ji \cdot r}, \quad S_{iy \cdot (i-1)} = S_{i \cdot (q+1) \cdot (i-1)}. \quad (10.12)$$

При  $r \geq i$  или  $r \geq j$  величина  $S_{ij \cdot r} = 0$  при любых  $i, j$ .

Преобразование Фурье процесса на выходе системы, показанной на рис. 10.6, задается по всем упорядоченным условным

входным процессам соотношением

$$X_{q+1} = \sum_{i=1}^q L_{iy} X_{i \cdot (i-1)l} + X_{(q+1) \cdot ql} \quad (10.13)$$

Перестроим показанную на рис. 10.6 модель таким образом, чтобы учитывать эффект лишь  $r$  первых условных входных процессов ( $r \leq q$ ), по-прежнему считая выходным процесс  $x_{q+1}(t)$ . Тогда шум есть  $X_{(q+1) \cdot rl}$ , а формула (10.13) принимает вид

$$X_{q+1} = \sum_{i=1}^r L_{iy} X_{i \cdot (i-1)l} + X_{(q+1) \cdot rl} \quad (10.14)$$

Обозначив  $X_j = X_{q+1}$ , получим более общую форму этого выражения:

$$X_j = \sum_{i=1}^r L_{ij} X_{i \cdot (i-1)l} + X_{j \cdot rl} \quad (10.15)$$

Нетрудно видеть, что при любых  $j \geq i$  и  $r < i$  имеет место равенство

$$E[X_{i \cdot rl}^* X_j] = E[X_{i \cdot rl}^* X_{j \cdot rl}] \quad (10.16)$$

Все другие математические ожидания равны нулю. Таким образом, величины, заданные соотношениями (10.10) и (10.11), можно вычислять по формулам

$$TS_{ii \cdot rl} = E[X_{i \cdot rl}^* X_i], \quad TS_{ij \cdot rl} = E[X_{i \cdot rl}^* X_j] \quad (10.17)$$

Из вышензложенного следует также, что

$$TS_{yy \cdot rl} = E[X_{(q+1) \cdot rl}^* X_{q \cdot 1}], \quad TS_{iy \cdot rl} = E[X_{i \cdot rl}^* X_{q+1}] \quad (10.18)$$

Формулы (10.17) и (10.18) представляют собой важные теоретические соотношения, которые удобнее применять на практике, чем исходные определения условных спектральных плотностей. Во всех приведенных выше формулах множитель  $T$  должен быть опущен, когда речь идет об энергетических спектрах, а не о спектрах «мощности» (о переходных и стационарных случайных процессах соответственно).

## 10.2. Соотношение между параметрами оптимальных систем

Рассмотрим теперь методы вычисления параметров  $L_{iy}$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , оптимальных линейных систем, связывающих условные входные процессы с процессом на выходе системы (рис. 10.6). Найдем зависимости между частотными характе-

ристиками  $L_{iy}$  и функциями  $H_{iy}$ , которые связывают выходной процесс с реальными процессами  $x_i(t)$ , поступающими на вход системы (см. рис. 10.5).

10.2.1. *Оптимальные системы для условных входных процессов*

Заменяя  $X_{q+1}$  на  $Y$  и  $X_{(q+1) \cdot q+1}$  на  $N$ , перепишем формулу (10.13) в виде

$$Y = \sum_{i=1}^q L_{iy} X_{i \cdot (i-1)!} + N. \tag{10.19}$$

Пусть  $N$  есть преобразование Фурье помехи на выходе системы, заданное в виде

$$N_{iy} = Y - L_{iy} X_{i \cdot (i-1)!}. \tag{10.20}$$

Другими словами,  $N_{iy}$  есть разность между  $Y$  и результатом прохождения условного входного процесса  $X_{i \cdot (i-1)}$  через систему с частотной характеристикой  $L_{iy}$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} |N_{iy}|^2 = & |Y|^2 - L_{iy}^* [X_{i \cdot (i-1)!}^* Y] - \\ & - L_{iy} [Y^* X_{i \cdot (i-1)!}] + L_{iy}^* L_{iy} [|X_{i \cdot (i-1)!}|^2]. \end{aligned} \tag{10.21}$$

Находя математические ожидания обеих частей этого равенства и деля на  $T$ , получаем следующее соотношение между спектральными характеристиками:

$$\begin{aligned} S_{nini} = & S_{yy} - L_{iy}^* S_{iy \cdot (i-1)!} - \\ & - L_{iy} S_{iy \cdot (i-1)!}^* + L_{iy}^* L_{iy} S_{ii \cdot (i-1)!}. \end{aligned} \tag{10.22}$$

Это соотношение задает средний квадрат ошибки определения выходного процесса для системы с произвольной частотной характеристикой  $L_{iy}$ . Частотную характеристику оптимальной системы, которая минимизирует эту среднеквадратичную ошибку, можно найти, приравняв нулю частную производную выражения (10.22) по  $L_{iy}$  при фиксированном значении  $L_{iy}^*$ . После соответствующих выкладок (см. разд. 5.1.1), получим

$$L_{iy} = S_{iy \cdot (i-1)!} / S_{ii \cdot (i-1)!}, \quad i = 1, 2, \dots, q. \tag{10.23}$$

Замена  $Y = X_{q+1}$  на  $X_j$  и  $L_{iy}$  на  $L_{ij}$  дает равенство

$$L_{ij} = S_{ij \cdot (i-1)!} / S_{ii \cdot (i-1)!}, \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad q+1. \tag{10.24}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} L_{ii} &= 1 \text{ при всех } i, \\ L_{ij} &= 0 \text{ при всех } j < i, \\ L_{ij}^* &= L_{ji}. \end{aligned} \tag{10.25}$$

В частности, при  $i=1, 2$  и  $3$  имеем

$$\begin{aligned} L_{1j} &= S_{1j}/S_{11}, & j=1, 2, \dots, q+1, \\ L_{2j} &= S_{2j-1}/S_{22-1}, & j=2, 3, \dots, q+1, \\ L_{3j} &= S_{3j-2}/S_{33-2}, & j=3, 4, \dots, q+1. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Частотная характеристика, соответствующая последнему условному входному процессу (т. е. при  $i=q$  и  $j=q+1$ ), имеет вид

$$L_{q(q+1)} = L_{qy} = S_{qy \cdot (q-1)} / S_{qq \cdot (q-1)}. \quad (10.27)$$

Из формул (10.19) и (10.23) следует, что помеха на выходе системы не коррелирована со всеми упорядоченными условными процессами, поступающими на вход. Как видно из формул (10.23) и (10.24), для вычисления оптимальных частотных характеристик нужно знать условные взаимные спектры  $S_{ij \cdot (i-1)}$  при всех  $i$  и  $j$ . Способы вычисления этих функций при помощи специальной итерационной процедуры будут описаны в разд. 10.3.2.

### 10.2.2. Оптимальные системы для исходных входных процессов

В противоположность условным остаточным входам системы, показанной на рис. 10.6, финитные преобразования Фурье  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , представленные на рис. 10.5, соответствуют в общем случае системе с взаимно коррелированными входными процессами. Процесс на выходе системы  $Y=X_{q+1}$  представляет собой линейную комбинацию входных процессов:

$$Y = \sum_{i=1}^q H_{iy} X_i + N \quad (10.28)$$

или после замены индекса суммирования  $i$  на  $j$

$$Y = \sum_{j=1}^q H_{jy} X_j + N. \quad (10.29)$$

Умножая уравнение (10.29) последовательно на  $X^*_{i-1}$ ,  $X^*_{i-2}$  и т. д. и находя математические ожидания, получаем следующие уравнения:

$$S_{iy} = \sum_{j=1}^q H_{jy} S_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, q, \quad (10.30)$$

$$S_{iy \cdot 1} = \sum_{j=2}^q H_{jy} S_{ij \cdot 1}, \quad i = 2, 3, \dots, q, \tag{10.31}$$

$$S_{iy \cdot 2!} = \sum_{j=3}^q H_{jy} S_{ij \cdot 2!}, \quad i = 3, 4, \dots, q,$$

и т. д. до последнего уравнения, имеющего вид

$$S_{qy \cdot (q-1)!} = H_{qy} S_{qq \cdot (q-1)!}. \tag{10.32}$$

Таким образом,

$$H_{qy} = S_{qy \cdot (q-1)!} / S_{qq \cdot (q-1)!}, \tag{10.33}$$

что совпадает с частотной характеристикой  $L_{qy}$ , заданной формулой (10.23). Частотная характеристика  $H_{iy}$ , соответствующая оптимальной системе, находится путем замены  $x_i(t)$  на  $x_q(t)$ :

$$H_{iy} = S_{iy \cdot 1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, q} / S_{ii \cdot 1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, q}, \tag{10.34}$$

$i = 1, 2, \dots, q.$

Заметим, что частотные характеристики  $H_{iy}$ , заданные формулой (10.34), содержат гораздо больше членов, чем частотные характеристики  $L_{iy}$ , определенные формулой (10.23), так что, за исключением случая  $i=q$ , когда  $H_{qy} = L_{qy}$ , вычисление функций  $L_{iy}$  оказывается существенно проще<sup>1)</sup>.

### 10.2.3. Соотношения между параметрами оптимальных систем

Получим теперь соотношения между частотными характеристиками  $H_{iy}$  и  $L_{iy}$ , соответствующими оптимальным линейным системам. Для этого умножим уравнения (10.29) на  $X_{r \cdot (r-1)!}^*$ , где  $r \leq i \leq q$ , и найдем математические ожидания обеих частей полученного равенства. Результатом этой операции будет равенство, определяющее условный (по  $r-1$  предыдущим входам) взаимный спектр выходного процесса с  $i$ -м входом:

$$S_{iy \cdot (r-1)!} = \sum_{j=r}^q H_{jy} S_{ij \cdot (r-1)!}. \tag{10.35}$$

При  $r=i$  формула (10.35) принимает вид

$$S_{iy \cdot (i-1)!} = \sum_{j=i}^q H_{jy} S_{ij \cdot (i-1)!}. \tag{10.36}$$

<sup>1)</sup> Имеется в виду, что для вычисления  $H_{qy}$  по формуле (10.34) нужно всегда знать остаточный спектр (или взаимный спектр)  $i$ -го входа по всем  $q-1$  входным процессам, тогда как нахождение  $L_{iy}$  по формуле (10.23) требует знания остаточного спектра (и взаимного спектра)  $i$ -го процесса лишь по  $i-1$  предыдущим входным процессам. — Прим. перев.

Деля это равенство на  $S_{ii-(i-1)}$  и учитывая формулы (10.23) и (10.24), получаем

$$L_{iy} = \sum_{j=i}^q L_{ij} H_{jy}, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (10.37)$$

Это равенство задает частотные характеристики  $L_{iy}$  через  $H_{iy}$ . И наоборот, удобный способ нахождения частотных характеристик  $H_{iy}$  через значения  $L_{iy}$  заключается в использовании следующих рекуррентных соотношений:

$$H_{qy} = L_{qy},$$

$$H_{iy} = L_{iy} - \sum_{j=i+1}^q L_{ij} H_{jy}, \quad i=(q-1), (q-2), \dots, 1. \quad (10.38)$$

В частности, при  $q=4$  система уравнений (10.37) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{1y} &= H_{1y} + L_{12}H_{2y} + L_{13}H_{3y} + L_{14}H_{4y}, \\ L_{2y} &= H_{2y} + L_{23}H_{3y} + L_{24}H_{4y}, \\ L_{3y} &= H_{3y} + L_{34}H_{4y}, \\ L_{4y} &= H_{4y}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

С другой стороны, из формул (10.38) получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} H_{4y} &= L_{4y}, \\ H_{3y} &= L_{3y} - L_{34}H_{4y}, \\ H_{2y} &= L_{2y} - L_{23}H_{3y} - L_{24}H_{4y}, \\ H_{1y} &= L_{1y} - L_{12}H_{2y} - L_{13}H_{3y} - L_{14}H_{4y}. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Этот пример иллюстрируется рис. 10.7 и 10.8.

Из формул (10.39) видно, каким образом преобразуются условные входные процессы  $X_1, X_{2-1}, X_{3-21}$  и  $X_{4-31}$ , взятые в указанном порядке, при прохождении через системы с частотными характеристиками  $H_{1y}, H_{2y}, H_{3y}$  и  $H_{4y}$ . (Напомним, что все эти характеристики являются функциями частоты.) В частности,  $X_{2-1}$  не проходит через  $H_{3y}$ , если  $L_{23}=0$ , и не проходит через  $H_{4y}$ , если  $L_{24}=0$ . Аналогично  $X_{3-21}$  не проходит через  $H_{4y}$ , если  $L_{34}=0$ .

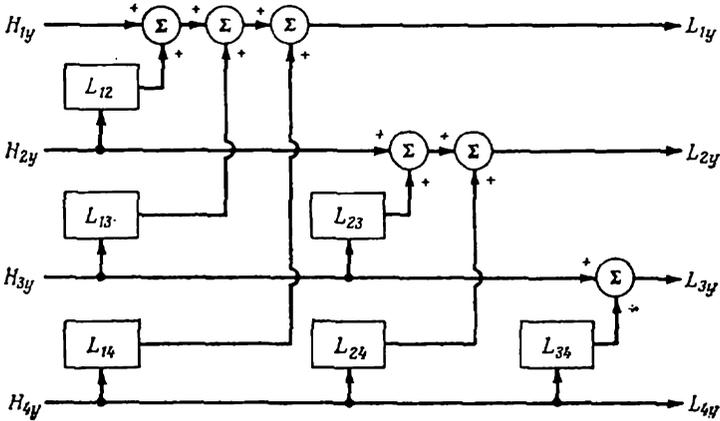


Рис. 10.7. Определение оптимальных частотных характеристик  $L_{iy}$  по функциям  $H_{iy}$ . (Схема обобщается на случай произвольного числа искоемых характеристик.)

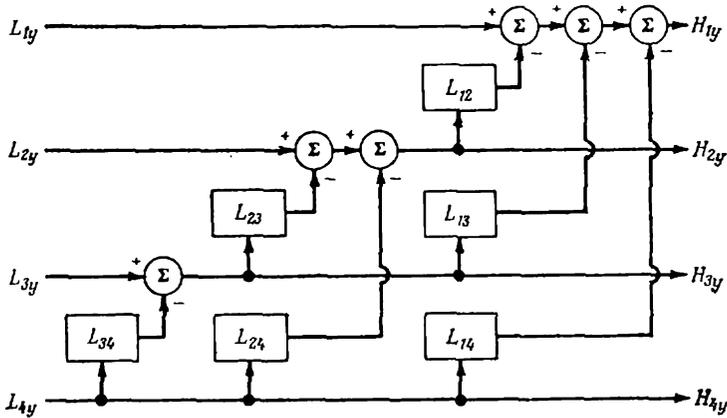


Рис. 10.8. Определение оптимальных частотных характеристик  $H_{iy}$  по функциям  $L_{iy}$ . (Схема обобщается на случай произвольного числа искоемых характеристик.)

### 10.3. Вычислительные алгоритмы

Последовательность вычислений, необходимых для оценивания параметров многомерной системы с помощью развитых в этой главе методов, сводится к простой итерационной схеме. Ее осуществление обычно гораздо проще и требует существенно меньше машинного времени, чем использование традиционного матричного способа решения задач, связанных с анализом многомерных систем. Кроме того, как будет показано ниже, такой

подход позволяет получить физически осмысленные результаты. Наиболее важные публикации [10.1—10.3] по этому вопросу приведены в конце главы.

### 10.3.1. Нахождение условных входных процессов по исходным процессам

Вернемся к формуле (10.15):

$$X_j = \sum_{i=1}^r L_{ij} X_{i \cdot (i-1)!} + X_{j \cdot r!}. \quad (10.41)$$

Замена  $r$  на  $r-1$  дает

$$X_j = \sum_{i=1}^{r-1} L_{ij} X_{i \cdot (i-1)!} + X_{j \cdot (r-1)!}. \quad (10.42)$$

Вычитая это выражение из (10.41), получаем алгоритм вычисления условных входных процессов:

$$X_{j \cdot r!} = X_{j \cdot (r-1)!} - L_{rj} X_{r \cdot (r-1)!}. \quad (10.43)$$

Частными случаями уравнения (10.43) являются следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } r=1: & \quad X_{j \cdot 1} = X_j - L_{1j} X_1, \quad j=2, 3, \dots, q+1, \\ \text{при } r=2: & \quad X_{j \cdot 2!} = X_{j \cdot 1} - L_{2j} X_{2 \cdot 1}, \quad j=3, 4, \dots, q+1, \\ \text{при } r=3: & \quad X_{j \cdot 3!} = X_{j \cdot 2!} - L_{3j} X_{3 \cdot 2!}, \quad j=4, 5, \dots, q+1. \end{aligned} \quad (10.44)$$

Наконец, при  $r=q$  и  $j=q+1$  имеем

$$X_{(q+1) \cdot q!} = X_{(q+1) \cdot (q-1)!} - L_{q(q+1)} X_{q \cdot (q-1)!}. \quad (10.45)$$

Заметим, что здесь представлена итеративная процедура вычисления преобразований Фурье упорядоченных условных процессов. Эта процедура иллюстрируется рис. 10.9, который может быть обобщен на любое число процессов. Из формул (10.44) получаем

$$\begin{aligned} X_{2 \cdot 1} &= X_2 - L_{12} X_1, \\ X_{3 \cdot 2!} &= X_{3 \cdot 1} - L_{23} X_{2 \cdot 1} = \\ &= X_3 - L_{13} X_1 - L_{23} X_{2 \cdot 1}, \end{aligned} \quad (10.46)$$

$$\begin{aligned} X_{4 \cdot 3!} &= X_{4 \cdot 2!} - L_{34} X_{3 \cdot 2!} = \\ &= X_{4 \cdot 1} - L_{24} X_{2 \cdot 1} - L_{34} X_{3 \cdot 2!} = \\ &= X_4 - L_{14} X_1 - L_{24} X_{2 \cdot 1} - L_{34} X_{3 \cdot 2!} \end{aligned}$$

и т. д. для любого заданного числа входов. Эти уравнения представляют собой алгоритм, который позволяет найти упорядо-

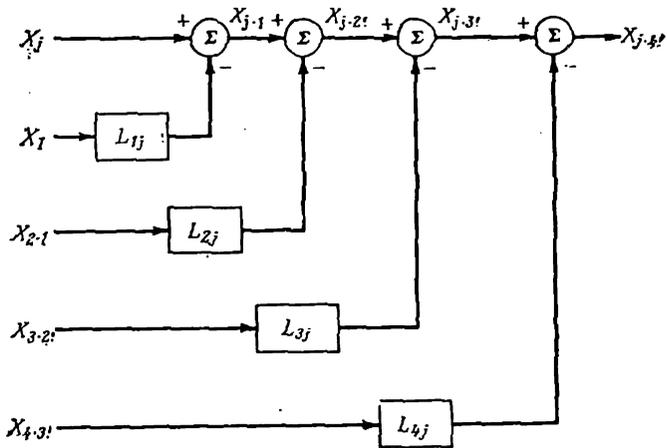


Рис. 10.9. Вычисление преобразований Фурье упорядоченных условных входных процессов. (Схема обобщается на случай произвольного числа входов.)

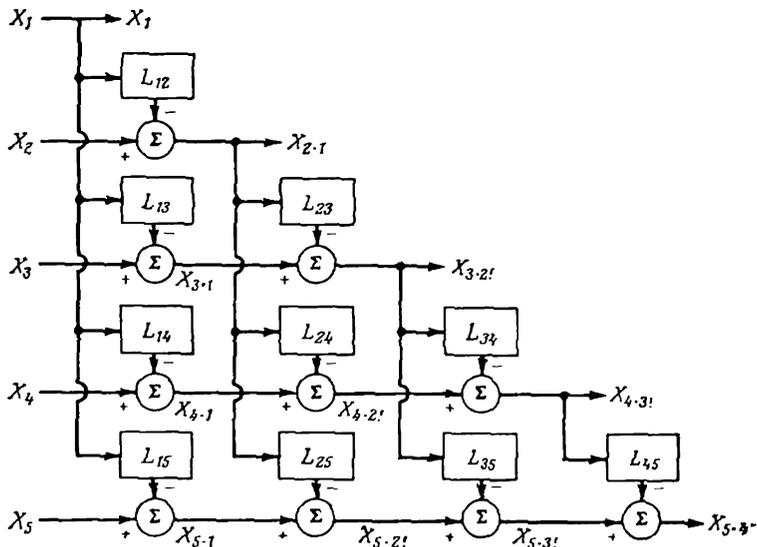


Рис. 10.10. Нахождение упорядоченных условных входных процессов по исходным процессам. (Схема обобщается на случай произвольного числа входов.)

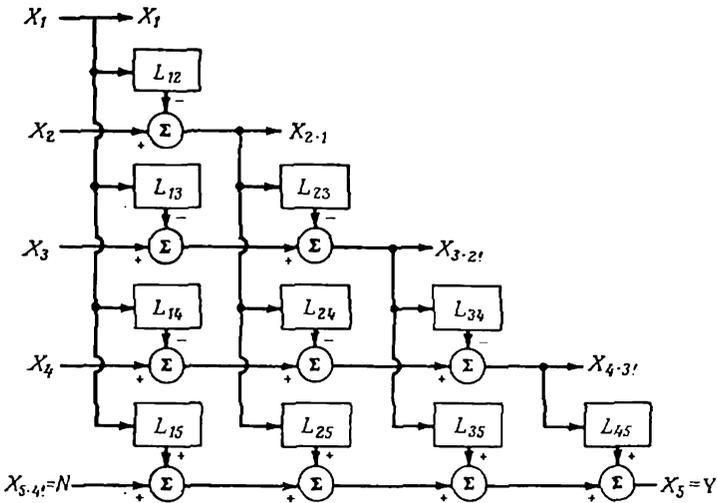


Рис. 10.11. Соотношения между преобразованиями Фурье процессов на входе и выходе многомерной системы с одним выходным процессом. (Схема обобщается на случай произвольного числа входов.)

ченные условные входные процессы, показанные на рис. 10.6, по произвольному исходному набору процессов, поступающих на вход системы, изображенной на рис. 10.5. На рис. 10.10 показана схема вычисления для системы с пятью входами, которую легко обобщить на случай системы с произвольным числом входов.

Нижний ярус вычислительной схемы, показанной на рис. 10.10, можно изменить, вычисляя не  $X_{5,4}$  по формуле (10.43), а  $X_5$  по формуле (10.41). В частности, для того чтобы поменять местами  $X_5$  и  $X_{5,4}$ , достаточно лишь заменить в нижнем ярусе знак вычитания на суммирование. Заменяв  $X_5$  на  $Y$  и  $X_{5,4}$  на  $N$ , можно считать, что мы имеем дело с системой, на вход которой поступают четыре входных процесса, причем функции  $L_{i5}$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ , задают оптимальные частотные характеристики этой системы. Эти соотношения иллюстрируются рис. 10.11, на котором показана связь между характеристиками системы, на вход которой поступают четыре процесса. Все это легко обобщить на случай произвольного числа входов.

### 10.3.2. Условные спектральные плотности

Для вычисления функций условной спектральной плотности умножим выражение (10.43) на  $X_i^*$ , найдем математические ожидания обеих частей полученного равенства и разделим на  $T$ .

В результате получим общее рекуррентное соотношение, определяющее условные спектральные плотности:

$$S_{ij \cdot r!} = S_{ij \cdot (r-1)!} - L_{rj} S_{ir \cdot (r-1)!} \quad (10.47)$$

Величины  $L_{rj}$  вычисляются последовательно по формуле (10.51). В частности,

$$\begin{aligned} \text{при } r=1: & S_{ij \cdot 1} = S_{ij} - L_{1j} S_{i1}, \quad i, j = 2, 3, \dots, q+1, \\ \text{при } r=2: & S_{ij \cdot 2!} = S_{ij \cdot 1} - L_{2j} S_{i2 \cdot 1}, \quad i, j = 3, 4, \dots, q+1, \\ \text{при } r=3: & S_{ij \cdot 3!} = S_{ij \cdot 2!} - L_{3j} S_{i3 \cdot 2!}, \quad i, j = 4, 5, \dots, q+1. \end{aligned} \quad (10.48)$$

При  $r=q$  и  $i=j=q+1$  получаем последний член:

$$S_{(q+1)(q+1) \cdot q!} = S_{(q+1)(q+1) \cdot (q-1)!} - L_{q(q+1)} S_{(q+1)q \cdot (q-1)!} \quad (10.49)$$

Последовательный характер вычислений условных спектральных плотностей по формуле (10.47) иллюстрируется рис. 10.12. Этот алгоритм реализован в работе [10.4].

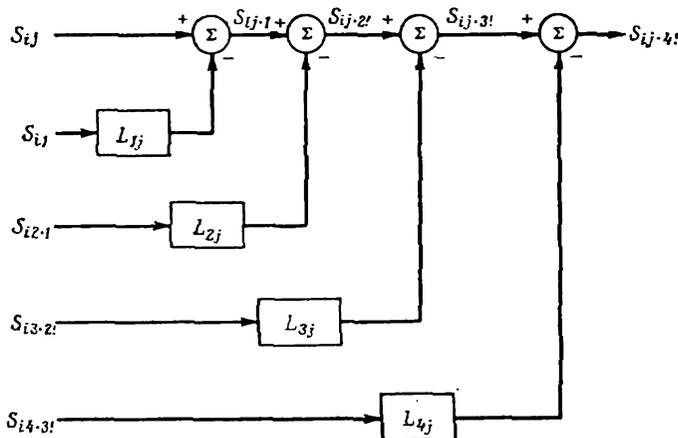


Рис. 10.12. Вычисление условных спектральных плотностей. (Схема обобщается на случай произвольного числа входов.)

Пусть в формуле (10.47) индекс  $i=j$ , т. е.

$$S_{jj \cdot r!} = S_{jj \cdot (r-1)!} - L_{rj} S_{jr \cdot (r-1)!} \quad (10.50)$$

Заменив в формуле (10.24)  $i$  на  $r$ , получим

$$L_{rj} = S_{rj \cdot (r-1)!} / S_{rr \cdot (r-1)!} \quad (10.51)$$

Таким образом,

$$L^*_{rj} = S_{jr \cdot (r-1)!} / S_{rr \cdot (r-1)!} \quad (10.52)$$

Имея в виду эти равенства, можно переписать соотношение (10.50) в виде

$$S_{jj \cdot r} = S_{jj \cdot (r-1)} - |L_{rj}|^2 S_{rr \cdot (r-1)}. \quad (10.53)$$

Это соотношение представляет собой частный случай равенства (10.47), определяющего остаточные спектры. Схема их вычис-

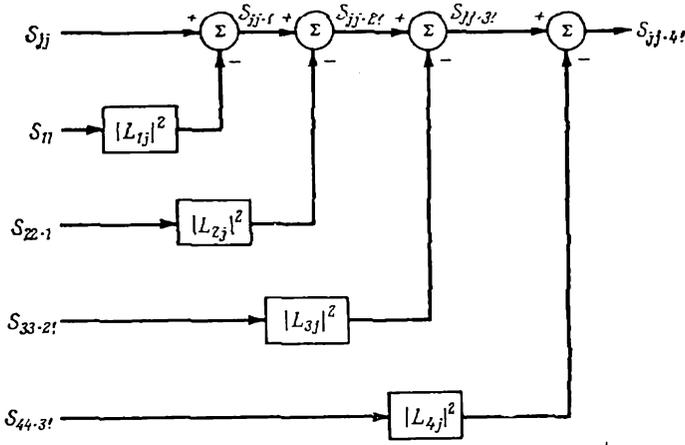


Рис. 10.13. Вычисление условных спектров как частный случай алгоритма, показанного на рис. 10.12. (Схема обобщается на случай произвольного числа входов.)

ления показана на рис. 10.13. В частности,

$$\begin{aligned} \text{при } r=1: & \quad S_{jj \cdot 1} = S_{jj} - |L_{1j}|^2 S_{11}, \quad j=2, 3, \dots, q+1, \\ \text{при } r=2: & \quad S_{jj \cdot 2} = S_{jj \cdot 1} - |L_{2j}|^2 S_{22 \cdot 1}, \quad j=3, 4, \dots, q+1, \\ \text{при } r=3: & \quad S_{jj \cdot 3} = S_{jj \cdot 2} - |L_{3j}|^2 S_{33 \cdot 2}, \quad j=4, 5, \dots, q+1 \end{aligned} \quad (10.54)$$

и т. д. Очевидно, имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \text{при } j=2: & \quad S_{22 \cdot 1} = S_{22} - |L_{12}|^2 S_{11}, \\ \text{при } j=3: & \quad S_{33 \cdot 2} = S_{33 \cdot 1} - |L_{23}|^2 S_{22 \cdot 1}, \\ \text{при } j=4: & \quad S_{44 \cdot 3} = S_{44 \cdot 2} - |L_{34}|^2 S_{33 \cdot 2} \end{aligned} \quad (10.55)$$

и т. д. Соотношения (10.55) следуют также из формул (10.46). Таким образом, приведенные выше формулы и их частные случаи показывают, каким образом можно вычислить оптимальные частотные характеристики многомерной линейной системы, заданные выше формулами (10.23) и (10.24). Частный случай алгоритма для системы с пятью входными процессами показан на рис. 10.14. Заметим, что алгоритм обобщается на случай си-

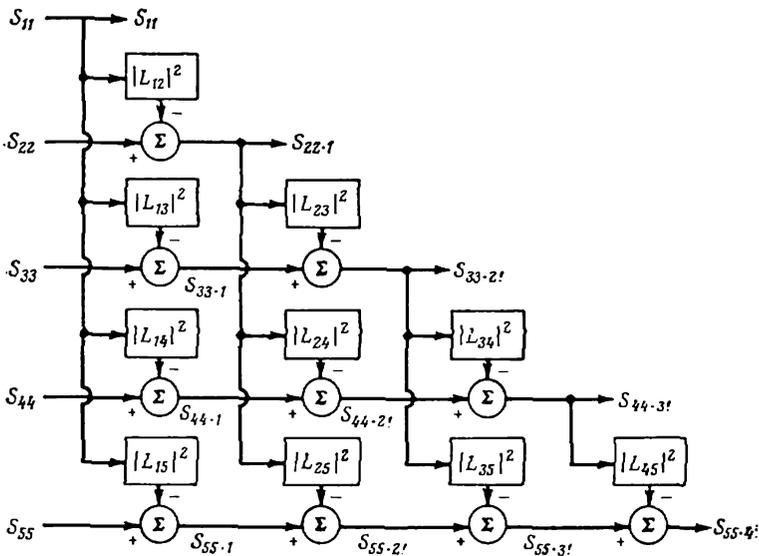


Рис. 10.14. Определение упорядоченных условных спектров по спектрам исходных процессов. (Схема обобщается на случай произвольного числа входов.)

стемы с произвольным числом входов таким же образом, как и для схемы, показанной на рис. 10.10.

Пользуясь этими формулами, легко показать, что при любых  $r < j$  и  $r \leq q$  спектральные плотности  $S_{jj}$  могут быть представлены в виде

$$S_{jj} = \sum_{i=1}^r |L_{ij}|^2 S_{ii \cdot (i-1)!} + S_{jj \cdot r!}. \tag{10.56}$$

При  $r=q$  и  $j=q+1$  имеем

$$S_{(q+1)(q+1)} = \sum_{i=1}^q |L_{i(q+1)}|^2 S_{ii \cdot (i-1)!} + S_{(q+1)(q+1) \cdot q!}, \tag{10.57}$$

или

$$S_{yy} = \sum_{i=1}^q |L_{iy}|^2 S_{ii \cdot (i-1)!} + S_{nn}. \tag{10.58}$$

Эти уравнения представляют спектры в виде упорядоченной линейной комбинации остаточных спектров входных процессов. Например, при  $q=4$  имеем

$$S_{55} = \sum_{i=1}^4 |L_{i5}|^2 S_{ii \cdot (i-1)!} + S_{55 \cdot 4!}, \tag{10.59}$$

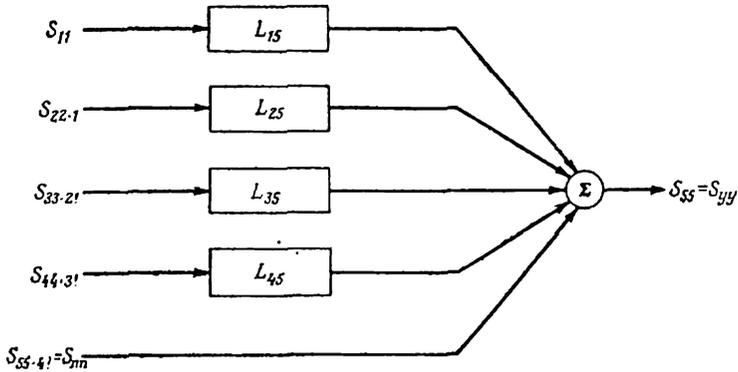


Рис. 10.15. Соотношения между условными спектрами для модели с четырьмя входными процессами и одним процессом на выходе. (Схема обобщается на случай произвольного числа входов.)

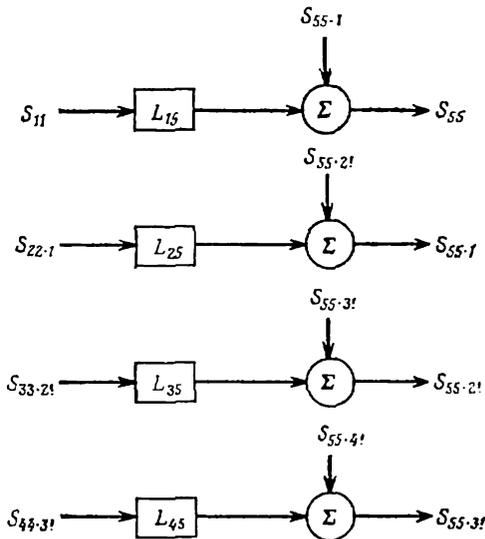


Рис. 10.16. Представление системы, показанной на рис. 10.15, набором одномерных систем.

где  $S_{55} = S_{yu}$  и  $S_{55.4} = S_{nn}$ . Таким образом, как показано на рис. 10.15, в случае системы с четырьмя входными процессами, спектр  $S_{55}$  представляется пятью слагаемыми. Этот результат легко обобщается на случай системы с произвольным числом входов. Схема, представленная на рис. 10.15, эквивалентна комбинации четырех независимых систем с одним процессом на

входе и одним выходом (рис. 10.16), причем каждый элемент системы имеет вполне определенную физическую интерпретацию.

### 10.3.3. Функции частной когерентности и спектры шума

Запишем определения для последовательности функций частной когерентности, начав для целей сравнения с функциями обычной когерентности:

$$\begin{aligned} \gamma_{iy}^2 &= \frac{|S_{iy}|^2}{S_{ii}S_{yy}}, & i=1, 2, \dots, q, \\ \gamma_{iy \cdot 1}^2 &= \frac{|S_{iy \cdot 1}|^2}{S_{ii \cdot 1}S_{yy \cdot 1}} & i=2, 3, \dots, q, \\ \gamma_{iy \cdot 21}^2 &= \frac{|S_{iy \cdot 21}|^2}{S_{ii \cdot 21}S_{yy \cdot 21}}, & i=3, 4, \dots, q, \\ \gamma_{iy \cdot 31}^2 &= \frac{|S_{iy \cdot 31}|^2}{S_{ii \cdot 31}S_{yy \cdot 31}}, & i=4, 5, \dots, q \end{aligned} \tag{10.60}$$

и т. д. В частности, при  $i=1, 2, \dots, q$  имеем

$$\gamma_{iy \cdot (i-1)}^2 = \frac{|S_{iy \cdot (i-1)}|^2}{S_{ii \cdot (i-1)}S_{yy \cdot (i-1)}}. \tag{10.61}$$

Из формулы (10.23) следует, что

$$|L_{iy}|^2 S_{ii \cdot (i-1)} = \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2 S_{yy \cdot (i-1)}. \tag{10.62}$$

Положим в (10.53)  $j=y$  и  $r=i$ . Тогда

$$S_{yy \cdot i} = S_{yy \cdot (i-1)} - |L_{iy}|^2 S_{ii \cdot (i-1)}. \tag{10.63}$$

Подставив выражение (10.62), получим

$$S_{yy \cdot i} = S_{yy \cdot (i-1)} (1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2). \tag{10.64}$$

В частности,

$$\begin{aligned} S_{yy \cdot 1} &= S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2), \\ S_{yy \cdot 21} &= S_{yy \cdot 1} (1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2) = S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2), \\ S_{yy \cdot 31} &= S_{yy \cdot 21} (1 - \gamma_{3y \cdot 21}^2) = \\ &= S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2) (1 - \gamma_{3y \cdot 21}^2) \end{aligned} \tag{10.65}$$

и т. д. Положив  $i=q$ , получим, что спектр шума на выходе многомерной системы, представленной на рис. 10.5 или 10.6, удов-

летворяет равенству

$$S_{nn} = S_{yy \cdot q!} = S_{yy} (1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2) \dots (1 - \gamma_{qy \cdot (q-1)}^2), \quad (10.66)$$

которое показывает, как можно вычислить спектр  $S_{nn}$  по  $q+1$  реализациям, наблюдаемым на входах и выходе системы.

Согласно формуле (10.65), имеем

$$S_{yy} \geq S_{yy \cdot 1} \geq S_{yy \cdot 2!} \geq \dots \geq S_{yy \cdot (q-1)!} \geq S_{yy \cdot q!}. \quad (10.67)$$

Функция  $S_{yy \cdot r!}$  представляет условный (остаточный) спектр выходного процесса  $S_{yy}$ , не зависящий от оптимальных линейных преобразований всех входов от  $x_1(t)$  до  $x_r(t)$ . Другими словами,  $S_{yy \cdot r!}$  есть спектр помехи на выходе системы  $y(t)$ , на вход которой поступают процессы  $x_1(t)$ , ...,  $x_r(t)$ . Таким образом, формула (10.67) иллюстрирует тот очевидный из физических соображений факт, что спектральная плотность помехи на выходе системы убывает по мере роста числа входных процессов<sup>1)</sup>.

### 10.3.4. Функция множественной когерентности

Функция множественной когерентности для показанной на рис. 10.5 или 10.6 многомерной модели в принятой выше системе обозначений определяется как

$$\gamma_{y \cdot x}^2 = \gamma_{y \cdot q!}^2 = \frac{S_{yy} - S_{nn}}{S_{yy}}. \quad (10.68)$$

Индекс  $x$  соответствует всем входным процессам от  $x_1(t)$  до  $x_q(t)$ . Подставляя сюда выражение (10.66), получаем общее соотношение

$$\gamma_{y \cdot q!}^2 = 1 - [(1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2) \dots (1 - \gamma_{qy \cdot (q-1)}^2)], \quad (10.69)$$

показывающее, каким образом можно выразить функцию множественной когерентности  $\gamma_{y \cdot q!}^2$  через функции обычной и частной когерентности. В частности,

$$\begin{aligned} \gamma_{y \cdot 1}^2 &= 1 - [1 - \gamma_{1y}^2] = \gamma_{1y}^2, \\ \gamma_{y \cdot 2!}^2 &= 1 - [(1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2)], \\ \gamma_{y \cdot 3!}^2 &= 1 - [(1 - \gamma_{1y}^2) (1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2) (1 - \gamma_{3y \cdot 2!}^2)]. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Если входные процессы не коррелированы друг с другом, то соотношение (10.69) сводится к уже известному равенству

$$\gamma_{y \cdot q!}^2 = \gamma_{1y}^2 + \gamma_{2y}^2 + \dots + \gamma_{qy}^2. \quad (10.71)$$

<sup>1)</sup> Точнее, спектр помехи убывает для каждой системы с фиксированным числом входов по мере того, как возрастает число входных процессов, включаемых в анализ. — *Прим. перев.*

Когерентная часть спектра выходного процесса задается равенством

$$S_{y;x} = S_{y;q_1} = S_{yy} - S_{nn} = \gamma_{y;q_1}^2 S_{yy}. \quad (10.72)$$

Здесь  $S_{y;q_1}$  есть часть спектра выходного процесса  $y(t)$ , линейно обусловленная всеми входами от  $x_1(t)$  до  $x_q(t)$ , а спектр помехи на выходе системы имеет вид

$$S_{yy \cdot q_1} = S_{nn} = S_{yy} (1 - \gamma_{y;q_1}^2). \quad (10.73)$$

Заметим также, что, заменив  $y(t)$  на  $x_i(t)$ , можно получить вместо множественной когерентности  $\gamma_{y;q_1}^2 = \gamma_{(q+1);q_1}^2$  функцию  $\gamma_{i;(i-1)}^2$ , которая представляет собой множественную когерентность с процессом  $x_i(t)$ , рассматриваемым как выход системы, на вход которой поступают процессы  $x_1(t), \dots, x_{i-1}(t)$ . Величина  $\gamma_{i;(i-1)}^2$  не совпадает с функцией множественной когерентности, связывающей процесс  $x_i(t)$ , рассматриваемый как выход системы, со всеми другими  $q-1$  входами, за исключением  $x_i(t)$ . Последний случай соответствует системе с  $q-1$  входным процессом и выходом  $y(t) = x_i(t)$ .

Соотношение (10.69), определяющее функцию множественной когерентности, позволяет по-новому интерпретировать с физической точки зрения поведение функции множественной когерентности в зависимости от частоты, связывая ее с поведением на соответствующих частотах функций обычной и частной когерентности. Меняя порядок нумерации входных процессов, можно получить различные формулы для одной и той же функции множественной когерентности.

Вместо формул (10.66) и (10.69) можно записать следующие равенства:

$$S_{yy;q_1} = S_{yy} \prod_{i=1}^q (1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2), \quad (10.74)$$

$$\gamma_{y;x}^2 = 1 - \prod_{i=1}^q (1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2). \quad (10.75)$$

При всех значениях  $i=1, 2, \dots, q$  имеем

$$\prod_{i=1}^q (1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2) \leq 1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2. \quad (10.76)$$

Следовательно, в соответствии с формулой (10.75) справедливо неравенство

$$1 - \gamma_{y;x}^2 \leq 1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2, \quad (10.77)$$

откуда следует, что при всех  $i=1, 2, \dots, q$

$$\gamma_{y;x}^2 \geq \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2. \quad (10.78)$$

Другими словами, значения функции множественной когерентности  $\gamma^2_{y:x}$  должны быть не меньше значений всех функций обычной и частной когерентности, входящих в выражение для  $\gamma^2_{y:x}$  (т. е.  $\gamma^2_{1y}$ ,  $\gamma^2_{2y \cdot 1}$ ,  $\gamma^2_{2y \cdot 2}$  и т. д.).

Вообще говоря, на любой частоте значения функций обычной и частной когерентности могут удовлетворять произвольным неравенствам; например,  $\gamma^2_{1y}$  может быть больше, меньше или равной  $\gamma^2_{2y \cdot 1}$ . Аналогично нет никаких ограничений на соотношение между  $\gamma^2_{2y \cdot 1}$  и  $\gamma^2_{3y \cdot 2}$  и т. д. Предположим, однако, что выполняется следующая система неравенств:

$$\gamma^2_{1y} \geq \gamma^2_{2y \cdot 1} \geq \gamma^2_{3y \cdot 2} \geq \dots \geq \gamma^2_{qy \cdot (q-1)} \quad (10.79)$$

С учетом неравенства (10.67) можно показать, что в этом случае

$$\gamma^2_{1y} S_{yy} \geq \gamma^2_{2y \cdot 1} S_{yy \cdot 1} \geq \gamma^2_{3y \cdot 2} S_{yy \cdot 2} \geq \dots \geq \gamma^2_{qy \cdot (q-1)} S_{yy \cdot (q-1)} \quad (10.80)$$

Эти выражения определяют упорядоченные частные когерентные спектры выходного сигнала многомерной системы, показанной на рис. 10.15, и дают еще одну полезную физическую интерпретацию этой системы.

#### 10.4. Моделирование спектральной матрицы

В работе [10.1] описан способ численного моделирования линейных систем с заданной матрицей спектральной плотности

$$S_{xx} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1q} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{q1} & S_{q2} & \dots & S_{qq} \end{bmatrix} \quad (10.81)$$

Такие модели могут быть использованы также для оценивания всех условных спектров и функций частной и множественной когерентности, перечисленных в разд. 10.3. В данном разделе описан метод моделирования. На практике все вычисления проводятся по дискретным аппроксимациям соответствующих формул. В соответствии с формулой (10.8) элементы спектральной матрицы (10.81) в случае стационарного эргодического случайного процесса задаются равенствами

$$S_{ij} = S_{x_i x_j} = (1/T) E [X_i^* X_j], \quad i, j = 1, 2, \dots, q, \quad (10.82)$$

где  $X_i = X_i(f)$  есть преобразование Фурье процесса  $x_i = x_i(t)$ , определенное в соответствии с формулами (10.4).

В основе метода моделирования лежит предположение, что спектральную матрицу<sup>1)</sup>  $S_{xx}$  можно получить, пропуская после-

<sup>1)</sup> Точнее, многомерный случайный процесс с заданной спектральной матрицей  $S_{xx}$  — Прим. перев.

довательность из  $q$  взаимно независимых белых шумов  $w_i = w_i(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , через соответственным образом подобранные линейные системы с частотными характеристиками  $A_{ij}$ . Матрица частотных характеристик с элементами  $A_{ij}$  будет в дальнейшем называться **A**-матрицей. Мы покажем, что элементы **A**-матрицы можно найти через заданные формулами (10.82) элементы  $S_{ij}$  спектральной матрицы  $S_{xx}$ . Каждая частотная ха-

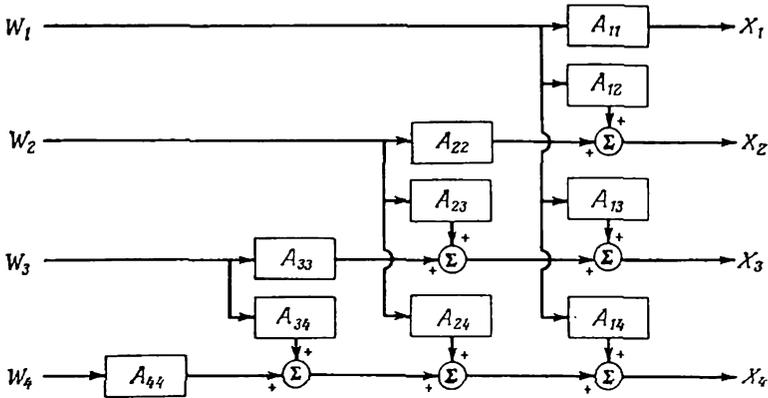


Рис. 10.17. Моделирование сигнала. (Схема обобщается на случай любого числа процессов.)

рактеристика  $A_{ij} = A_{ij}(f)$  определяет систему, связывающую входной процесс  $w_i$  с выходом  $x_j$ , причем индекс входа  $i$  предшествует индексу выходного процесса  $j$ . Соотношения между преобразованиями Фурье входных и выходных процессов при моделировании системы с четырьмя входами показаны на рис. 10.17; здесь  $W_i = W_i(f)$  представляют собой преобразования Фурье белых шумов, которые поступают на вход систем с частотными характеристиками  $A_{ij}$ . **A**-матрица есть верхняя треугольная матрица размерности  $q \times q$ :

$$A_{\omega x} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1q} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2q} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{qq} \end{bmatrix}. \quad (10.83)$$

Элементы ее главной диагонали являются вещественными функциями, а остальные элементы комплексные и обладают свойством

$$A_{ij} = A_{ij}(f) = 0 \quad \text{при} \quad i > j. \quad (10.84)$$

Спектры  $S_{\omega_i \omega_k}$  взаимно независимых белых шумов задаются единичной матрицей  $S_{\omega\omega} = I$  с элементами

$$S_{\omega_i \omega_k} = (1/T) E[W_i^* W_k] = \begin{cases} 1 & \text{при } i=k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (10.85)$$

Таким образом, матрица  $S_{\omega\omega}$  содержит единицы на главной диагонали, а остальные ее элементы равны нулю:

$$S_{\omega\omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (10.86)$$

Входящие в формулу (10.85) преобразования Фурье  $W_i(f)$  белых шумов  $\omega_i(t)$ , соответствующие такой матрице, имеют вид

$$W_i(f) = T^{1/2} e^{-j\alpha_i(f)}, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (10.87)$$

При каждом значении  $i$  и  $f$  фазовые углы  $\alpha_i(f)$  представляют собой случайные величины, распределенные равномерно в интервале от 0 до  $2\pi$ .

При  $q$  входных процессах  $\omega_i(t)$  и  $q$  выходных процессах  $x_i(t)$  зависимость между соответствующими преобразованиями Фурье может быть представлена в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1q} & A_{2q} & A_{3q} & \dots & A_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_q \end{bmatrix}, \quad (10.88)$$

что эквивалентно следующей системе алгебраических уравнений:

$$X_i = \sum_{k=1}^i A_{ki} W_k, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (10.89)$$

Полагая  $i=1, 2, 3, 4$ , получим схему, изображенную на рис. 10.17:

$$\begin{aligned} X_1 &= A_{11} W_1, \\ X_2 &= A_{12} W_1 + A_{22} W_2, \\ X_3 &= A_{13} W_1 + A_{23} W_2 + A_{33} W_3, \\ X_4 &= A_{14} W_1 + A_{24} W_2 + A_{34} W_3 + A_{44} W_4. \end{aligned} \quad (10.90)$$

10.4.1. Вычисление элементов системы

Из соотношений (10.85) и (10.89) следуют формулы

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^i A_{ki}^* A_{kj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, q; j \geq i, \tag{10.91}$$

$$S_{ii} = \sum_{k=1}^i |A_{ki}|^2, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Решения этих систем относительно частотных характеристик  $A_{ii}$ ,  $A_{ij}$  имеют вид

$$A_{ii} = [S_{ii \cdot (i-1)!}]^{1/2}, \quad A_{ij} = S_{ij \cdot (i-1)!} / A_{ii}. \tag{10.92}$$

Таким образом, между элементами  $A_{ij}$  системы, определенной формулами (10.92), и элементами  $L_{ij}$  системы, определенной формулами (10.24), существует следующая простая зависимость:

$$A_{ij} = L_{ij} A_{ii}. \tag{10.93}$$

Этот результат показывает, каким образом связаны друг с другом характеристики, используемые при решении задачи анализа многомерной системы (разд. 10.3) и моделировании матриц спектральной плотности. Обе задачи могут решаться при помощи одних и тех же алгоритмов, что указывает на весьма тесную аналогию между этими двумя типами инженерных применений.

10.4.2. Вычисление условных характеристик

При любых значениях  $r < i$  и  $j \geq i$  условные спектральные плотности вычисляются по формулам

$$S_{ij \cdot r!} = \sum_{k=r+1}^i A_{ki}^* A_{kj}. \tag{10.94}$$

Функции частной когерентности, связывающие процессы  $x_i$  и  $x_j$  при  $j \geq i$ , задаются равенствами

$$\gamma_{ij \cdot (i-1)!}^2 = |A_{ij}|^2 / S_{jj \cdot (i-1)!} \tag{10.95}$$

где

$$S_{jj \cdot (i-1)!} = \sum_{k=i}^j |A_{kj}|^2. \tag{10.96}$$

При  $j \geq 2$  функция множественной когерентности имеет вид

$$\gamma_{j:(j-1)}^2 = 1 - |A_{jj}|^2 / S_{jj}, \quad (10.97)$$

где

$$|A_{jj}|^2 = S_{jj \cdot (j-1)}, \quad (10.98)$$

есть спектр шума в выходном процессе  $x_j$ , не связанный с  $x_1, \dots, x_{j-1}$ . Наконец, из соотношений

$$S_{jj} = \sum_{i=1}^j |A_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^j |L_{ij}|^2 S_{it \cdot (i-1)}, \quad (10.99)$$

следует, что величины  $|A_{ij}|^2$  определяют спектры не коррелированных между собой выходных процессов в многомерной системе с упорядоченными входами, как показано, например, на рис. 10.15 для случая  $j=5$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- 10.1. Dodds C. J., Robson J. D. Partial Coherence in Multivariate Random Processes, *Journal of Sound and Vibration*, 42, No. 2, 243 (1975).
- 10.2. Bendat J. S. Solutions for the Multiple Input/Output Problem, *Journal of Sound and Vibration*, 44, No. 3, 311 (1976).
- 10.3. Bendat J. S. System Identification from Multiple Input/Output Data, *Journal of Sound and Vibration*, 49, No. 3, 293 (1976).
- 10.4. Romberg T. M. An Algorithm for the Multivariate Spectral Analysis of Linear Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 59, No. 3, 395 (1978).

## ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

В этой главе рассматриваются ошибки оценок статистических характеристик случайных процессов. Предполагается, что обрабатываемые данные представляют собой реализации стационарных эргодических или переходных процессов и анализ производится на цифровой ЭВМ. Полученные результаты касаются оценок различных зависящих от частоты характеристик линейных систем с одним или несколькими входными процессами. К ним относятся спектральные и взаимные спектральные плотности, функции обычной, частной и множественной когерентности, когерентный спектр выходного процесса, оптимальные амплитудная и фазовая характеристики и другие связанные с ними функции.

Точность выборочных оценок параметров описывается систематическими и случайными ошибками, которые были определены выше (разд. 2.4.1) путем рассмотрения ансамбля оценок  $\hat{\varphi}$  неизвестного параметра  $\varphi$ . Согласно формулам (2.38), нормированные систематическая  $\epsilon_b$  и случайная  $\epsilon_r$  ошибки задаются формулами

$$\epsilon_b(\hat{\varphi}) = b[\hat{\varphi}]/\varphi, \quad \epsilon_r(\hat{\varphi}) = \sigma[\hat{\varphi}]/\varphi, \quad (11.1)$$

причем требуется, чтобы истинное значение параметра  $\varphi$  было отлично от нуля. Если смещение  $\epsilon_b$  оценки  $\hat{\varphi}$  пренебрежимо мало, а ее случайная ошибка  $\epsilon_r$  невелика, то с вероятностью примерно 95% истинное значение  $\varphi$  заключено в интервале

$$\hat{\varphi}(1 - 2\epsilon_r) \leq \varphi \leq \hat{\varphi}(1 + 2\epsilon_r). \quad (11.2)$$

При малом значении  $\epsilon_r$  распределение оценки  $\hat{\varphi}$  стремится к нормальному (гауссовому), поэтому формула (11.1) остается в общем справедливой даже в том случае, когда истинное распределение оценки задается  $F$ -распределением,  $\chi^2$ -распределением или любым другим законом, существенно отличным от нормального.

Если ошибка  $\epsilon_r$  мала, то, положив

$$\hat{\varphi}^2 = \varphi^2(1 \pm \epsilon_r), \quad (11.3)$$

получаем

$$\hat{\psi} = \varphi (1 \pm \varepsilon_r)^{1/2} \approx \varphi [1 \pm (\varepsilon_r/2)], \quad (11.4)$$

откуда вытекает следующая полезная формула:

$$\varepsilon_r [\hat{\psi}^2] \approx 2\varepsilon_r [\hat{\psi}]. \quad (11.5)$$

Другими словами, случайная ошибка квадрата оценки  $\hat{\psi}^2$  примерно равна удвоенной случайной ошибке оценки  $\hat{\psi}$ . Ниже рассматриваются смещение и случайная ошибка оценок спектральной плотности и связанных с ней характеристик.

Для удобства физической интерпретации результатов приводимые ниже формулы содержат односторонние спектры  $\hat{G}(f)$ , а не двусторонние спектральные плотности  $\hat{S}(f)$  (разд. 3.2). Все формулы для нормированных систематической и случайной ошибок в равной мере справедливы для оценок, содержащих как односторонние, так и двусторонние спектральные плотности.

### 11.1. Оценки спектральной плотности

Рассмотрим реализацию  $x(t)$ , принадлежащую стационарному эргодическому случайному процессу  $\{x(t)\}$ . Оценка  $\hat{G}_{xx}(f)$  спектральной плотности  $G_{xx}(f)$  есть оценка среднего квадрата  $x^2(t)$  компонент процесса, принадлежащих интервалу частот от  $f - (B_e/2)$  до  $f + (B_e/2)$ , который отнесен к ширине интервала  $B_e$ . Величину  $B_e$  не следует смешивать с полной шириной спектра  $B$ . Ширина частотного интервала  $B_e$  эквивалентна разрешению по частоте  $\Delta f = 1/T$  при численном оценивании спектральной плотности (см. разд. 3.4.2). Оценка спектральной плотности имеет вид

$$\hat{G}_{xx}(f) = \hat{\psi}_x^2(f, B_e) / B_e, \quad (11.6)$$

где  $\hat{\psi}_x^2(f, B_e)$  есть оценка среднего квадрата значений  $x(t)$  в интервале частот шириной  $B_e$ , симметричном относительно частоты  $f$ . Эта оценка среднего значения квадрата получается по всей реализации длиной  $T_{\text{общ}} = n_d T$ . Если оценка спектра вычисляется по формуле (3.89), то равенство (11.6) эквивалентно равенству

$$\hat{G}_{xx}(f) = (2/T) E[|X(f, T)|^2], \quad (11.7)$$

где  $X(f, T)$  есть финитное преобразование Фурье реализации  $x(t)$ , взятое на интервале  $0 \leq t \leq T$ , а  $E[ \ ]$  означает усреднение по ансамблю из  $n_d$  оценок, каждая из которых получена для отрезка реализации длиной  $T$ . Оценки отстоят друг от друга по частоте на величину  $B_e$ .

## 11.1.1. Систематические ошибки

Как показано в работе [11.1], оценка  $\hat{G}_{xx}(f)$  является смещенной, причем в первом приближении величина смещения задается формулой

$$b[\hat{G}_{xx}(f)] \approx (B_e^2/24) G''_{xx}(f), \quad (11.8)$$

где  $G''_{xx}(f)$  есть вторая производная функция  $G_{xx}(f)$  по частоте. Понятно, что смещение будет велико на частотах, при которых спектральная плотность содержит острые максимумы. Нормированная систематическая ошибка задается формулой

$$e_b = [b[\hat{G}_{xx}(f)] \approx \frac{B_e^2}{24} \left[ \frac{G'_{xx}(f)}{G_{xx}(f)} \right]. \quad (11.9)$$

Рассмотрим систему с одной степенью свободы, например описываемую формулой (1.54) механическую систему с силой на входе и смещением массы на выходе. Ее частотная характеристика имеет вид

$$H(f) = \frac{1/k}{1 - (f/f_n)^2 + j2\zeta(f/f_n)}, \quad (11.10)$$

где  $\zeta$  — коэффициент затухания, а  $f_n$  — частота свободных колебаний. Если на вход системы поступает белый шум с постоянной спектральной плотностью  $G_{ww}(f) = K$ , то спектр выходного процесса определяется формулой

$$G_{xx}(f) = |H(f)|^2 G_{ww}(f) = \frac{K/k^2}{[1 - (f/f_n)^2]^2 + (2\zeta f/f_n)^2}. \quad (11.11)$$

Эта формула относится к вполне реальному случаю ограниченного по частоте белого шума на входе системы: спектральная плотность  $G_{ww}(f) = K$  при  $0 \leq f_1 \leq f \leq f_2$ , причем  $f_1 \ll f_n \ll f_2$ . Спектральная плотность процесса на выходе этой системы имеет максимум на резонансной частоте  $f_r$ , величина которого определяется формулой

$$G_{xx}(f_r) = \frac{K}{4k^2\zeta^2(1 - \zeta^2)}, \quad (11.12)$$

где

$$f_r = f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \text{при } \sqrt{2}\zeta^2 \leq 0,50. \quad (11.13)$$

Очевидно, что при  $\zeta^2 \ll 1$  имеем  $f_r \approx f_n$  и

$$G_{xx}(f_r) \approx G_{xx}(f_n) = K/4k^2\zeta^2. \quad (11.14)$$

В дальнейшем мы будем полагать  $\zeta^2 \ll 1$ ; это соответствует спектру с острым максимумом. Такое предположение делается

как для упрощения выкладок, так и потому, что случай  $\zeta^2 \ll 1$  имеет большое практическое значение.

При этом условии производная  $G''_{xx}(f)$  в точке  $f=f_r$  и ее отношение к  $G_{xx}(f_r)$  имеют вид

$$G''_{xx}(f_r) = \frac{-K}{2k^2\zeta^4 f_r^4}, \quad \frac{G''_{xx}(f_r)}{G_{xx}(f_r)} = \frac{-2}{\zeta^2 f_r^2}. \quad (11.15)$$

При  $\zeta^2 \ll 1$  ширина  $B_r$  полосы пропускания по уровню половинной энергии, симметричной относительно  $f_r$ , есть

$$B_r \approx 2\zeta f_r, \quad (11.16)$$

так что

$$\frac{G''_{xx}(f_r)}{G_{xx}(f_r)} \approx \frac{-8}{B_r^2}. \quad (11.17)$$

Подставляя это приближенное равенство в (11.9), получаем

$$\varepsilon_b[\hat{G}_{xx}(f_r)] \approx -1/3 (B_e/B_r)^2. \quad (11.18)$$

Этот простой, но практически важный результат, представленный в графическом виде на рис. 11.1, служит мерой отрицательного смещения оценки спектральной плотности на резо-

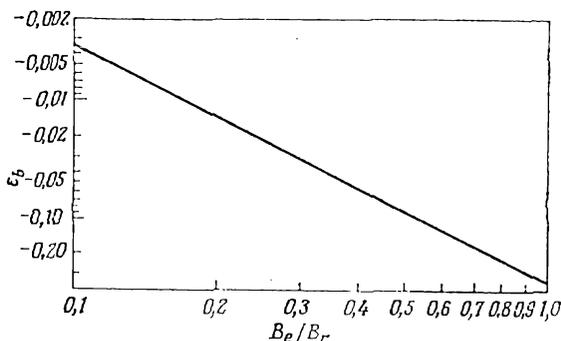


Рис. 11.1. Нормированная систематическая ошибка оценки спектра.

нансных частотах, причем величина смещения является функцией безразмерного параметра  $B_e/B_r$ . Легко видеть, что если можно обеспечить достаточно высокую разрешающую способность, так что, например,  $B_e=0,25 B_r$ , то величина смещения оказывается пренебрежимо малой ( $\varepsilon_b \approx -2,1\%$ ). При  $B_e=0,50 B_r$  смещение  $\varepsilon_r \approx -8,3\%$ , что, по-видимому, находится еще в пределах допустимых значений. Наконец, при  $B_e \approx B_r$  смещение превышает  $30\%$ , что, как правило, уже неприемлемо,

## 11.1.2. Случайные ошибки

Как показано в работе [11.1], оценка  $\hat{G}_{xx}(f)$  спектральной плотности  $G_{xx}(f)$  обладает дисперсией

$$\text{Var}[\hat{G}_{xx}(f)] \approx G_{xx}^2(f)/B_e T_{\text{общ}}, \quad (11.19)$$

где  $T_{\text{общ}} = n_d T$  есть общая длина реализации  $x(t)$ . Эта формула получена в предположении, что в пределах частотных интервалов шириной  $B_e$  спектр процесса  $x(t)$  ведет себя как спектр ограниченного по частоте нормального белого шума; при достаточно малой величине  $B_e$  такое допущение вполне приемлемо.

Этот же результат получен независимо в работе [11.2] для числовой оценки спектральной плотности, вычисленной по формуле (11.7). Соответствующая формула имеет вид

$$\text{Var}[\hat{G}_{xx}(f)] = G_{xx}^2(f)/n_d; \quad (11.20)$$

она получена в предположении, что в пределах частотных интервалов шириной  $\Delta f$  процесс  $x(t)$  ведет себя как ограниченный по частоте нормальный белый шум. Поскольку  $B_e = \Delta f = 1/T$  и  $T_{\text{общ}} = n_d T$ , очевидно, что  $B_e T_{\text{общ}} = n_d$ . Таким образом, формулы (11.19) и (11.20) задают одну и ту же величину при аналоговом и численном способах оценивания спектра.

В работе [11.2] получена также формула для дисперсии оценки  $|\hat{G}_{xy}(f)|$  модуля  $|G_{xy}(f)|$  взаимной спектральной плотности при вычислении ее по  $n_d$  парам отрезков реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$ , каждая из которых имеет общую длину  $T_{\text{общ}} = n_d T$ . При этом предполагается, что обе реализации принадлежат процессам, спектры которых в пределах интервалов  $\Delta f = 1/T$  можно считать примерно постоянными, а  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют двумерное нормальное распределение. При этих условиях формула для дисперсии оценки спектральной плотности имеет вид

$$\text{Var}[|\hat{G}_{xy}(f)|] = \frac{|G_{xy}(f)|^2}{\gamma_{xy}^2(f) n_d}, \quad (11.21)$$

где  $\gamma_{xy}^2(f)$  есть функция когерентности, связывающая  $x(t)$  и  $y(t)$ . Заметим, что при  $x(t) = y(t)$  формула (11.21) переходит в (11.20).

Из сопоставления формул (11.18) и (11.20) видно, что к разрешающей способности спектра  $\Delta f = B_e$  предъявляются противоречащие друг другу требования: систематическая ошибка уменьшается с уменьшением величины  $\Delta f$ , тогда как случайная ошибка уменьшается с ростом  $\Delta f$ . Последнее утверждение справедливо, так как при фиксированной общей длине реализации  $T_{\text{общ}}$  величина  $n_d = \Delta f T_{\text{общ}}$  прямо пропорциональна разрешающей способности  $\Delta f$ .

Согласно формулам (11.20) и (11.21), нормированные случайные ошибки оценок спектра и модуля взаимной спектральной плотности задаются формулами

$$\varepsilon_r[\hat{G}_{xx}(f)] = \frac{1}{\sqrt{n_d}}, \quad (11.22)$$

$$\varepsilon_r[|\hat{G}_{xy}(f)|] = \frac{1}{|\gamma_{xy}(f)|\sqrt{n_d}}, \quad (11.23)$$

где  $|\gamma_{xy}(f)|$  есть положительный квадратный корень из  $\gamma_{xy}^2(f)$ . Очевидно, что на всех частотах справедливо неравенство  $\varepsilon_r[\hat{G}_{xx}(f)] \leq \varepsilon_r[|\hat{G}_{xy}(f)|]$ , причем равенство достигается только

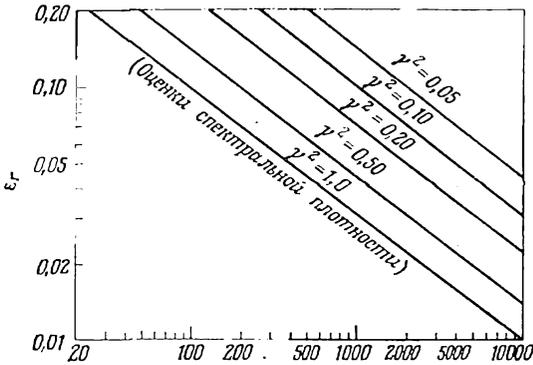


Рис. 11.2. Нормированная случайная ошибка оценок спектральной плотности и модуля взаимной спектральной плотности.

при  $\gamma^2_{xy}(f) = 1$ . Формула (11.22) является частным случаем формулы (11.23) при  $\gamma^2_{xy}(f) = 1,0$  на всех частотах. В отличие от ошибки оценки модуля взаимной спектральной плотности  $|\hat{G}_{xy}(f)|$  случайная ошибка спектра  $\hat{G}_{xx}(f)$  не зависит от частоты. Формулы (11.22) и (11.23) представлены в графической форме на рис. 11.2 для различных значений функции когерентности  $\gamma^2_{xy}(f)$  и числа усреднений  $n_d$ .

Формулы (11.18) и (11.22) служат основой для выбора параметров при оценивании спектральной плотности  $G_{xx}(f)$ . Пусть, например, нужно получить оценку спектра случайных вибраций некоторого сооружения так, чтобы нормированная систематическая ошибка  $\varepsilon_b$  была не более 0,10. При этом известно, что наименьшая резонансная частота  $\varepsilon_r = 20$  Гц, а коэффициент затухания  $\zeta$  равен примерно 0,05. Задача заключается в выборе разрешения по частоте, числа усреднений и полной длины реализации.

Для наименьшей резонансной частоты  $f_r = 20$  Гц и  $\zeta = 0,05$

ширина полосы пропускания по уровню половинной энергии есть  $B_r \approx 2\xi f_r = 2$  Гц. Из формулы (11.18) находим, что для обеспечения систематической ошибки  $\varepsilon_b \approx 0,02$  следует принять разрешение по частоте  $B_e = 0,50$  Гц. При этом длина отрезков, по которым будут получаться отдельные оценки, составит  $T = 1/B_e = 2$  с. Из формулы (11.22) следует, что при  $\varepsilon_r = 0,10$  число таких оценок  $n_d = 100$ , так что общая длина реализации  $T_{\text{общ}} = n_d T = 200$  с.

Предположим теперь, что возмущение  $x(t)$ , действующее на сооружение, представляет собой широкополосный шум, а на выходе генерируется процесс  $y(t)$  с узким спектром, который оценивается таким же образом, как и в приведенном выше примере. Вероятное значение функции когерентности на резонансной частоте  $f_r = 20$  Гц есть  $\gamma^2_{xy}(f_r) = 0,70$ . Какими должны быть число усреднений и общая длина реализации каждого из процессов  $x(t)$ ,  $y(t)$  для того, чтобы нормированная случайная ошибка  $\varepsilon_r [|\hat{G}_{xy}(f)|]$  не превышала 0,10? Какой величины достигает нормированная систематическая ошибка  $\varepsilon_b [|\hat{G}_{xy}(f)|]$  при указанном выше разрешении по частоте  $B_e = 0,50$  Гц?

Ответ на второй вопрос не изменяется: разрешающая способность  $B_e = 0,25 B_r$  обеспечивает нормированную систематическую ошибку  $\varepsilon_b$ , равную примерно 0,02. Что же касается первого вопроса, то ответ на него дается с помощью формулы (11.23). При  $\varepsilon_r = 0,10$  имеем  $n_d = 100/\gamma^2_{xy}$ . Таким образом, при  $\gamma^2_{xy} = 0,70$ , как это принято выше,  $n_d = 143$ , и общая длина реализации должна теперь составлять не 200 с, а 286 с.

## 11.2. Одномерная линейная система

Рассмотрим простейшую систему, имеющую один процесс на входе и один процесс на выходе (рис. 11.3). Пусть  $x(t)$  — измеренный входной сигнал (предполагается, что он не содержит

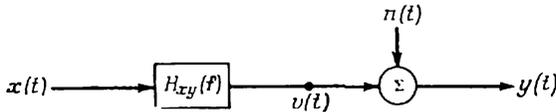


Рис. 11.3. Система с одним входным процессом и одним процессом на выходе.

помехи);  $y(t) = v(t) + n(t)$  — измеренный сигнал на выходе системы;  $v(t)$  — сигнал на выходе фильтра с частотной характеристикой  $H_{xy}(f)$ ;  $n(t)$  — помеха на выходе системы;  $H_{xy}(f)$  — частотная характеристика оптимальной линейной системы с постоянными параметрами, связывающей  $y(t)$  с  $x(t)$ .

## 11.2.1. Общие соображения

Предположим, что анализ осуществляется на основе *только двух* реализаций  $x(t)$  и  $y(t)$ , каждая из которых с достаточной полнотой описывает соответствующий стационарный или переходный случайный процесс с нулевым средним значением. Допущение об отсутствии помех в измерениях входного процесса  $x(t)$  является вполне приемлемым в реальной ситуации, когда исследователь может контролировать измерения. Однако для выходного процесса дело обстоит иначе, поскольку измерения  $y(t)$  помимо вклада заданного входного процесса  $x(t)$  могут содержать компоненты, обусловленные другими известными или неизвестными возмущениями, действующими на входе системы. Все эти компоненты, а также нелинейные эффекты и другие возмущения, которые ведут к тому, что процесс  $y(t)$  не совпадает с  $v(t)$  — результатом прохождения  $x(t)$  через систему с частотной характеристикой  $H_{xy}(f)$ , включены в помеху  $n(t)$  на выходе системы.

Как было показано в разд. 5.1, оценка оптимальной частотной характеристики такой линейной системы имеет вид

$$\hat{H}_{xy}(f) = \frac{\hat{G}_{xy}(f)}{\hat{G}_{xx}(f)}, \quad (11.24)$$

где  $\hat{G}_{xx}(f)$  и  $\hat{G}_{xy}(f)$  — оценки спектральной плотности входного процесса и взаимного спектра входа и выхода. Обычная функция когерентности оценивается по формуле

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = \frac{|\hat{G}_{xy}(f)|^2}{\hat{G}_{xx}(f) \hat{G}_{yy}(f)}, \quad (11.25)$$

где  $\hat{G}_{yy}(f)$  — оценка спектральной плотности выходного сигнала.

При вычислении оценок  $\hat{G}_{xy}(f)$ ,  $\hat{H}_{xy}(f)$  и  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  необходимо располагать измерениями  $x(t)$  и  $y(t)$ , выполненными в одном масштабе времени, и вводить поправку на время распространения  $\tau_1$ , вызывающее сдвиг по времени между реализациями  $x(t)$  и  $y(t)$ ; в этой поправке нет необходимости, если запаздывание  $\tau_1$  пренебрежимо мало по сравнению с длиной  $T$  отрезков реализации, по которым затем выполняется усреднение оценок.

Пусть  $x(t) = x(t)$  при  $0 \leq t \leq T$ , (11.26)

$$y(t) = \begin{cases} \text{произвольна} & \text{при } 0 \leq t < \tau_1, \\ x(t - \tau_1) & \text{при } \tau_1 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (11.27)$$

Тогда оценка  $\hat{R}_{xy}(\tau)$  взаимной ковариационной функции в первом приближении имеет вид

$$\hat{R}_{xy}(\tau) \approx \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) R_{xy}(\tau), \quad (11.28)$$

откуда следует, что  $\hat{R}_{xy}(\tau)$  есть смещенная оценка  $R_{xy}(\tau)$ . Таким образом,

$$\hat{G}_{xy}(f) \approx \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) G_{xy}(f), \quad (11.29)$$

$$\hat{H}_{xy}(f) \approx \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) H_{xy}(f), \quad (11.30)$$

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) \approx \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) \gamma_{xy}^2(f). \quad (11.31)$$

Величина смещения оценки  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  при различных значениях  $\tau_1/T$  показана в табл. 11.1. Чтобы избавиться от этой систематической ошибки, реализацию  $y(t)$  нужно сдвинуть по времени относительно  $x(t)$  на величину, равную  $\tau_1$ , так, чтобы  $x(t)$  и  $y(t)$  совпадали по времени. Проблемы, связанные с систематическими ошибками оценок при наличии сдвигов по времени, обсуждаются в работе [11.3].

Запишем частотную характеристику  $\hat{H}_{xy}(f)$  в полярных координатах:

$$\hat{H}_{xy}(f) = |\hat{H}_{xy}(f)| e^{-j\hat{\varphi}_{xy}(f)}. \quad (11.32)$$

Здесь  $|\hat{H}_{xy}(f)|$  и  $\hat{\varphi}_{xy}(f)$  оценки амплитудной и фазовой характеристик соответственно.

Функция  $\hat{\varphi}_{xy}(f)$  есть фаза оценки взаимного спектра  $\hat{G}_{xy}(f)$ ; будем считать, что такую же фазу имеет и функция  $\hat{\gamma}_{xy}(f)$ . Для системы, показанной на рис. 11.3, имеем

$$\hat{G}_{vv}(f) = |\hat{H}_{xy}(f)|^2 \hat{G}_{xx}(f) = \hat{\gamma}_{xy}^2(f) \hat{G}_{yy}(f), \quad (11.33)$$

$$\hat{G}_{nn}(f) = [1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)] \hat{G}_{yy}(f). \quad (11.34)$$

Функция  $\hat{G}_{vv}(f)$ , называемая оценкой когерентного спектра выходного процесса, определяется путем вычислений, а не по данным измерений. По измерениям выходного процесса вычисляется функция

$$\hat{G}_{yy}(f) = \hat{G}_{vv}(f) + \hat{G}_{nn}(f). \quad (11.35)$$

Таблица 11.1

Зависимость  $\hat{\gamma}_{xy}^2$  от  $\tau_1/T$ 

$\tau_1/T$	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
$\hat{\gamma}_{xy}^2/\gamma_{xy}^2$	1,00	0,81	0,64	0,49	0,36	0,25	0,16	0,09

Согласно формуле (5.22), оптимальной частотной характеристике  $H_{xy}(f)$  соответствуют некоррелированные (некогерентные) процессы  $v(t)$  и  $n(t)$ , так что

$$G_{vn}(f) = E[\hat{G}_{vn}(f)] = 0. \quad (11.36)$$

Здесь  $\hat{G}_{vn}(f)$  есть оценка взаимного спектра, истинное значение которого равно  $G_{vn}(f)$ . Заметим, что все оценки  $\hat{H}_{xy}$ ,  $\hat{\gamma}_{xy}^2$ ,  $\hat{G}_{vv}$  и  $\hat{G}_{nn}$  определяются на основе простых алгебраических соотношений по исходным оценкам  $\hat{G}_{xx}$ ,  $\hat{G}_{yy}$  и  $\hat{G}_{xy}$ , которые вычисляются по данным наблюдений.

Из формулы (11.33) следует, что

$$|\hat{H}_{xy}(f)|^2 = \frac{\hat{G}_{vv}(f)}{\hat{G}_{xx}(f)} = \hat{\gamma}_{xy}^2(f) \frac{\hat{G}_{yy}(f)}{\hat{G}_{xx}(f)}, \quad (11.37)$$

где, согласно соотношению (11.24),

$$|\hat{H}_{xy}(f)| = \frac{|\hat{G}_{xy}(f)|}{\hat{G}_{xx}(f)}. \quad (11.38)$$

Это соотношение определяет правильный способ оценивания амплитудной характеристики. Вычисление по формуле

$$|\hat{H}_{xy}(f)|_a = \left[ \frac{\hat{G}_{yy}(f)}{\hat{G}_{xx}(f)} \right]^{1/2}, \quad (11.39)$$

содержащей только оценки спектров, дает худшие результаты. Ошибки, получаемые при использовании этого способа, рассмотрены в разд. 11.3.4.

Из формул (11.33) и (11.34) следует, что

$$\frac{\hat{G}_{vv}(f)}{\hat{G}_{nn}(f)} = \frac{\hat{\gamma}_{xy}^2(f)}{1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)}, \quad (11.40)$$

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = \frac{\hat{G}_{vv}(f)/\hat{G}_{nn}(f)}{1 + [\hat{G}_{vv}(f)/\hat{G}_{nn}(f)]}. \quad (11.41)$$

Таким образом, оценка  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  является функцией отношения сигнала к шуму  $\hat{G}_{vv}(f)/\hat{G}_{nn}(f)$ . Соответствующая зависимость показана в табл. 11.2.

Таблица 11.2

Зависимость  $\hat{\gamma}_{xy}^2$  от  $\hat{G}_{vv}/\hat{G}_{nn}$ 

$[\hat{G}_{vv}/\hat{G}_{nn}]$	0,11	0,25	0,43	0,67	1,00	1,50	2,33	4,00	9,00
$\hat{\gamma}_{xy}^2$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90

## 11.2.2. Сводка формул для случайных ошибок

В табл. 11.3 приведены рекомендуемые для практического использования формулы для случайных ошибок оценок, вычисляемых для параметров модели с одним входом и одним выходом, показанной на рис. 11.3. Величина  $|\gamma_{xy}(f)|$  в табл. 11.3 есть положительное значение корня квадратного из  $\gamma^2_{xy}(f)$ . Заметим, что случайные ошибки оценок основных параметров — спектральных плотностей  $\hat{G}_{xx}(f)$  и  $\hat{G}_{yy}(f)$  — зависят только от числа неперекрывающихся отрезков реализации  $n_d$ , по которым получают усредненную оценку. В случае более сложных характеристик случайная ошибка зависит также и от значения  $\gamma^2_{xy}(f)$ , причем величина ее уменьшается с ростом  $n_d$  и по мере приближения  $\gamma^2_{xy}(f)$  к единице.

Таблица 11.3

Случайные ошибки оценок для системы с одним входным и одним выходным процессами

Оценка	Случайная ошибка оценки $\epsilon_r$
$\hat{G}_{xx}(f), \hat{G}_{yy}(f)$	$\frac{1}{\sqrt{n_d}}$
$ \hat{G}_{xy}(f) $	$\frac{1}{ \gamma_{xy}(f)  \sqrt{n_d}}$
$\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$	$\frac{\sqrt{2} [1 - \gamma^2_{xy}(f)]}{ \gamma_{xy}(f)  \sqrt{n_d}}$
$\hat{G}_{\sigma\sigma} = \hat{\gamma}^2_{xy}(f) \hat{G}_{yy}(f)$	$\frac{[2 - \gamma^2_{xy}(f)]^{1/2}}{ \gamma_{xy}(f)  \sqrt{n_d}}$
$ \hat{H}_{xy}(f) $	$\frac{[1 - \gamma^2_{xy}(f)]^{1/2}}{ \gamma_{xy}(f)  \sqrt{2n_d}}$

При практическом применении этих формул неизвестное истинное значение функции когерентности  $\gamma^2_{xy}(f)$  заменяется оценкой  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f)$ , вычисленной по формуле (11.25). Такой подход позволяет получить правильные значения случайной ошибки  $\epsilon_r$ , когда она достаточно мала (скажем,  $\epsilon_r < 0,20$ ), и 95%-ного доверительного интервала по формуле (11.2).

Для простоты величина  $\epsilon_r$  будет в дальнейшем обозначаться буквой  $\epsilon$ . Приведенные в табл. 11.3 формулы для случайных

ошибок оценок удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\varepsilon[\hat{G}_{yy}(f)] \leq \varepsilon[|\hat{G}_{xy}(f)|] \leq \varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)] \quad \text{при всех } f, \quad (11.42)$$

$$\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|] \leq \varepsilon[|\hat{G}_{xy}(f)|] \quad \text{при всех } f, \quad (11.43)$$

$$\varepsilon[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] \leq \varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|] \quad \text{при } \gamma_{xy}^2(f) \geq 3/4, \quad (11.44)$$

$$\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|] \leq \varepsilon[\hat{G}_{yy}(f)] \quad \text{при } \gamma_{xy}^2(f) \geq 1/3, \quad (11.45)$$

$$\varepsilon[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] \leq \varepsilon[\hat{G}_{yy}(f)] \quad \text{при } \gamma_{xy}^2(f) \geq 1/2. \quad (11.46)$$

Доказательства этих и ряда других формул, приведенных в данной главе, можно найти в работах [11.1, 11.2]; заметим, что большинство формул получается очень просто.

### 11.2.3. Оценки обычной функции когерентности

Если оценки спектральной и взаимной спектральной плотностей вычислены путем усреднения оценок, полученных по  $n_d$  неперекрывающимся отрезкам исходных реализаций, то случайная ошибка оценки функции когерентности имеет вид

$$\varepsilon[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] = \frac{\sqrt{2}[1 - \gamma_{xy}^2(f)]}{|\gamma_{xy}(f)|\sqrt{n_d}}. \quad (11.47)$$

Это уравнение представлено в графической форме на рис. 11.4 для различных значений истинной функции когерентности

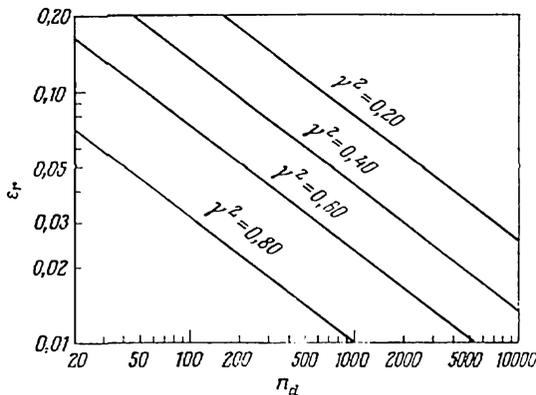


Рис. 11.4. Нормированная случайная ошибка оценки функции когерентности.

$\gamma_{xy}^2(f)$  и числа усреднений  $n_d$ . В табл. 11.4 приведены значения  $\gamma_{xy}^2(f)$  и  $n_d$ , при которых получается случайная ошибка  $\varepsilon[\hat{\gamma}_{xy}^2(f)] = 0,10$ .

Таблица 11.4

Значения  $\gamma^2_{xy}(f)$  и  $n_d$ , при которых  $\varepsilon[\hat{\gamma}^2_{xy}(f)] = 0,10$ 

$\gamma^2_{xy}(f)$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$n_d$	640	327	180	100	54	26	16

Из приведенных результатов следует, что при достаточно больших значениях функции истинной когерентности  $\gamma^2_{xy}$  ее оценки  $\hat{\gamma}^2_{xy}$  могут оказаться более точными, чем оценки спектра и взаимного спектра, по которым вычисляется величина  $\hat{\gamma}^2_{xy}$ . Так, при  $\gamma^2_{xy} = 0,80$  и  $n_d = 100$  имеем случайные ошибки  $\varepsilon[\hat{G}_{xx}] = \varepsilon[\hat{G}_{yy}] = 0,10$  и  $\varepsilon[|\hat{G}_{xy}|] \approx 0,11$ , тогда как  $\varepsilon[\hat{\gamma}^2_{xy}] \approx 0,03$ .

#### 11.2.4. Оценки когерентного спектра выходного процесса

Если оценки спектральной и взаимной спектральной плотностей вычислены путем усреднения оценок, полученных по  $n_d$  неперекрывающимся отрезкам исходных реализаций, то случай-

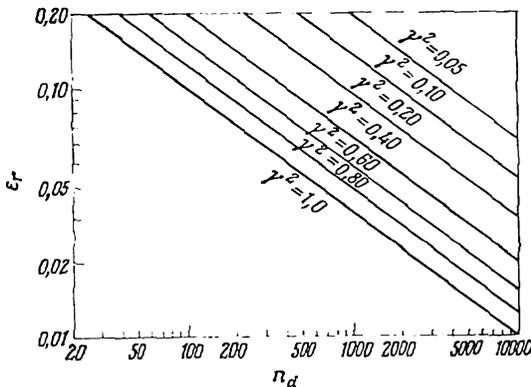


Рис. 11.5. Нормированная случайная ошибка оценки когерентного спектра выходного процесса.

ная ошибка оценки когерентного спектра выходного процесса имеет вид

$$\varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)] = \frac{[2 - \gamma^2_{xy}(f)]^{1/2}}{|\gamma_{xy}(f)| \sqrt{n_d}}. \quad (11.48)$$

Заметим, что  $\varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)] \geq \varepsilon[\hat{G}_{yy}(f)] = 1/\sqrt{n_d}$  при всех  $f$ , причем равенство достигается только в случае, когда  $\gamma^2_{xy}(f) = 1$ . Соот-

Таблица 11.5

Значения  $\gamma^2_{xy}(f)$  и  $n_d$ , при которых  $\varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)] = 0,10$ 

$\gamma^2_{xy}(f)$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$n_d$	900	567	400	300	234	186	156	123	100

ношение (11.48) представлено в графической форме на рис. 11.5 для различных значений истинной функции когерентности  $\gamma^2_{xy}(f)$  и числа усреднений  $n_d$ . В табл. 11.5 приведены значения  $\gamma^2_{xy}(f)$  и  $n_d$ , при которых получается случайная ошибка  $\varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)] = 0,10$ .

### 11.2.5. Оценки общего уровня энергии

Общий уровень энергии (среднее значение квадрата выходного процесса) определяется по оценке спектра процесса на выходе системы  $\hat{G}_{yy}(f)$  соотношением

$$\hat{\Psi}_y^2 = \int_0^{f_c} \hat{G}_{vy}(f) df = \hat{\Psi}_v^2 + \hat{\Psi}_n^2; \quad (11.49)$$

здесь  $f_c$  — частота Найквиста, т. е.  $f_c = 1/2\Delta t = (N/2)\Delta f$ , где  $\Delta f = 1/T$  и  $T = N\Delta t$ . Оценка общего уровня энергии, обусловленной когерентным спектром выхода  $\hat{G}_{vv}(f) = \hat{\gamma}^2_{xy}(f) \hat{G}_{yy}(f)$ , имеет вид

$$\hat{\Psi}_v^2 = \int_0^{f_c} \hat{G}_{vv}(f) df = \int_0^{f_c} \hat{\gamma}^2_{xy}(f) \hat{G}_{yy}(f) df. \quad (11.50)$$

Очевидно, что  $\hat{\Psi}_v^2 \leq \hat{\Psi}_y^2$ , причем равенство достигается только в случае, когда  $\hat{\gamma}^2_{xy}(f) = 1$  при всех  $f$ .

Заменив  $B_e = \Delta f$  на  $f_c$ , так что заданное формулой (11.20) число усреднений  $n_d = B_e T_{\text{общ}}$  становится равным  $n_d(f_c/\Delta f) = n_d(N/2)$ , получаем (но лишь как самое первое приближение)

$$\varepsilon[\hat{\Psi}_y^2] \approx \frac{\varepsilon[\hat{G}_{yy}(f)]}{\sqrt{N/2}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{Nn_d}}. \quad (11.51)$$

Этот результат не является точным, потому что нет оснований ожидать, что во всем диапазоне частот от 0 до  $f_c$  процесс ведет себя как ограниченный по частоте гауссовский белый шум. Аналогично

$$\varepsilon[\hat{\Psi}_v^2] \approx \frac{\varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)]}{\sqrt{N/2}}, \quad (11.52)$$

где черта обозначает усреднение по частоте в интервале от 0 до  $f_c$ . При любом значении  $f$  имеем

$$\varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)] \geq \varepsilon[\hat{G}_{yy}(f)], \quad (11.53)$$

так что

$$\varepsilon[\hat{\psi}_{vv}^2] \geq \varepsilon[\hat{\psi}_{yy}^2]. \quad (11.54)$$

Для иллюстрации формул (11.51) и (11.52) предположим, что  $\varepsilon[\hat{G}_{yy}(f)] = 8\%$ ,  $\varepsilon[\hat{G}_{vv}(f)] = 16\%$  и  $N = 128$ . Тогда  $\varepsilon[\hat{\psi}_{yy}^2] \approx 1\%$  и  $\varepsilon[\hat{\psi}_{vv}^2] \approx 2\%$ . Таким образом, при достаточно большом объеме выборки  $N$  оценка общего уровня энергии оказывается сравнительно точной даже при относительно больших ошибках оценок спектра и когерентного спектра выходного процесса.

### 11.3. Оценки частотных характеристик

При вычислении частотной характеристики (передаточной функции) оценки амплитудной и фазовой характеристик следует находить с помощью формулы (11.24), содержащей оценку взаимной спектральной плотности.

#### 11.3.1. Систематические ошибки

В случае системы с одним входным и одним выходным процессами оценки частотной характеристики, полученные по формуле (11.24), будут, как правило, смещены. Ниже перечислены источники систематических ошибок этих оценок.

1. Смещение из-за запаздывания в системе.
2. Наличие нелинейных эффектов и (или) зависимость параметров системы от времени.
3. Смещение оценок спектральной и взаимной спектральной плотности, по которым вычисляются частотные характеристики.
4. Ошибки измерения входного процесса. Как следует из формулы (11.24), наличие некоррелированной помехи на выходе системы не приводит к появлению систематической ошибки.
5. Наличие других входных процессов, коррелированных с измеренным входным процессом. Если другие процессы не коррелированы с данным, то их можно рассматривать как аддитивную помеху на выходе системы, так что их присутствие не ведет к появлению систематической ошибки.

Эти вопросы рассматривались в разд. 4.2, 5.2 и 9.2.

#### 11.3.2. Оценки амплитудной характеристики

Если оценки спектральной и взаимной спектральной плотностей вычислены путем усреднения оценок, полученных по  $n$  неперекрывающимся отрезкам исходных реализаций, то слу-

чайная ошибка оценки амплитудной характеристики имеет вид

$$\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|] = \frac{[1 - \gamma^2_{xy}(f)]^{1/2}}{|\gamma_{xy}(f)|\sqrt{2n_d}}. \quad (11.55)$$

Это равенство представлено в графической форме на рис. 11.6 для различных значений истинной функции когерентности  $\gamma^2_{xy}(f)$  и числа усреднений  $n_d$ . В табл. 11.6 приведены значения

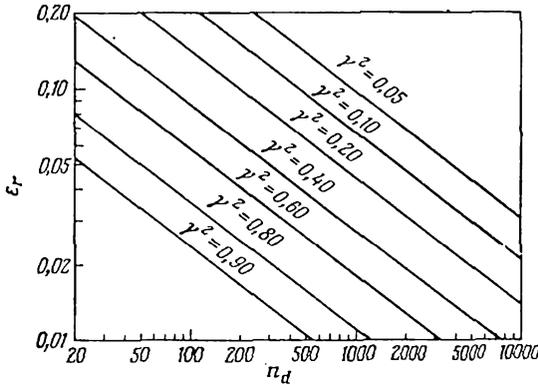


Рис. 11.6. Нормированная случайная ошибка оценки амплитудной характеристики.

$\gamma^2_{xy}(f)$  и  $n_d$ , при которых получается оценка амплитудной характеристики со случайной ошибкой  $\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|] = 0,10$ . Из табл. 11.6 видно, что, как и в случае оценивания функции когерентности (табл. 11.4), при достаточно больших значениях  $\gamma^2_{xy}$  оценка амплитудной характеристики обладает меньшей случайной ошибкой, чем оценки спектральной и взаимной спектральной плотностей, по которым она вычислена. Например, при  $\gamma^2_{xy} = 0,80$  и  $n_d = 100$  имеем  $\varepsilon[\hat{G}_{xx}] = 0,10$  и  $\varepsilon[|\hat{G}_{xy}|] = 0,11$ , тогда как  $\varepsilon[|\hat{H}_{xy}|] \approx 0,035$ .

Таблица 11.6

Значения  $\gamma^2_{xy}(f)$  и  $n_d$ , при которых  $\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|] = 0,10$

$\gamma^2_{xy}(f)$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$n_d$	200	117	75	50	34	22	13

Согласно формуле (11.5), нормированная случайная ошибка оценки квадрата амплитудной характеристики  $\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|^2]$ , т. е. квадрата выражения (11.38), имеет вид

$$\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|^2] \approx 2\varepsilon[|\hat{H}_{xy}(f)|], \quad (11.56)$$

так что после подстановки сюда (11.55) имеем

$$\varepsilon [|\hat{H}_{xy}(f)|^2] \approx \frac{\sqrt{2}[1 - \gamma_{xy}^2(f)]^{1/2}}{|\gamma_{xy}(f)| \sqrt{n_d}}. \quad (11.57)$$

Этот результат полезно сопоставить с приводимой в разд. 11.3.4 формулой для случайной ошибки оценки амплитудной характеристики, полученной только по оценкам спектров входного и выходного процессов.

### 11.3.3. Оценки фазовой характеристики

Дальнейшие результаты для оценки  $\hat{\varphi}_{xy}(f)$  фазовой характеристики  $\varphi_{xy}(f)$  можно получить, если иметь в виду, что при малой величине  $\varepsilon [|\hat{H}_{xy}(f)|]$  ошибка  $\Delta\hat{\varphi}_{xy}(f)$  оценки фазовой характеристики, выраженная в радианах, удовлетворяет в первом приближении равенству

$$\Delta\hat{\varphi}_{xy}(f) \approx \sin \Delta\hat{\varphi}_{xy}(f) = \frac{\hat{\tau}(f)}{|\hat{H}_{xy}(f)|} \approx \varepsilon [|\hat{H}_{xy}(f)|]. \quad (11.58)$$

Эту формулу можно получить из геометрических соображений с помощью графического представления доверительной области

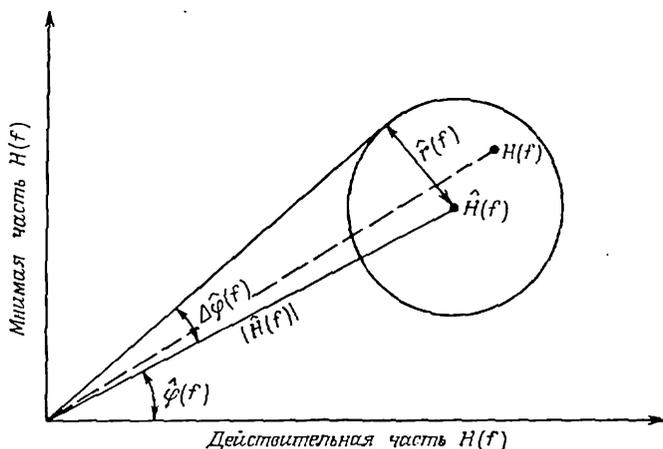


Рис. 11.7. Доверительная область для оценки частотной характеристики.

для оценки частотной характеристики (рис. 11.7). Оценка  $\hat{H}$  частотной характеристики служит центром окружности, внутри которой находится истинное значение  $H$ . Этот рисунок позволяет найти доверительные интервалы для оценок как ампли-

тудной, так и фазовой характеристик. Если радиус  $\hat{r}$  окружности достаточно мал по сравнению с величиной  $|\hat{H}|$ , то с доверительной вероятностью около 68% выполняется следующая система неравенств:

$$|\hat{H}| - \hat{r} \leq |H| \leq |\hat{H}| + \hat{r}, \quad (11.59)$$

$$\hat{\varphi} - \Delta\hat{\varphi} \leq \varphi \leq \hat{\varphi} + \Delta\hat{\varphi},$$

а 95%-ные доверительные интервалы определяются как

$$|\hat{H}| - 2\hat{r} \leq |H| \leq |\hat{H}| + 2\hat{r}, \quad (11.60)$$

$$\hat{\varphi} - 2\Delta\hat{\varphi} \leq \varphi \leq \hat{\varphi} + 2\Delta\hat{\varphi}.$$

Все величины, входящие в эти соотношения, являются функциями частоты. Заметим, что, согласно формуле (11.58),

$$|\hat{H}| \pm \hat{r} = |\hat{H}| (1 \pm \varepsilon[|\hat{H}|]), \quad (11.61)$$

$$\hat{\varphi} \pm \Delta\hat{\varphi} = \hat{\varphi} \pm \varepsilon[|\hat{H}|].$$

В формулах (11.59)—(11.61) ошибка  $\Delta\hat{\varphi}_{xy}(f)$  оценок фазовой характеристики измеряется в радианах, и для перехода к градусам нужно иметь в виду, что 0,1 рад = 5,7°. В соответствии с формулами (11.55) и (11.58) имеем

$$\Delta\hat{\varphi}_{xy}(f) \approx \frac{[1 - \gamma^2_{xy}(f)]^{1/2}}{|\gamma_{xy}(f)| \sqrt{2n_d}}. \quad (11.62)$$

Это соотношение задает среднеквадратичное отклонение оценки  $\hat{\varphi}$ . В табл. 11.7 приведены значения  $\Delta\hat{\varphi}_{xy}(f)$  при различных значениях функции когерентности  $\gamma^2_{xy}(f)$  для случая  $n_d = 50$ .

Таблица 11.7

Среднеквадратичное отклонение  $\Delta\hat{\varphi}_{xy}(f)$  оценки  $\hat{\varphi}_{xy}(f)$  (в радианах) при  $n_d = 50$

$\gamma^2_{xy}(f)$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$\Delta\hat{\varphi}_{xy}(f)$	0,200	0,153	0,122	0,100	0,082	0,065	0,050

#### 11.3.4. Оценки амплитудной характеристики по спектрам

Если вместо оценки амплитудной характеристики по формуле (11.24) мы будем оценивать ее квадрат, определяя его в со-

ответствии с равенством (11.39) отношением спектров, то

$$|\hat{H}_{xy}(f)|^2_a = \hat{G}_{yy}(f)/\hat{G}_{xx}(f). \quad (11.63)$$

Оценка (11.63) смещена, поскольку на выходе системы практически всегда присутствует некоррелированная помеха (рис. 11.3). Смещение может оказаться настолько большим, что формулу (11.63) *нельзя* рекомендовать для практического использования. Исключение составляют только почти идеальные линейные системы, которым соответствуют близкие к единице оценки функции когерентности на всех рассматриваемых частотах.

Величину систематической ошибки можно получить следующим образом. Согласно формулам (11.37) и (11.39), в первом приближении имеем

$$E[|\hat{H}_{xy}(f)|^2_a] \approx |H_{xy}(f)|^2 / \hat{\gamma}_{xy}^2(f). \quad (11.64)$$

Следовательно, систематическая ошибка определяется как

$$\begin{aligned} b[|\hat{H}_{xy}(f)|^2_a] &= E[|\hat{H}_{xy}(f)|^2_a] - |H_{xy}(f)|^2 \approx \\ &\approx |H_{xy}(f)|^2 \left[ \frac{1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)}{\hat{\gamma}_{xy}^2(f)} \right], \end{aligned} \quad (11.65)$$

и поэтому нормированная систематическая ошибка оценки есть

$$\epsilon_b[|\hat{H}_{xy}(f)|^2_a] = \frac{b[|\hat{H}_{xy}(f)|^2_a]}{|H_{xy}(f)|^2} \approx \frac{1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)}{\hat{\gamma}_{xy}^2(f)}. \quad (11.66)$$

Корень квадратный из (11.64) дает

$$E[|\hat{H}_{xy}(f)|_a] \approx |H_{xy}(f)| / |\hat{\gamma}_{xy}(f)|, \quad (11.67)$$

так что смещение оценки  $|\hat{H}_{xy}(f)|_a$  оказывается равным<sup>1)</sup>

$$\epsilon_b[|\hat{H}_{xy}(f)|_a] \approx [1 - |\hat{\gamma}_{xy}(f)| / |\hat{\gamma}_{xy}(f)|]. \quad (11.68)$$

Таблица 11.8

Нормированная систематическая ошибка оценки амплитудной характеристики, полученной по оценкам спектров

$\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95
$\epsilon_b[ \hat{H}_{xy}(f) ^2_a]$	1,00	0,67	0,43	0,25	0,111	0,053
$\epsilon_b[ \hat{H}_{xy}(f) _a]$	0,41	0,29	0,20	0,12	0,054	0,026

<sup>1)</sup> Эта формула следует из предыдущей и определения систематической ошибки [формула (2.36)]. — Прим. перев.

Если же оценка амплитудной характеристики находится через взаимную спектральную плотность в соответствии с формулой (11.38), то систематические ошибки, определяемые формулами (11.66) и (11.68), равны нулю. Заметим, что приведенные здесь ошибки неотрицательны при всех значениях  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ , которые в свою очередь определяются формулой (11.41). Значения систематической ошибки даны в табл. 11.8 для различных значений  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ . Таблица служит полезным руководством для количественного оценивания смещения, свойственного оценке амплитудной характеристики, определенной через отношение спектральных плотностей. Очевидно, что этот метод вообще не подходит, когда  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f) \leq 0,50$ , и им можно пользоваться почти без оговорок при  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f) \geq 0,80$ . Нормированная систематическая ошибка превышает нормированную случайную ошибку оценки амплитудной характеристики (см. ниже).

Приближенные, но практически приемлемые формулы для случайной ошибки оценок амплитудной характеристики и ее квадрата можно получить по аналогии с выводом формул (11.55) и (11.57), приведенным в работе [11.2]. Эти формулы имеют вид

$$\varepsilon [ |\hat{H}_{xy}(f)|_a ] \approx \frac{[1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)]^{1/2}}{\hat{\gamma}_{xy}^2(f) \sqrt{2n_d}}, \quad (11.69)$$

$$\varepsilon [ |\hat{H}_{xy}(f)|_a^2 ] \approx \frac{\sqrt{2} [1 - \hat{\gamma}_{xy}^2(f)]^{1/2}}{\hat{\gamma}_{xy}^2(f) \sqrt{n_d}} \quad (11.70)$$

и отличаются от предыдущих тем, что в них величина  $|\gamma_{xy}(f)|$  заменена на  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ . Соотношения между величинами  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  и  $n_d$ , которые должны быть выполнены, если мы хотим получить оценку амплитудной характеристики по формуле (11.69) со случайной ошибкой  $\varepsilon [ |\hat{H}_{xy}(f)|_a ] = 0,10$ , приведены в табл. 11.9. Из сравнения с данными табл. 11.6 видно, насколько возрастают требования к числу усреднений  $n_d$ .

Таблица 11.9

Значения  $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$  и  $n_d$ , при которых  $\varepsilon [ |\hat{H}_{xy}(f)|_a ] = 0,10$

$\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$n_d$	1000	390	187	100	56	31	16

Формулы (11.55) и (11.69) позволяют сопоставить случайные ошибки оценок амплитудной характеристики  $|\hat{H}_{xy}(f)|$ , по-

лученных с использованием взаимной спектральной плотности и спектров. Легко видеть, что независимо от величины  $n_d$

$$\varepsilon [ |\hat{H}_{xy}(f)|_a ] \approx \varepsilon [ |\hat{H}_{xy}(f)| ] / \gamma_{xy}(f). \quad (11.71)$$

Это соотношение еще раз демонстрирует преимущество метода, основанного на использовании взаимной спектральной плотности, так как ему соответствует случайная ошибка, меньшая в  $1/|\gamma_{xy}(f)|$  раз. Отношения случайных ошибок этих двух оценок, полученные по формуле (11.71) при различных значениях  $\gamma^2_{xy}(f)$ , приведены в табл. 11.10.

Таблица 11.10

Отношение случайных ошибок оценок амплитудной характеристики, полученных по спектрам и с использованием взаимной спектральной плотности

$\gamma^2_{xy}(f)$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80
$\frac{\varepsilon [  \hat{H}_{xy}(f) _a ]}{\varepsilon [  \hat{H}_{xy}(f)  ]}$	2,24	1,83	1,58	1,41	1,29	1,20	1,12

#### 11.4. Линейная система со многими входами

Рассмотрим общий случай системы со многими входными процессами и одним процессом на выходе (см. рис. 8.1 или 10.5). Все реализации должны измеряться одновременно и в одном масштабе времени. Как показано в разд. 10.1, прежде всего нужно заменить исходную модель моделью с условными процессами на входе. Сглаженные оценки  $\hat{G}_{ij}(f)$  спектральных и взаимных спектральных плотностей вычисляются по исходным реализациям, каждая из которых разбивается на  $n_d$  неперекрывающихся отрезков. Все другие характеристики вычисляются по формулам, приведенным в разд. 10.3. При последовательном вычислении характеристик условных процессов величина  $n_d$  уменьшается на единицу на каждом шаге. При вычислении оценки функции множественной когерентности для системы с  $q$  входами число усреднений равно не  $n_d$ , а  $n_d - q$ .

##### 11.4.1. Оценки функции множественной когерентности

Случайная ошибка оценки функции множественной когерентности для системы с  $q$  входными процессами задается формулой

$$\varepsilon [ \hat{\gamma}^2_{y:x}(f) ] = \frac{\sqrt{2} [ 1 - \gamma^2_{y:x}(f) ]}{|\gamma_{y:x}(f)| \sqrt{n_d - q}}. \quad (11.72)$$

При замене  $\gamma^2_{y;x}(f)$  на  $\gamma^2_{xy}(f)$  и  $n_d - q$  на  $n_d$  это выражение совпадает с формулой (11.47), задающей случайную ошибку для оценки функции обычной когерентности.

Оценка множественного когерентного спектра выходного процесса имеет вид

$$\hat{G}_{y;x}(f) = \hat{\gamma}^2_{y;x}(f) \hat{G}_{yy}(f), \quad (11.73)$$

а ее случайная ошибка есть

$$\varepsilon[\hat{G}_{y;x}(f)] = \frac{[2 - \gamma^2_{y;x}(f)]^{1/2}}{|\gamma_{y;x}(f)| \sqrt{n_d - q}}; \quad (11.74)$$

это выражение отличается от формулы (11.48) тем, что  $\gamma^2_{xy}(f)$  заменена на  $\gamma^2_{y;x}(f)$ , а  $n_d$  — на  $n_d - q$ .

Приближенные формулы для ошибок, свойственных оценкам общего уровня энергии в случае многомерной системы, аналогичны соотношениям (11.49) — (11.54), относящимся к системе с одним процессом на входе и одним процессом на выходе. Для их получения достаточно заменить  $n_d$  на  $n_d - q$ ,  $\gamma^2_{xy}(f)$  на  $\gamma^2_{y;x}(f)$  и иметь в виду, что в случае многомерной системы спектр  $G_{vv}(f)$  обусловлен всеми  $q$  входными процессами.

#### 11.4.2. Оценка функции частной когерентности

Для упрощения обозначений опустим зависимость всех функций от частоты  $f$ . Систему, изображенную на рис. 10.6, можно разбить на последовательность условных одномерных

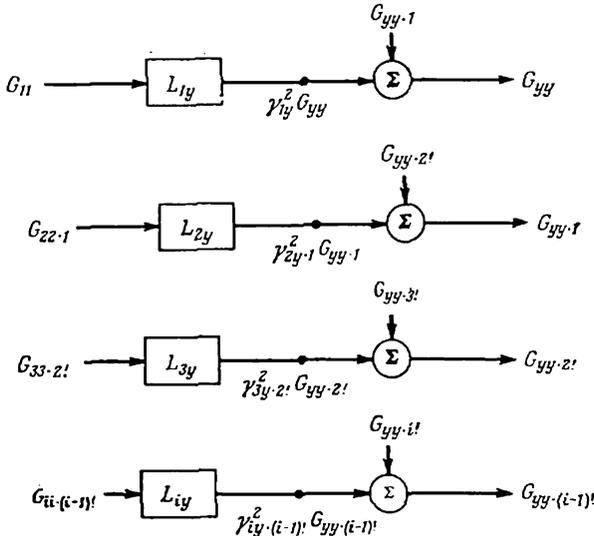


Рис. 11.8. Одномерные модели с условными входными процессами.

систем, спектральные характеристики которых показаны на рис. 11.8 (для односторонних спектральных плотностей). Каждая последующая система является прямым обобщением предыдущей, и связь со спектральными характеристиками предыдущей системы очевидна. Условные спектральные плотности вычисляются по простым рекуррентным формулам<sup>1)</sup>, причем на каждом шаге число усреднений  $n_d$  уменьшается на единицу.

Случайная ошибка оценки функции частной когерентности задается формулой

$$\varepsilon[\hat{\gamma}_{iy \cdot (i-1)}^2] = \frac{\sqrt{2}[1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2]}{|\gamma_{iy \cdot (i-1)}| \sqrt{n_d + 1 - i}}, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (11.75)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{\gamma}_{1y}^2] &= \frac{\sqrt{2}[1 - \gamma_{1y}^2]}{|\gamma_{1y}| \sqrt{n_d}}, \\ \varepsilon[\hat{\gamma}_{2y \cdot 1}^2] &= \frac{\sqrt{2}[1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2]}{|\gamma_{2y \cdot 1}| \sqrt{n_d - 1}}, \\ \varepsilon[\hat{\gamma}_{3y \cdot 2}^2] &= \frac{\sqrt{2}[1 - \gamma_{3y \cdot 2}^2]}{|\gamma_{3y \cdot 2}| \sqrt{n_d - 2}}. \end{aligned} \quad (11.76)$$

Формулы для оценок частного когерентного спектра получаются по аналогии с соотношением (11.48), соответствующим системе с одним входным процессом. Они задают нормированную случайную ошибку для оценки множественного когерентного спектра в системах с идеальными частотными характеристиками  $L_{iy}$ ,  $i=1, 2, \dots, q$ , на выходе которых нет помех (рис. 11.8). Оценки частных когерентных спектров находятся в виде

$$\hat{G}_{y \cdot i \cdot (i-1)} = |\hat{L}_{iy}|^2 \hat{G}_{i \cdot (i-1)} = \hat{\gamma}_{iy \cdot (i-1)}^2 \hat{G}_{yy \cdot (i-1)}, \quad (11.77)$$

а соответствующие случайные ошибки равны

$$\varepsilon[\hat{G}_{y \cdot i \cdot (i-1)}] = \frac{[2 - \gamma_{iy \cdot (i-1)}^2]^{1/2}}{|\gamma_{iy \cdot (i-1)}| \sqrt{n_d + 1 - i}}. \quad (11.78)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \varepsilon[\hat{G}_{y \cdot 1}] &= \frac{[2 - \gamma_{1y}^2]^{1/2}}{|\gamma_{1y}| \sqrt{n_d}}, \\ \varepsilon[\hat{G}_{y \cdot 2 \cdot 1}] &= \frac{[2 - \gamma_{2y \cdot 1}^2]^{1/2}}{|\gamma_{2y \cdot 1}| \sqrt{n_d - 1}}, \\ \varepsilon[\hat{G}_{y \cdot 3 \cdot 2}] &= \frac{[2 - \gamma_{3y \cdot 2}^2]^{1/2}}{|\gamma_{3y \cdot 2}| \sqrt{n_d - 2}}. \end{aligned} \quad (11.79)$$

<sup>1)</sup> См. разд. 10.3.2. — Прим. перев.

Сводка формул, соответствующих соотношениям (11.76) и (11.79), дана в табл. 9.2, где неизвестные истинные значения функций когерентностей заменены их оценками.

### 11.4.3. Оценки амплитудной и фазовой характеристик

Случайная ошибка оценки амплитудной характеристики задается формулой

$$\varepsilon[|\hat{L}_{iy}|] = \frac{[1 - \gamma_{iy \cdot (i-1)i}^2]^{1/2}}{|\gamma_{iy \cdot (i-1)i}| \sqrt{2(n_d + 1 - i)}}, \quad i=1, 2, \dots, q. \quad (11.80)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \varepsilon[|\hat{L}_{1y}|] &= \frac{[1 - \gamma_{1y}^2]^{1/2}}{|\gamma_{1y}| \sqrt{2n_d}}, \\ \varepsilon[|\hat{L}_{2y}|] &= \frac{[1 - \gamma_{2y \cdot 1}^2]^{1/2}}{|\gamma_{2y \cdot 1}| \sqrt{2(n_d - 1)}}, \\ \varepsilon[|\hat{L}_{3y}|] &= \frac{[1 - \gamma_{3y \cdot 21}^2]^{1/2}}{|\gamma_{3y \cdot 21}| \sqrt{2(n_d - 2)}}. \end{aligned} \quad (11.81)$$

При  $i=q$  имеем  $\varepsilon[|\hat{L}_{qy}|] = \varepsilon[|\hat{H}_{qy}|]$ .

Если ошибка  $\varepsilon[|\hat{L}_{iy}|]$  достаточно мала, то при любом значении  $i=1, 2, \dots, q$  можно принять

$$\Delta\hat{\varphi}_{iy} \approx \varepsilon[|\hat{L}_{iy}|]. \quad (11.82)$$

Этот результат аналогичен формуле (11.58); как видно, при малой величине ошибки  $\varepsilon[|\hat{L}_{iy}|]$  ошибка  $\Delta\hat{\varphi}_{iy}$  оценки фазовой характеристики  $\varphi_{iy}$  также мала.

### 11.4.4. Формулы для систем с некоррелированными входами

Рассмотрим теперь некоторые частные модели и формулы, относящиеся к многомерным системам с некоррелированными входными процессами и аддитивной помехой на выходе. Для упрощения обозначений зависимость от частоты опущена. Начнем с показанной на рис. 11.9 системы с двумя входными процессами. Если рассматривать *только* вход  $X_1$  или  $X_2$ , то этой системе соответствуют две одномерные модели, показанные на рис. 11.10. Эти две модели *нельзя рассматривать одновременно*, поскольку каждой из них соответствует весь выходной процесс  $Y$ . Если рассматривать в качестве одномерной модель с входным процессом  $X_1$ , то второй одномерной моделью, имею-

щей на входе процесс  $X_2$ , должна быть система, показанная на рис. 11.11. Таким образом, исходная модель с двумя входными процессами (рис. 11.9) эквивалентна двум одномерным моделям, изображенным на рис. 11.12, причем порядок входных про-

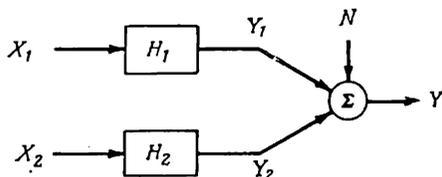


Рис. 11.9. Модель с двумя некоррелированными входными процессами и одним процессом на выходе.

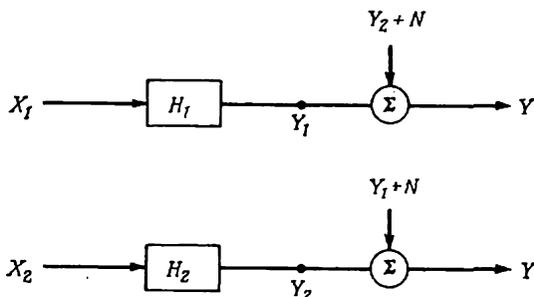


Рис. 11.10. Варианты одномерных моделей.

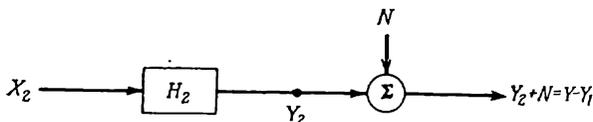


Рис. 11.11. Частный случай одномерной модели.

цессов  $X_1$  и  $X_2$  может быть произвольным и его следует выбирать из физических соображений<sup>1)</sup>.

Модель с тремя некоррелированными входными процессами и одним процессом на выходе изображена на рис. 11.13. Эта система эквивалентна трем одномерным моделям с произвольным порядком нумерации входных процессов (рис. 11.14), который опять следует выбирать исходя из физических соображений. Такую операцию представления системы одномерными моделями можно осуществлять для систем с любым числом входных процессов. Приводимые ниже формулы относятся к случаю модели с тремя входными процессами и одним процессом на выходе (рис. 11.13). Они остаются справедливыми и для

<sup>1)</sup> См. разд. 10.1. — Прим. перев.

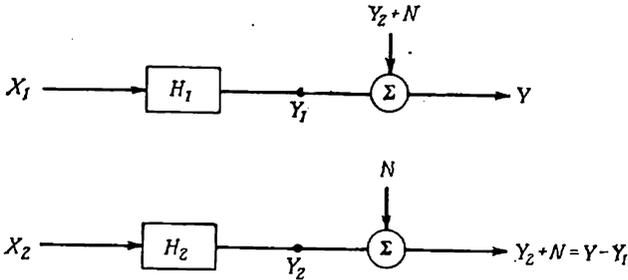


Рис. 11.12. Эквивалентное представление модели, показанной на рис. 11.9.

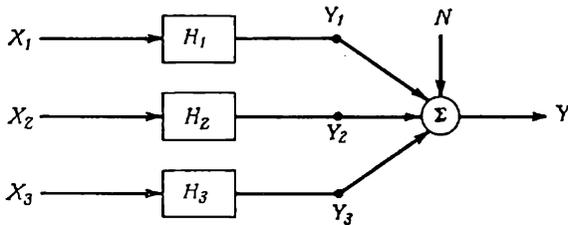


Рис. 11.13. Модель с тремя некоррелированными входными процессами и одним процессом на выходе.

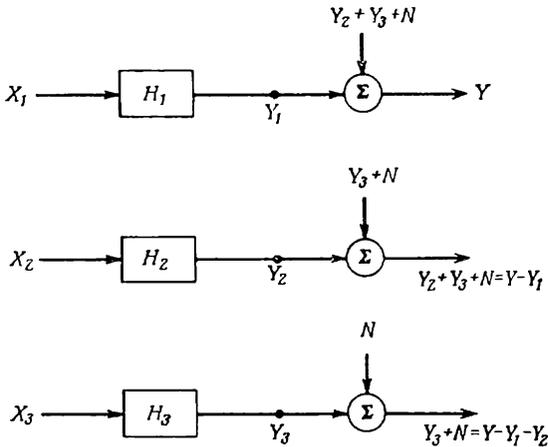


Рис. 11.14. Эквивалентное представление модели, показанной на рис. 11.13.

модели с двумя процессами на входе, следует лишь положить один из входных процессов (например,  $X_3$ ) равным нулю. Соответствующие формулы для системы с произвольным числом входов легко получить, рассуждая по аналогии с рассматриваемым случаем.

Для системы с тремя некоррелированными процессами  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  на входе, одним выходным процессом  $Y$  и аддитивной помехой  $N$  на выходе имеем

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + N, \quad (11.83)$$

где процессы  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  и  $N$  не коррелированы друг с другом. Рассматриваемая система описывается формулами

$$\begin{aligned} Y_1 &= H_1 X_1, & H_1 &= G_{1y}/G_{11}, & \gamma_{1y}^2 &= |G_{1y}|^2/G_{11}G_{yy}, \\ Y_2 &= H_2 X_2, & H_2 &= G_{2y}/G_{22}, & \gamma_{2y}^2 &= |G_{2y}|^2/G_{22}G_{yy}, \\ Y_3 &= H_3 X_3, & H_3 &= G_{3y}/G_{33}, & \gamma_{3y}^2 &= |G_{3y}|^2/G_{33}G_{yy}, \end{aligned} \quad (11.84)$$

а спектральные плотности имеют вид

$$G_{yy} = G_{y_1y_1} + G_{y_2y_2} + G_{y_3y_3} + G_{nn}, \quad (11.85)$$

$$\begin{aligned} G_{y_1y_1} &= |H_1|^2 G_{11} = \gamma_{1y}^2 G_{yy}, \\ G_{y_2y_2} &= |H_2|^2 G_{22} = \gamma_{2y}^2 G_{yy}, \\ G_{y_3y_3} &= |H_3|^2 G_{33} = \gamma_{3y}^2 G_{yy}. \end{aligned} \quad (11.86)$$

Для описания системы из трех одномерных моделей, показанной на рис. 11.13, нужно знать следующие спектральные плотности:

$$G_{y_2y_2} + G_{y_3y_3} + G_{nn} = (1 - \gamma_{1y}^2) G_{yy} = G_{yy \cdot 1}, \quad (11.87)$$

$$G_{y_3y_3} + G_{nn} = (1 - \gamma_{1y}^2 - \gamma_{2y}^2) G_{yy} = G_{yy \cdot 21}, \quad (11.88)$$

$$G_{nn} = (1 - \gamma_{1y}^2 - \gamma_{2y}^2 - \gamma_{3y}^2) G_{yy} = G_{yy \cdot 31}, \quad (11.89)$$

где

$$\begin{aligned} G_{yy \cdot 1} &= G_{yy} - G_{y_1y_1}, \\ G_{yy \cdot 21} &= G_{yy} - G_{y_1y_1} - G_{y_2y_2}, \\ G_{yy \cdot 31} &= G_{yy} - G_{y_1y_1} - G_{y_2y_2} - G_{y_3y_3}. \end{aligned} \quad (11.90)$$

Поскольку  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  не коррелированы друг с другом, имеем

$$G_{22 \cdot 1} = G_{22}, \quad G_{33 \cdot 21} = G_{33}, \quad (11.91)$$

$$G_{2y \cdot 1} = G_{2y}, \quad G_{3y \cdot 21} = G_{3y}.$$

Кроме того,

$$\gamma_{2y \cdot 1}^2 = \frac{|G_{2y \cdot 1}|^2}{G_{22 \cdot 1} G_{yy \cdot 1}} = \frac{\gamma_{2y}^2}{1 - \gamma_{1y}^2}, \quad (11.92)$$

$$\gamma_{3y \cdot 21}^2 = \frac{|G_{3y \cdot 21}|^2}{G_{33 \cdot 21} G_{yy \cdot 21}} = \frac{\gamma_{3y}^2}{1 - \gamma_{1y}^2 - \gamma_{2y}^2}. \quad (11.93)$$

Пользуясь соотношениями, приведенными ранее в этом разделе, нетрудно записать формулы для случайных ошибок оценок характеристик трех изображенных на рис. 11.14 одномер-

ных моделей, которые эквивалентны исходной модели с тремя некоррелированными входными процессами (рис. 11.13). Эти формулы имеют вид

$$\varepsilon[\hat{G}_{y_1y_1}] = \frac{(2 - \gamma_{1y}^2)^{1/2}}{|\gamma_{1y}| \sqrt{n_d}}, \quad (11.94)$$

$$\varepsilon[\hat{G}_{y_2y_2}] = \frac{(2 - \gamma_{2y \cdot 1}^2)^{1/2}}{|\gamma_{2y \cdot 1}| \sqrt{n_d - 1}} = \frac{[2(1 - \gamma_{1y}^2) - \gamma_{2y}^2]^{1/2}}{|\gamma_{2y}| \sqrt{n_d - 1}}, \quad (11.95)$$

$$\varepsilon[\hat{G}_{y_3y_3}] = \frac{(2 - \gamma_{3y \cdot 2}^2)^{1/2}}{|\gamma_{3y \cdot 2}| \sqrt{n_d - 2}} = \frac{[2(1 - \gamma_{1y}^2 - \gamma_{2y}^2) - \gamma_{3y}^2]^{1/2}}{|\gamma_{3y}| \sqrt{n_d - 2}}, \quad (11.96)$$

$$\varepsilon[|\hat{H}_1|] = \frac{(1 - \gamma_{1y}^2)^{1/2}}{|\gamma_{1y}| \sqrt{2n_d}}, \quad (11.97)$$

$$\varepsilon[|\hat{H}_2|] = \frac{(1 - \gamma_{2y}^2)^{1/2}}{|\gamma_{2y}| \sqrt{2n_d}}, \quad (11.98)$$

$$\varepsilon[|\hat{H}_3|] = \frac{(1 - \gamma_{3y}^2)^{1/2}}{|\gamma_{3y}| \sqrt{2n_d}}. \quad (11.99)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- 11.1. Bendat J. S., Piersol A. G. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов.— М.: Мир, 1974.]
- 11.2. Bendat J. S. Statistical Errors in Measurement of Coherence Functions and Input/Output Quantities, *Journal of Sound and Vibration*, 59, No. 3, 405 (1978).
- 11.3. Seybert A. F., Hamilton, J. F., Time Delay Bias Errors in Estimating Frequency Response and Coherence Functions, *Journal of Sound and Vibration*, 60, No. 1, 1 (1978).

## ЛИТЕРАТУРА

Abdel-Ghafter A. M., Housner G. W. Ambient Vibration Tests of Suspension Bridge, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **104**, No. EM 5, 983 (1978).

Barnoski R. L. Ordinary Coherence Functions and Mechanical Systems, *AIAA Journal of Aircraft*, **6**, No. 4, 372 (Aug. 1969).

Barrett S. On the Use of Coherence Functions to Evaluate Sources of Dynamic Excitation, *Shock and Vibration Bulletin*, No. 49, Part 1, 43 (1979).

Begg R. D., Mackenzie A. C., Dodds C. J., Loland O. Structural Integrity Monitoring Using Digital Processing of Vibration Signals, *Proceedings, Offshore Technology Conference, OTC 2459*, 2 (1976).

Bendat J. S., Piersol A. G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, New York, 1971. [Имеется перевод: Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1974.]

Bendat J. S. *Principles and Applications of Random Noise Theory*. Wiley, New York, 1958, Reprinted by Krieger Publishing Co., New York, 1977. [Имеется перевод: Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения. — М.: Наука, 1965.]

Bendat J. S. Solutions for the Multiple Input/Output Problem, *Journal of Sound and Vibration*, **44**, No. 3, 311 (1976).

Bendat J. S. System Identification from Multiple Input/Output Data, *Journal of Sound and Vibration*, **49**, No. 3, 293 (1976).

Bendat J. S. Statistical Errors in Measurement of Coherence Functions and Input/Output Quantities, *Journal of Sound and Vibration*, **59**, No. 3, 405, (1979).

Blake W. K., Waterhouse R. V. The Use of Cross-Spectral Density Measurements in Partially Reverberant Sound Fields, *Journal of Sound and Vibration*, **54**, No. 4, 589 (1977).

Carter G. C., Knapp C. H., Nuttall A. H. Estimation of the Magnitude-Squared Coherence via Overlapped Fast Fourier Transform Processing, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, **AU-21**, No. 4, 337 (Aug. 1973).

Carter G. C. Time Delay Estimation, NUSC TR-5335, Naval Underwater Systems Center, New London, Connecticut, Apr. 1976.

Cooley J. W., Tukey J. W. An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series, *Mathematics of Computation*, **19**, No. 90, 297 (Apr. 1965).

Cremer L., Heckl M., Ungar E. E. *Structure-Borne Noise*, Springer-Verlag, New York, 1973.

Cron B. J., Sherman C. H. Spatial-Correlation Functions for Various Noise Models, *Journal of the Acoustical Society of America*, **34**, No. 11, 1732 (Nov. 1962).

Dodds C. J., Robson J. D., Partial Coherence in Multivariate Random Processes, *Journal of Sound and Vibration*, **42**, No. 2, 243 (1975).

Enochson L. D. Digital Techniques in Data Analysis, *Noise Control Engineering*, **9**, No. 2, 138 (Nov. — Dec. 1977).

Halvorsen W. G., Bendat J. S. Noise Source Identification Using Coherent Output Power Spectra. *Sound and Vibration*. **9**. 15 (1975).

Huebner K. H., *The Finite Element Method for Engineers*, Wiley, New York, 1975.

Lyon R. H. *Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1975.

Marmarelis P. Z., Marmarelis V. Z. *Analysis of Physiological Systems*, Plenum Press, New York, 1978. [Имеется перевод: Мармарелис П., Мармарелис В. Анализ физиологических систем: Метод белого шума. — М.: Мир, 1982.]

Morrow C. T. Point-to-Point Correlation of Sound Pressures in Reverberant Chambers, *Shock and Vibration Bulletin*, No. 39, (1969).

Otnes R. K., Enochson L. D. *Applied Time Series Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1978. [Имеется перевод: Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов: Основные методы. — М.: Мир, 1982.]

Papoulis A. *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Papoulis A. *Signal Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1977.

Piersol A. G. Use of Coherence and Phase Data Between Two Receivers in Evaluation of Noise Environments, *Journal of Sound and Vibration*, 56, No. 2, 215 (1978).

Rayleigh J. W. S. *The Theory of Sound*, Vol. 1 Appendix, Dover Publications, New York, 1945. [Имеется перевод: Рэлей С. Дж. В. Теория звука. Т. 1. — М.: Гостехиздат, 1955.]

Romberg T. M. An Algorithm for the Multivariate Spectral Analysis of Linear Systems, *Journal of Sound and Vibration*, 59, No. 3, 395 (1978).

Seybert A. F., Hamilton J. F. Time Delay Bias Errors in Estimating Frequency Response and Coherence Functions, *Journal of Sound and Vibration*, 60, No. 1, 1 (1978).

Stokey W. F. *Vibration of Systems Having Distributed Mass and Elasticity*, Ch. 7, in *Shock and Vibration Handbook*, 2nd Edition, C. M. Harris, C. E. Crede, Eds., McGraw-Hill, New York, 1976.

Talbot C. R. S. Coherence Function Effects on Phase Difference Interpretation, *Journal of Sound and Vibration*, 39, No. 3, 345 (1975).

White P. H. Cross-Correlation in Structural Systems: Dispersive and Non-dispersive Waves, *Journal of Acoustical Society of America*, 45, No. 5, 1118 (May 1969).

Wilby J. F. *The Response of Simple Panels to Turbulent Boundary Layer Excitation*, AFFDL-TR-67-70, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1967.

Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. — Успехи математических наук, 1952, Т. VII, вып. 5 (51).

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автокорреляционная функция *см.* Ковариационная функция
- Автоспектр *см.* Спектральная плотность
- Амплитудная характеристика 28  
 — — вычисление 97, 99, 160, 295  
 — — пример 120  
 — — систематическая ошибка оценки 97, 99, 114, 291, 295  
 — — случайная ошибка оценки 113, 291—293, 297, 300
- Аналоговая фильтрация 67
- Вероятность 36, 39, 40
- Взаимная спектральная плотность 60, 77  
 — — — вычисление 82, 254  
 — — — интерпретация 77  
 — — — модуль 64, 117, 136, 193  
 — — — свойства 60, 64, 66, 96, 100  
 — — — связь с взаимной ковариационной функцией 60, 63  
 — — — систематическая ошибка оценки 86, 265  
 — — — случайная ошибка оценки 86, 184, 282, 287  
 — — — фазовый угол 64  
 — — — через преобразование Фурье 65
- Время реверберации 228
- Выборочная плотность 50
- Главное направление 172
- Дельта-функция 23, 24, 73  
 — — финитная 92
- Дисперсия 41
- Запаздывание 58, 133, 136, 141, 168, 175
- Квадратурный спектр 63
- Кепстр 149
- Ковариационная функция 13, 58, 145  
 — — взаимная 58  
 — — — вычисление 79, 131  
 — — — интерпретация 74  
 — — — примеры 76, 134—136, 154, 156, 158  
 — — — свойства 59  
 — — — связь с коспектром 63  
 — — — систематическая ошибка оценки 86, 285  
 — — — случайная ошибка оценки 86, 143  
 — — — вычисление 79—81  
 — — — интерпретация 68  
 — — — примеры 71, 72, 125, 146, 147  
 — — — свойства 58, 72  
 — — — связь со спектральной плотностью 60, 61  
 — — — систематическая ошибка оценки 86  
 — — — случайная ошибка оценки 86, 143  
 — — — циклическая 80
- Ковариация 57
- Когерентный спектр выходного процесса 94, 204, 239  
 — — — — вычисление 97, 223, 225, 231, 285  
 — — — — множественный 206, 218, 271  
 — — — — — пример 243  
 — — — — — случайная ошибка оценки 298  
 — — — — — примеры 229, 238, 244  
 — — — — — случайная ошибка оценки 246, 287, 289  
 — — — — — частный 219, 272, 299  
 — — — — — пример 243  
 — — — — — случайная ошибка оценки 246, 249
- Корреляционная функция 58  
 — — нормированная 59, 142
- Коспектральная плотность 63. *См. также* Взаимная спектральная плотность
- Коэффициент вариации 50

- затухания 30, 124, 196, 279
- корреляции 56, 222
- Математическое ожидание** 40. *См. также* Среднее значение
- Матрица единичная** 274
- спектральная 272
- треугольная 273
- Нормальная мода** 33, 127, 190, 194
- Окно временное** 83
- прямоугольное 83, 123
- спектральное 83, 84
- Ханна 84, 123
- Ортогональные измерения** 170
- Отношение шума к сигналу** 95, 99, 104, 111, 169, 286
- Ошибка оценки** 49—50
- — систематическая 49, 277
- — амплитудной характеристики 97, 99, 114, 291, 295
- — за счет запаздывания 226, 285
- — — — реверберации 228
- — — — ковариационной функции 86
- — — — взаимной 86, 284
- — — — плотности вероятности 52
- — — — спектральной плотности 86, 280
- — — — — взаимной 86, 285
- — — — среднего значения 50
- — — — среднего квадрата 50
- — — — фазовой характеристики 99, 114, 291
- — — — функции когерентности 87, 226, 229, 285
- — — — случайная 50, 275
- — — — амплитудной характеристики 113, 291—293, 297, 300
- — — — ковариационной функции 86, 143
- — — — — взаимной 86, 143
- — — — когерентного спектра выхода 246, 287, 289
- — — — — множественного 298
- — — — — частного 246, 299
- — — — — общего уровня энергии 298
- — — — — плотности вероятности 52
- — — — — спектральной плотности 86, 282, 288
- — — — — взаимной 86, 184, 282, 287
- — — — — среднего значения 51
- — — — — среднего квадрата 51
- — — — — фазовой характеристики 113, 293—294, 300
- — — — — функции когерентности 86, 246, 287
- — — — — множественной 297
- — — — — частной 246, 299
- Плотность вероятности** 38
- — вычисление 39
- — гармонического процесса 46
- — — — н гауссовского шума 47
- — гауссовского (нормального) шума 44
- — систематическая ошибка оценки 52
- — случайная ошибка оценки 52
- Полоса пропускания по уровню половинной энергии** 32, 196, 280, 283
- Преобразование Лапласа** 29
- *Фурье* 19
- — падающее 85
- — обратное 20
- — примеры 26
- — прямое 20
- — финитное 21
- Процесс гармонический** 46, 47
- — ковариационная функция 70
- — плотность вероятности 47
- — спектральная плотность 73
- — детерминированный 11
- — периодический 17, 46, 185
- — случайный 11
- — нестационарный 13
- — — — переходный 16, 91, 161, 277
- — — — нормальный (гауссовский) 44, 281, 290
- — — — линейное преобразование 45
- — — — смесь с синусоидой 47
- — — — стационарный 13
- — — — моменты 40—41
- — — — эргодический 13, 39, 60, 198, 277
- Разрешение по амплитуде** 39, 133
- — времени 78
- — частоте 22, 79, 114, 116, 122, 278
- Распространение энергии бездисперсное** 75, 144
- — дисперсное 130, 152
- — смешанное 157
- Регрессионный анализ** 152
- Система линейная** 27
- — оптимальная 202, 257, 258
- — нелинейная 27, 114, 230
- — с обратной связью 102, 230
- — — — одной степенью свободы 29, 124, 279
- — — — постоянными параметрами 26

- — распределенными параметрами 32, 125
- устойчивая 26
- физически осуществимая 25
- Скорость групповая 152
- фазовая 152
- Спектр амплитудный 21
- квадратурный 63
- множественный когерентный 206, 218, 271
- — — пример 243
- — — случайная ошибка оценки 298
- остаточный 107
- частный когерентный 219, 272, 299
- — — пример 243
- — — случайная ошибка оценки 246, 299
- шума на выходе 94, 206, 217, 249, 269, 276
- Спектральная плотность 60
- — взаимная 60
- — вычисление 81, 254, 278
- — — аналоговым методом 67
- — — через преобразование Фурье 65
- — двусторонняя 61
- — интерпретация 72
- — односторонняя 61
- — переходного процесса 91, 112, 161, 256
- — примеры 118, 132, 140, 150, 151, 192, 215, 237, 243
- — процессов в многомерной системе 148
- — свойства 62
- — связь с корреляционной функцией 60
- — систематическая ошибка оценки 86, 280
- — случайная ошибка оценки 86, 282, 288. *См. также* Взаимная спектральная плотность, Условная спектральная плотность
- Спектральное разрешение *см.* Разрешение по частоте
- Среднее значение 12, 41
- — вычисление 43
- — связь с ковариационной функцией 59
- — — — плотностью вероятности 41
- — — со спектральной плотностью 62
- — систематическая ошибка оценки 50
- — — случайная ошибка оценки 51
- Среднеквадратичное значение 41
- Средний квадрат 12, 41
- — вычисление 43
- — связь с дисперсией 42
- — — — ковариационной функцией 59
- — — — плотностью вероятности 41
- — — со спектральной плотностью 62
- — систематическая ошибка оценки 50
- — случайная ошибка оценки 51
- Теорема *Винера—Хинчина* 66
- центральная предельная 45
- Точечный источник 178
- Условная спектральная плотность 210, 255
- — — вычисление 256, 265, 275
- Условный процесс 209, 248, 256, 262, 297
- Фазовая характеристика 28
- — вычисление 64, 136
- — примеры 120, 193
- — систематическая ошибка оценки 99, 114, 291
- — случайная ошибка оценки 113, 293—294, 300
- Фазовый угол 64
- — волны изгиба 154—155
- — комплексной функции когерентности 169
- — примеры 138, 177, 179, 181, 183, 187, 188
- — связь с фазовой характеристикой 90, 285
- — среднеквадратичное отклонение оценки 184. *См. также* Фазовая характеристика
- Функция весовая 25
- импульсная переходная 25, 139
- когерентности 64, 93
- — вычисление 82, 284
- — комплексная 169
- — множественная 206, 218, 270
- — — пример 244
- — — связь с функцией частной когерентности 218, 271
- — — случайная ошибка оценки 297
- — — примеры 119, 122, 123, 138, 177, 179, 181, 183, 187, 193, 216, 243
- — — связь с амплитудной характеристикой 97
- — — когерентным спектром 94, 107

- — систематическая ошибка оценки 87, 226, 229, 285
  - — случайная ошибка оценки 86, 246, 287
  - — строго линейной системы 94
  - — частная 212, 269
  - — — примеры 216, 244
  - — — связь с функцией множественной когерентности 218, 271
  - — — случайная ошибка оценки 246, 299
- Центральный момент 41**
- Частота Найквиста 22, 78**
- отрицательная 62
  - резонансная 32, 190, 280
  - собственная 30, 124, 125
  - фундаментальная 22
- Частотная характеристика 28**
- — вычисление 97—99, 106, 112, 160
  - — многомерной системы 198
  - — оптимальная 107, 201, 257
  - — пример 120
- — систематическая ошибка оценки 114, 291
  - — случайная ошибка оценки 113, 292—295, 300. *См. также* Амплитудная характеристика, Фазовая характеристика
- Число волновое 178**
- усреднений 113, 290, 296
- Шум акустический 131, 141, 176, 183, 189, 216, 236, 242**
- белый 273, 279
  - — нормальный 281, 290
  - — ограниченный по частоте 74, 85, 170
  - диффузный 177, 180, 228
  - узкополосный 73, 74
  - — ковариационная функция 71, 76
  - — спектральная плотность 71, 73
  - широкополосный 71
  - — ковариационная функция 71
  - — спектральная плотность 71, 73
- Энергетический спектр 91**

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие . . . . .	7
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Характеристики случайных процессов . . . . .	11
1.2. Ряды и преобразование Фурье . . . . .	17
1.3. Частотные характеристики физических систем . . . . .	25
Литература . . . . .	35
<b>Глава 2. Вероятностные функции и средние характеристики случайных процессов . . . . .</b>	<b>36</b>
2.1. Вероятностные функции . . . . .	36
2.2. Моменты и средние значения . . . . .	40
2.3. Некоторые специальные плотности вероятности . . . . .	44
2.4. Погрешности выборочных оценок . . . . .	48
Литература . . . . .	53
<b>Глава 3. Корреляционные функции и спектральные плотности . . . . .</b>	<b>54</b>
3.1. Корреляционные функции . . . . .	54
3.2. Спектральные плотности . . . . .	60
3.3. Общие интерпретации . . . . .	67
3.4. Способы оценивания и ошибки . . . . .	78
Литература . . . . .	87
<b>Глава 4. Системы с одним входом и одним выходом . . . . .</b>	<b>88</b>
4.1. Анализ идеальных систем . . . . .	88
4.2. Влияние шума . . . . .	95
4.3. Системы с обратной связью . . . . .	102
Литература . . . . .	105
<b>Глава 5. Идентификация систем и предсказание их реакции . . . . .</b>	<b>106</b>
5.1. Определение частотной характеристики . . . . .	106
5.2. Ошибки оценивания частотной характеристики . . . . .	112
5.3. Предсказание реакции системы . . . . .	124
Литература . . . . .	129
<b>Глава 6. Идентификация трактов распространения сигналов . . . . .</b>	<b>130</b>
6.1. Анализ бездисперсного распространения сигнала при наличии входных и выходных данных . . . . .	130
6.2. Анализ бездисперсного распространения сигналов при наличии только выходных данных . . . . .	144
6.3. Дисперсное распространение сигналов . . . . .	152
6.4. Оценивание характеристик трактов . . . . .	159
Литература . . . . .	162
<b>Глава 7. Системы с одним входом и несколькими выходами . . . . .</b>	<b>163</b>
7.1. Корреляционные и спектральные соотношения . . . . .	163
7.2. Относительное запаздывание и направление распространения сигнала . . . . .	168
7.3. Локализация одного источника . . . . .	174
7.4. Идентификация системы по наблюдениям ее выходных процессов . . . . .	189
Литература . . . . .	197

<b>Глава 8. Соотношения между процессами на входе и выходе многомерных систем</b> . . . . .	198
8.1. Многомерные системы . . . . .	198
8.2. Функция множественной когерентности . . . . .	205
8.3. Анализ, основанный на условных спектрах . . . . .	208
8.4. Функции частной когерентности . . . . .	212
Литература . . . . .	219
<b>Глава 9. Идентификация источников энергии</b> . . . . .	220
9.1. Постановка задачи . . . . .	220
9.2. Проблемы, связанные с индивидуальными трактами . . . . .	224
9.3. Взаимодействие между наблюдениями . . . . .	231
9.4. Физически связанные источники . . . . .	237
Литература . . . . .	246
<b>Глава 10. Методы решения многомерных задач</b> . . . . .	247
10.1. Построение моделей . . . . .	247
10.2. Соотношения между параметрами оптимальных систем . . . . .	256
10.3. Вычислительные алгоритмы . . . . .	261
10.4. Моделирование спектральной матрицы . . . . .	272
Литература . . . . .	276
<b>Глава 11. Точность оценивания статистических характеристик</b> . . . . .	277
11.1. Оценки спектральной плотности . . . . .	278
11.2. Одномерная линейная система . . . . .	283
11.3. Оценки частотных характеристик . . . . .	291
11.4. Линейная система со многими входами . . . . .	297
Литература . . . . .	304
Литература . . . . .	305
Предметный указатель . . . . .	307

Джулиус С. Бендат, Аллан Дж. Пирсол

#### ПРИМЕНЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОГО И СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Старший научный редактор Л. П. Якименко  
 Младший научный редактор Ю. Л. Евдокимова  
 Художник Г. П. Чеховский  
 Художественный редактор Л. Е. Безрученко  
 Технический редактор Н. И. Манохина  
 Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 3077

Сдано в набор 22.06.82. Подписано к печати 01.04.83. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Объем 9,75 б. л.  
 Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 19,50.  
 Усл. кр.-отт. 19,50. Уч.-изд. л. 16,76. Изд. № 20/1862. Тираж 16.500 экз. Зак. 561.  
 Цена 1 р. 40 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Московская типография № 11 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР  
 по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 113105.