ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№1 январь 2013

СТАБИЛЬНЫЕ БРАКИ

МИКРОМИР

НЕВЕРОЯТНЫЙ МОЛОТОК

ПОДВОДНЫЕ КАМНИ ЗАКОНА АРХИМЕДА

e-mail: kvantik@mccme.ru
Издается при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)
№1 | январь 2013

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

В этом номере вас ждёт много сюрпризов. Сможете ли вы подвесить молоток так, как это показано на фото со стр. 7? Кажется, он висит в воздухе, ни на что ни опираясь... Попробуйте!

А знаете ли вы, что иногда в задачах содержатся лишние условия, без которых задача и так решается, причём даже ещё проще? Вот уж действительно, меньше знаешь – крепче спишь.

Конечно, очень интересно разбираться в устройстве разнообразных приборов, но ещё интереснее самому изобретать, применяя имеющиеся знания и просто смекалку, фантазию. Согласны? Тогда новая рубрика «Давайте изобретать» – для вас.

А так ли хорошо знаком вам закон Архимеда? Его полезно понимать каждому, а некоторым, например, подводникам, не знать этот закон до тонкостей просто опасно для жизни!

На центральном развороте мы поместили несколько удивительных фотографий микромира – даже обычные песчинки при 100-кратном увеличении выглядят как фантастические узоры.

Любителям поломать голову над задачками мы приготовили несколько головоломок с экзотическими названиями, выборку из заданий районного тура Санкт-Петербургской олимпиады по математике, дюжину задач о среднем арифметическом. А ещё мы начинаем очередной конкурс. Приглашаем участвовать всех желающих!

Открылась рубрика «Нам пишут», а потому мы надеемся, что вы завалите нас своими письмами – с решениями задач, вопросами, предложениями, отзывами, интересными историями... Но это потом, а сначала стоит прочитать номер!

Художник Yustas-07

Почтовый адрес: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик».

Подписной индекс: 84252

www.kvantik.com

@ kvantik@mccme.ru

kvantik12.livejournal.com

vk.com/kvantik12

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакция: Александр Бердников, Алексей Воропаев, Дарья Кожемякина, Андрей Меньщиков, Григорий Фельдман
Главный художник: Yustas-07
Верстка: Ира Гумерова, Рая Шагеева
Обложка: художник Yustas-07
Формат 84х108/16. Издательство МЦНМО

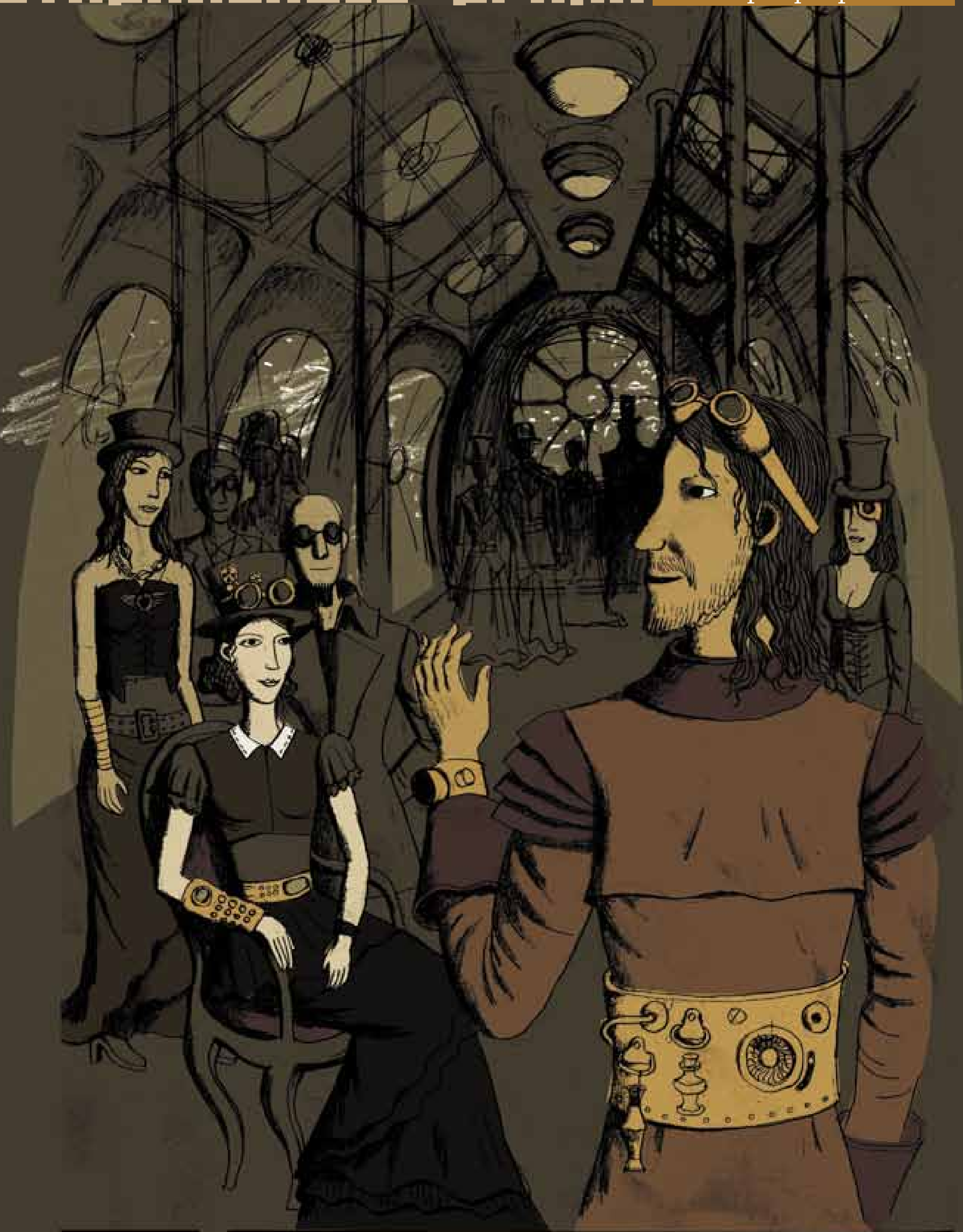
Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 1-й завод 500 экз.
Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83. e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85; e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО "ИПК Парето-Принт", г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

СТАБИЛЬНЫЕ БРАКИ

Виктор Уфнаровский



ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Впервые опубликовано
в журнале «Квант», № 3 за 2009 г.

– Сегодня стартовал наш долгий космический полёт, – так начал свою речь капитан первого межзвездного корабля «Земля – Андромеда». – Нас здесь, как вы знаете, 50 мужчин и 50 женщин, а лететь нам 50 лет. Так что всем следует завести семьи. Каждый из вас не женат и должен вступить в брак здесь: таково было условие приёма в экспедиционный корпус.

– Мы помним, и многие из нас будут рады жениться уже сегодня. Мы знаем друг друга не меньше года.

– Хорошо. Но я думаю, что жениться должны все, причем так, чтобы на этом корабле не было никаких супружеских измен.

Все рассмеялись от души.

– Капитан, вы идеалист, – сказал кто-то.

– Я вполне реалистичен, – улыбнулся капитан. – Это невозможно на Земле, но мы вполне можем осуществить это здесь.

– Как это? – Все продолжали смеяться.

– Могу я спросить, – капитан был несгибаем, – почему это женатый мужчина A изменяет своей жене с замужней леди O?

– Что же здесь непонятного, капитан? Потому что они нравятся друг другу больше, чем их собственные супруги.

– И A запросто находит красотку O, которая предпочтет его собственному мужу?

– Проще некуда! – Некоторые уже просто покатывались от хохота.

– Но это на Земле! – Капитан строго посмотрел на команду, и смех сам собой пропал. – А я намерен женить нас так, чтобы никакому мужчине A не удалось найти такую женщину O, которая бы нравилась ему больше собственной жены и которая предпочла бы его собственному супругу.

– Вы имеете в виду, капитан, что каждой такой женщине, которая нравится A больше, чем его половина, сам A не нравится? По крайней мере не больше собственного мужа.

– Именно. И наоборот, A предпочитает свою жену всем тем, которые с радостью сменили бы своих партнеров на него.

– Хорошая идея, капитан! Если вам это удастся, вы решите вековую проблему стабильности в браке. Но нам всё равно кажется, что это невозможно.

– Но могу я попробовать? – спросил капитан вкрадчиво.

– Отчего же нет, это будет забавно!

– Прекрасно! Тогда начнём немедленно. Сегодня каждый мужчина должен выбрать ту женщину, которая ему нравится больше всех, и написать ей письмо: попросить её руки.

– Но тогда все выберут Диану. – Диана Браун была признанной красавицей. Многие были влюблены в неё, но мало кто надеялся стать её мужем.

– Во-первых, не все. Например, не я. Кроме того, это не играет никакой роли. Вы должны посвататься, даже если у вас нет никакого шанса. Выберите ту женщину, о которой мечтаете. Однако это – только начало. Мы продолжим завтра. А сейчас вы должны написать своё первое письмо. И не думайте о возможном отказе. Только выберите самую желанную женщину. И помните: это – приказ. Каждый должен выбрать и посвататься!

Не многие из мужчин смогли уснуть в эту ночь. Выбрать женщину своей мечты. Не так-то это просто! К тому же она может и отказать. Пожалуй, хорошо, что это был приказ, многие иначе и не осмелились бы посвататься. И многие выбрали Диану.

Капитану тоже не спалось. Мэри, в которую он тайно был влюблён, давно уже предпочитала другого.

– Но я должен написать Мэри, – тяжело вздохнул капитан и начал своё письмо.

На следующее утро после завтрака все собрались в зале. Многие женщины были тихи и печальны.

– Вижу, далеко не все получили письма, – заметил капитан. Несколько вздохов были ему ответом. – А кто-то получил больше одного письма. – Некоторые женщины радостно кивнули. Краем глаза он увидел, что и Мэри кивнула тоже. – Теперь ваш черёд выбирать! Каждая женщина, которая получила больше одного письма, должна выбрать только одного мужчину.

– И выйти за него замуж?

– Нет, этого я не говорил. Но вот что вы должны сделать – так это ответить всем остальным, что вы никогда не сможете выйти за них. Я думаю, это естественно. Они должны знать, что есть кто-то, кто вам нравится больше.

– Только это?

– Только это. И ждать завтрашнего дня.

– Тогда Диане придется писать много писем! – пошутил кто-то в зале. Но самой ей, похоже, было не до шуток.

– А можно, я всем отвечу? – спросила она. «Видать, не получила она того письма, которого ждала», – подумал капитан, а вслух сказал:

– Нет, ты должна ответить всем, кроме лучшего из них. Это только начало. Мы всего лишь отметаем заведомо нестабильные браки, – попытался он утешить красавицу. Только в последнюю секунду он осмелился поднять взгляд на Мэри. Она сочувственно улыбнулась ему, и он понял, что завтра получит от неё письмо.

Мало кому удалось легко уснуть и в эту ночь. Женщины, которым было из чего выбирать, размышляли. Те, кому вообще выбирать было не из чего, плакали. А мужчины... Мужчины ждали и тоже не могли уснуть.

На следующее утро больше половины из них получили письма, и большую часть – от Дианы. Письма были вежливые, но безнадёжные. Капитан также получил своё письмо от Мэри. После завтрака все собрались, и капитан сказал:

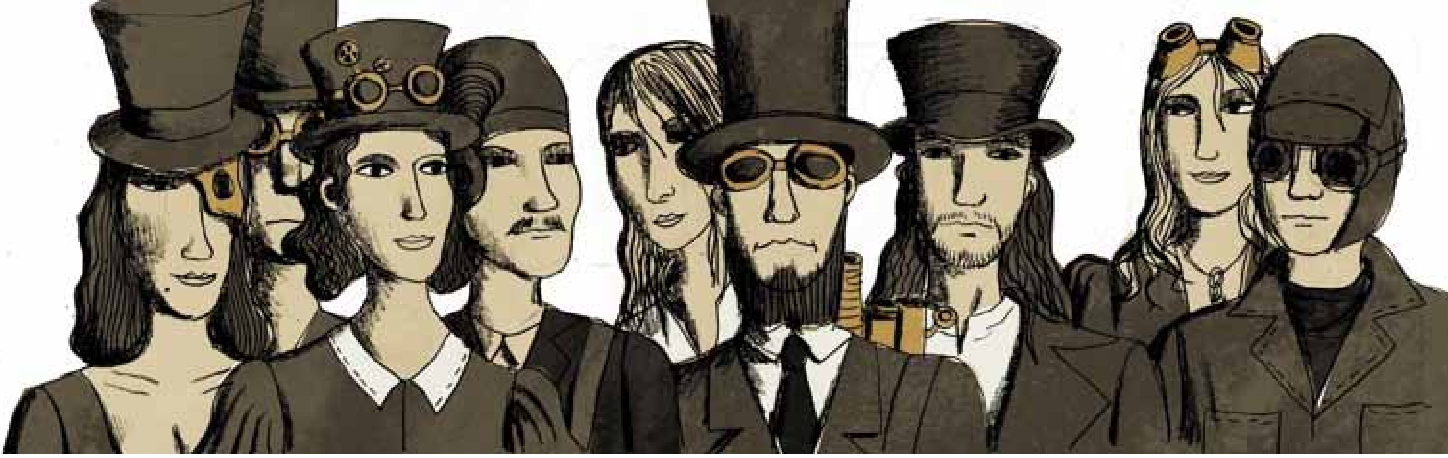
– Сегодня многие из нас получили письмо. Это означает, что мы, – капитан бросил печальный взгляд на Мэри, – не имеем никаких шансов на стабильный брак с нашими избранницами. И я считаю, что лучше узнать это сейчас, чем после женитьбы.

– Вы правы, капитан! – большинство были согласны.

– А вы знаете, что нам делать теперь?

– Нет, не знаем.

– Во-первых, забыть эту женщину. Вы никогда не женитесь на ней. Во-вторых, выбрать самую лучшую женщину из оставшихся и посвататься к ней!



– Значит, мы можем получить новое письмо? – спросили женщины с радостью в голосе.

– Да. И, может быть, не одно.

– И те, что уже получили письма, тоже могут?

– Конечно! С одним лишь исключением: вы не получите писем от тех, кому отказали. Но вряд ли вам нужны эти письма.

– Капитан, вы умнее, чем мы думали!

Новые надежды – новые радости. Женщины оживились.

– А если мужчине не отказали, значит ли это, что он уже может заказывать кольца? – спросил довольный молодой человек. Многие подозревали, что он был единственным, кто написал Диане и не получил никакого письма в ответ.

– Нет, этого капитан не имел в виду. Ты просто имеешь хороший шанс, но надо ещё подождать, – ответила Диана ко всеобщему изумлению.

– Совершенно верно, – подтвердил капитан. – Но если хочешь, ты можешь написать той же женщине.

– Я так и сделаю!

Новый выбор – новая надежда. Но на этот раз многие спали хорошо. Только некоторые из тех, кто получил отказ, не могли уснуть. Среди них был и капитан.

– И зачем я это начал? – спрашивал он себя. – Сам же убил свою надежду... Однако в любом случае я должен выбрать новую женщину. И получить ещё одно письмо. Потому что я должен быть честным: Диана – лучше всех, если я должен позабыть про Мэри. – И он написал и отослал письмо Диане.

На следующее утро большинство женщин были веселы, а Диана просто светилась от радости.

«Наверное, она получила то письмо, на которое надеялась», – подумал капитан, а вслух сказал:

– Девушки, те, кто получил больше одного письма, знают, что надо делать?

– Выбрать лучшего и ответить остальным.

– Умницы!

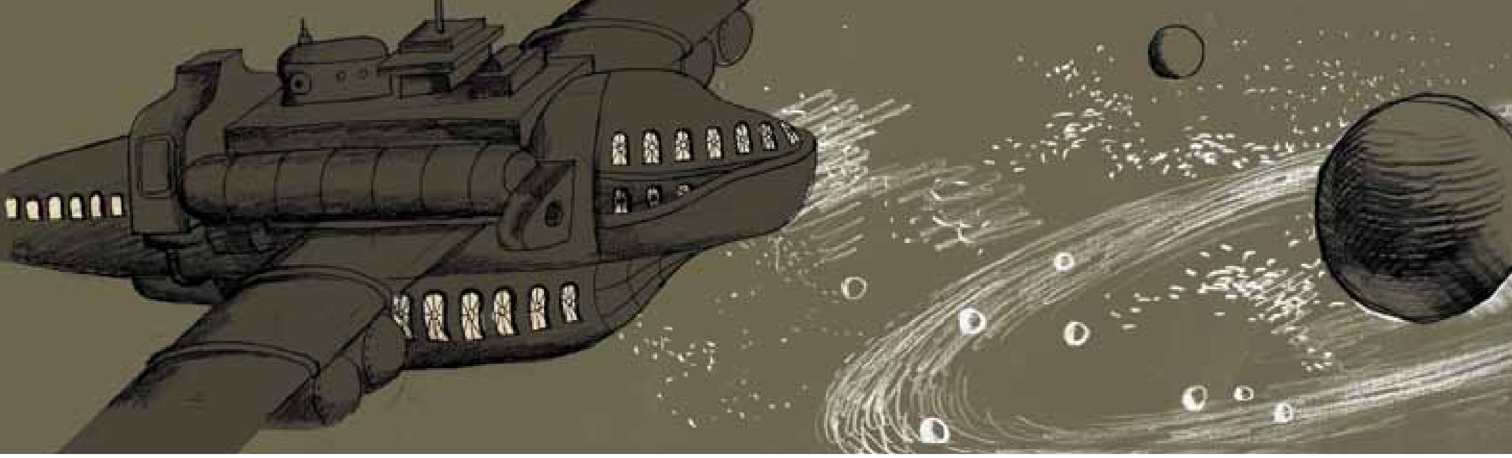
– Но, капитан, как долго мы будем писать и выбирать?

– До тех пор, пока каждая из вас не получит хотя бы одно письмо. И тогда лучшее письмо будет от вашего будущего мужа. И это будет стабильный брак. Подумайте, почему.

– Капитан, – сказала Мэри,– кажется, я поняла, наконец, твою идею. Ты имеешь в виду, что мы, женщины, не будем неверны мужьям по той простой причине, что те, с кем мы могли бы это, возможно, сделать, не любят нас: они не прислали нам письма, у них есть кто-то лучше. А если ни одна женщина не будет неверна, то не будет и неверных мужей.

– Прекрасное рассуждение!

– Можно спросить? – сказала Диана. – Означает ли это, что я буду замужем за тем единственным человеком, которого люблю, если он уже написал мне?



– Ты можешь быть уверена в этом! Всем остальным ты всё равно откажешь.

– Зачем же мне тогда ждать?

– Только для того, чтобы все остальные тоже получили своё письмо.

– Но могу я уже сейчас сказать моему будущему спутнику жизни, что я выбрала его до конца своих дней?

– Я думаю, ты должна это сказать и другим: они не будут тогда к тебе свататься и найдут свою пару быстрее.

– Тогда не хочу я больше писать никаких писем! – сказала Диана и нежно поцеловала оторопевшего капитана.

***

Хочется верить, что читатель понял ту математическую проблему, которая лежит в основе этой сказки. Мы надеемся, читатель согласится, что это – красивое решение, и спросит себя: как его можно использовать? И как решать похожие проблемы? Например, что будет, если женщин больше, чем мужчин, или если есть мужчины, которые скорее умрут, чем женятся? А если женщины будут писать первыми, будет ли решение тем же самым?

Если же читатель задумается: «Правда ли это? Могу ли я, например, доказать, что все найдут себе супруга?» – значит, он начал думать как математик.

А тогда несколько задач должны быть приятным дополнением к сказке.

1. Сформулируйте задачу строго математически. Это может оказаться сложнее, чем ожидалось. Не отступайте! Начните так: даны две квадратные таблицы размером $n \times n$. В каждой строке каждой из таблиц стоят все числа от 1 до n в каком-то порядке...

2. Напишите чёткий алгоритм, который соответствует решению в сказке, и покажите, что он всегда работает.

3. Покажите, что бывают случаи, когда задача имеет несколько решений.

4. Предположим теперь, что таблицы бесконечные, занумерованы натуральными числами и что в каждой строке есть все натуральные числа. Можно ли тогда доказать существование решения, если предполагать, что в каждой строке кандидаты расположены в порядке убывания предпочтения (в частности, на первом месте каждой строки стоит номер самого лучшего кандидата)?

5. А если порядок противоположный?

6. Рассмотрите ещё и такой алгоритм для исходной (конечной) задачи. Разрешим разводы. Выстроим всех мужчин в очередь. Первый в очереди сватается ко всем женщинам по очереди в порядке своего предпочтения (независимо от того, замужем очередная кандидатура или нет) до тех пор, пока кто-то не согласится. Они женятся, и если женщина была замужем, то она сначала разводится, а её бывший супруг становится в конец очереди. Верно ли, что:

а) такая женщина всегда найдётся;

б) процесс закончится;

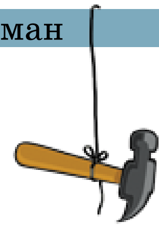
в) получившиеся браки будут стабильными?

г) Годится ли такой подход для бесконечных случаев?

Художник Артём Костюкевич

Григорий Фельдман

НЕВЕРОЯТНЫЙ МОЛОТОК



ЧТО ЭТО?

ФОКУС?

ФОТОШОП?

НАНОТЕХНОЛОГИИ?

МАГИЯ?

ЗАМЕДЛЕННАЯ СЪЁМКА?

Удивительно, но на фотографии нет обмана! Мы собрали эту конструкцию из самых обычных подручных предметов и сфотографировали обычным фотоаппаратом. Попробуйте понять, почему всё это не разваливается. В следующем выпуске мы расскажем правильный ответ.

Вы можете самостоятельно сделать подобное сооружение. Если вы сконструируете что-то своё, любопытное, присылайте фото и описание. Лучшие работы будут опубликованы!

Художник Сергей Чуб, фото Дарья Котова

Александр Шень

Дюжина задач
о среднем арифметическом

Если девяти школьникам дать сто конфет, то хотя бы один из них получит 12 конфет или больше.

Почему? Рассуждаем «от противного». Если это не так, то каждый из 9 школьников получил 11 конфет или меньше. Тогда всего они получили не более $9 \cdot 11 = 99$ конфет, а не 100. Противоречие – значит, так быть не может.

По существу то же самое рассуждение можно изложить иначе. Если 9 школьников получили 100 конфет, то в среднем на каждого школьника пришлось по $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$ конфет, и потому хотя бы один должен был получить больше 11 конфет.

Что означают здесь слова «в среднем»? Речь идёт о *среднем арифметическом*. Среднее арифметическое двух чисел a и b равно их полусумме $(a+b)/2$, среднее трех чисел a, b, c равно $(a+b+c)/3$, и так далее: среднее арифметическое n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно сумме всех чисел, деленной на их количество, т.е.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

В нашем примере $n = 9$ (девять школьников), a_1, $a_2, \ldots, a_9$ – количества конфет, полученных каждым из них, общее число конфет $a_1 + a_2 + \ldots + a_9$ равно 100, и среднее равно $\frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$.

Среднее арифметическое можно объяснить так: если мы хотим уравнять все числа, не меняя их суммы, то каждое из них надо заменить средним арифметическим.

Задачи

1. Найдите среднее арифметическое чисел

$$1, 2, 3, 4, \ldots, 19, 20.$$

2. Найдите среднее арифметическое чисел

$$-19, -18, -17, -16, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 19, 20.$$

3. Найдите среднее арифметическое всех целых чисел от 1 до 1000.

Впервые опубликовано в журнале «Квант», № 6 за 2008 г.

4. Когда в комнату вошёл четвёртый человек, средний возраст находящихся в ней людей увеличился с 11 лет до 14. Сколько лет вошедшему?

5. Среднее арифметическое чисел a и b делит пополам отрезок с концами a и b на числовой оси. Найдите координату точки, которая делит этот отрезок в отношении $3:5$.

6. Одного из школьников 7 «А» класса перевели в 7 «Б», отчего средний рост школьников в обоих классах (7 «А» и 7 «Б») увеличился. Могло ли так быть?

7. Желая найти среднюю годовую оценку по математике у всех семиклассников, завуч попросил учителей математики седьмых классов вычислить средние оценки в каждом из классов и потом взял среднее арифметическое этих оценок. Прав ли он?

8. Говорят, что средний доход 10% самых богатых жителей города в 15 раз превосходит средний доход всех жителей города. Докажите, что это выдумки.

9. В прямоугольной таблице из трёх строк и двух столбцов средние арифметические в трёх строках равны a, b, c, а среднее арифметическое в первом столбце равно d. Найдите среднее арифметическое всех чисел таблицы и среднее арифметическое во втором столбце.

10. Может ли среднее арифметическое каждого столбца прямоугольной таблицы быть положительным, а среднее арифметическое каждой строки – отрицательным?

11. Таблица умножения на обороте школьной тетради содержит все произведения однозначных чисел от 1 до 9 (всего 81: сначала 1 умножается на все числа от 1 до 9, потом 2 и т.д.). Найдите среднее арифметическое всех произведений в таблице.

12. В строчку написаны сто чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$, при этом $a_1 = 1$, $a_{100} = 100$ и каждое число в строчке (кроме двух крайних) не больше среднего арифметического двух соседей: $a_2 \leqslant (a_1 + a_3)/2$, $a_3 \leqslant (a_2 + a_4)/2$ и так далее. Докажите, что $a_{43} \leqslant 43$.

Художник Леонид Гамарц

Глеб Погудин

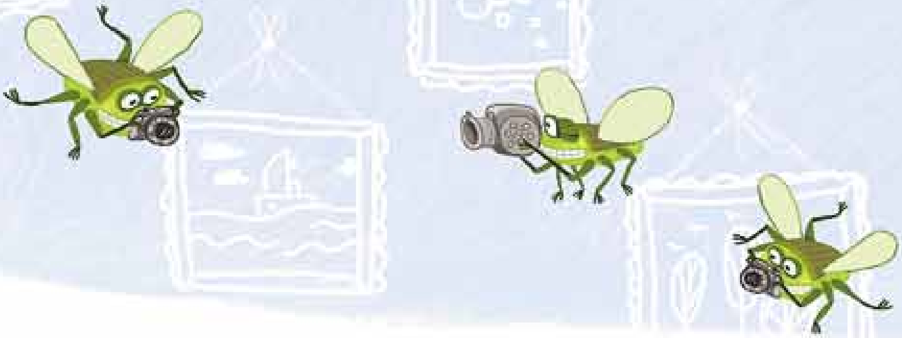
Первое изобретение дяди Юры

Талантливый мальчик Петя Торт решил стать изобретателем. Некоторые достижения на этом поприще у него уже имелись. Например, позавчера он из ручки и линейки соорудил «катапульту» и стрелял из неё ластиком в одноклассников. Но это всё было каким-то баловством – хотелось-то собрать суперсложного робота из полумиллиона частей. Прямо как в фантастических фильмах. Благо, было с кем обсудить свои мечты, ведь в соседней квартире жил изобретатель дядя Юра. Однажды Петя зашел к нему в гости и спросил:

– Дядя Юра, а расскажите, какое было ваше первое изобретение?

– Трудно сказать. Вот, помню, учился я в шестом классе, – начал свой рассказ, откинувшись в кресле, дядя Юра, – и мой отец, директор картинной галереи, жаловался за ужином на такую проблему. В галерее надо время от времени менять экспозицию – какие-то картины убирать в запасник, а вместо них другие из запасника выставлять. А для этого надо знать хотя бы примерно, какие экспонаты пользуются популярностью. Но не стоять же у каждой картины с блокнотом и ручкой. Да и посетителей иногда столько бывает, что сложно уследить, кого посчитал, кого нет.

– Ну, можно камеру поставить маленькую около каждой картины. А ещё лучше вообще на каждого посетителя жучок вешать. А потом компьютер будет вычислять, какой жучок около какой картины дольше всего находился – сразу начал придумывать Петя.



– Так ведь это сорок лет назад происходило, какие камеры, – возразил дядя Юра. – Да и сейчас вся эта машинерия недёшево обойдётся. А потом, её чинить надо, следить, чтобы не растащили. Понимаешь, далеко не всегда добавление к механизму новых частей его улучшает. Одно из основных правил изобретательства состоит в том, что лучший механизм – тот, которого нет.

– Это как? То есть нам нужны жучки, которых нет? Ерунда получается, – возмутился Петя.

– Многие великие открытия и изобретения поначалу ерундой казались. А ты лучше попробуй подумать ещё, как, ничего не усложняя, решить проблему моего отца.

– Ничего не усложнять, – скептически повторил Петя. – Ладно, пойду выгуливать Сэмми-Дэвис Наимладшую – подумаю.

– Кстати, эта задача мне напомнила другую, – сказал дядя Юра. – Не так давно во многих подъездах вместо современных домофонов стояли кодовые замки. Идёшь ты в гости, а код забыл. Приходится ждать, пока кто-нибудь зайдёт или выйдет. А по вечерам, да на холоде, ждать не хочется. И вот мне однажды рассказали, как код у замка угадывать. Можешь ещё и над этим поразмышлять, пока с собакой гуляешь.

Попробуйте и вы ответить на вопросы дяди Юры. Ответы – в конце журнала.

Художник Инна Капустенко

Игорь Акулич

Меньше знаешь – крепче спишь

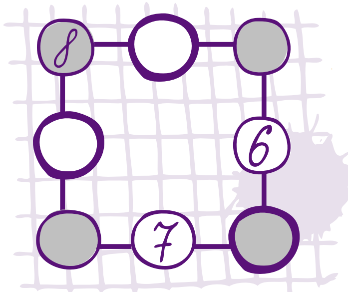
– Сударь, – сказал Планше, – надо вам знать… хотя, в сущности, вам, пожалуй, этого и знать не надо.

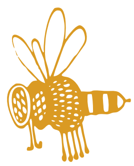
А. Дюма.
Двадцать лет спустя.
Часть I, глава VII.

Международный математический конкурс «Кенгуру» проводится не один десяток лет, вызывает большой интерес у школьников и пользуется заслуженной популярностью. Его главная особенность – отсутствие намеренно заковыристых, специфических задач, одолеть которые способны, как правило, лишь специально обученные «олимпиадники». Иначе говоря, «Кенгуру» – массовый конкурс, проводимый под лозунгом «Математика для всех», в чём его несомненное достоинство[1].

Одно из заданий для 3-4 классов за 2011 год послужило основой для такой задачи:

8 кружочков (4 белых и 4 серых) расположены в виде квадрата. В них вписаны числа от 1 до 8 (в каждый кружочек – по одному числу) так, что на каждой стороне квадрата сумма чисел равна 13. При этом расположение трёх чисел уже указано:





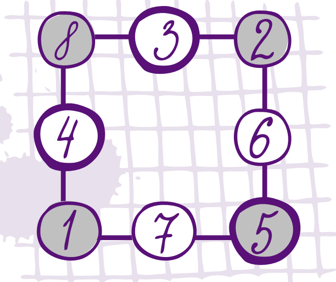
Чему равна сумма чисел в серых кружочках?

Для пробы я предложил эту задачу своему соседу – семикласснику Олегу. Справедливость требует отметить, что он её одолел и даже сумел подробно разъяснить своё решение, суть которого можно пересказать так:

– Сначала я пробовал действовать подбором, но потом понял, что это слишком долго и какие-то решения могу просто пропустить. Долго думал, как быть, пока не задался вопросом: а куда можно поставить пятёрку? Она не может быть в одной горизонтали с восьмёркой, потому что $5+8=13$, и если в третий кружочек той же горизонтали поставить любое оставшееся чис-

[1] Подробности о конкурсе можно посмотреть на сайте mathkang.ru.

ло, то сумма будет явно больше 13. По той же причине пятёрка не может лежать и в одной вертикали с восьмёркой. Что же остается? Только три кружочка, но в двух из них уже поставлены числа 6 и 7. Поэтому число 5 может занимать единственное место: в правом нижнем кружочке. Ну, а после этого числа в остальных кружочках определяются без труда, исходя из того, что сумма чисел по всем сторонам квадрата равна 13. Например, в левом нижнем кружочке должно быть число $13 - (7 + 5) = 1$, в правом верхнем $13 - (6 + 5) = 2$, и так далее. Вот какое получается итоговое расположение:



Ну а сумма чисел в серых кружочках равна

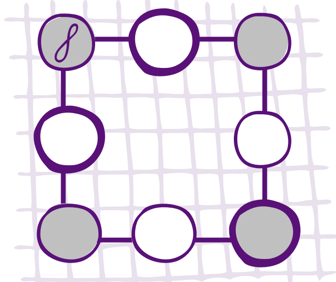
$$8 + 2 + 1 + 5 = 16.$$

– Умница! – похвалил я его. – Не осрамил честь семиклассника перед третьим и даже четвёртым классом!

– Но, – многозначительно добавил Олег, – я обнаружил в условии *лишние данные*!

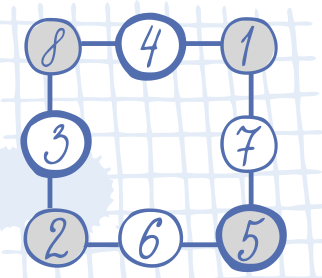
– Это какие? – удивился я.

– Шестёрка и семёрка! Оказывается, достаточно указать расположение только восьмёрки, то есть исходная картинка могла выглядеть так:



– Ну-ка, поясни.

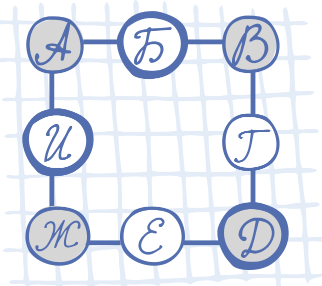
– Я подумал: если для пятёрки допустимы только три кружочка, то это тем более верно для шестёрки и семёрки! Значит, эти три числа должны лежать в тех же трёх «разрешённых» кружочках, но вот вопрос: обязательно ли в том же порядке? Сразу видно, что шестёрка и семёрка не могут находиться на одной горизонтали – ведь $6+7=13$, и сумма их с третьим числом той же горизонтали превысит 13. Точно так же они не могут быть в одной вертикали. Значит, в правом нижнем углу – непременно пятёрка, а шестёрка и семёрка расположены либо как в условии исходной задачи, либо симметрично относительно диагонали. Потому итоговое расположение чисел – либо то, которое я нашёл, либо симметричное ему – вот такое:



Но нас-то интересует не расположение чисел, а только сумма тех из них, что находятся в серых кружочках. Эти цифры – те же самые, так что и сумма их останется неизменной – 16.

Что тут сказать? Молодец парень! Однако он был весьма удивлен, когда узнал, что и единственная восьмёрка тоже является *лишними данными*! Иначе говоря, можно было вообще не указывать *ни одного* числа в кружочках. Более того – решение при этом ещё и упрощается.

Итак, пусть не указано положение ни одного из чисел. Обозначим их значения (пока неизвестные) буквами от А до И, как на рисунке:



Тогда, согласно условию, выполняются четыре равенства:

$$
\begin{aligned}
&А+Б+В=13,\\
&В+Г+Д=13,\\
&Д+Е+Ж=13,\\
&Ж+И+А=13.
\end{aligned}
$$

Давайте их сложим. В правой части будет, понятное дело, число $13 \cdot 4 = 52$. А в левой? Там окажется сумма значений всех букв, причём некоторые из них встретятся один раз, а другие дважды. Поэтому для удобства представим суммарное выражение в таком виде (убедитесь в его справедливости!):

$$(А+Б+В+Г+Д+Е+Ж+И)+(А+В+Д+Ж)=52.$$

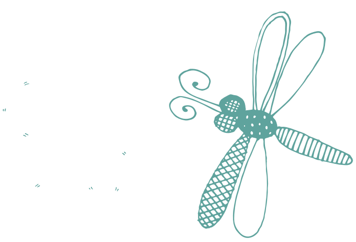
Заметим, что в первых скобках находится сумма всех имеющихся чисел (правда, неясно, в каком порядке, но от перестановки слагаемых сумма не меняется). Поэтому она равна $1+2+\ldots+8=36$. Таким образом, получаем:

$$36+(А+В+Д+Ж)=52$$

и потому $А+В+Д+Ж=52-36=16$. Но $А+В+Д+Ж$ – это и есть сумма чисел в серых кружочках. Так что она равна 16 в любом случае.

Как видим, отсутствие данных избавило нас от необходимости выполнять какой бы то ни было перебор. Более того – не требуется даже выяснять, можно ли вообще расставить числа в кружочках в соответствии с требованиями условия. Так что в некоторых случаях, действительно, меньше знаешь – лучше решаешь. И, соответственно, крепче спишь, почивая на лаврах.

P.S. Хотя задача успешно решена, остался непроясненным вопрос: а существуют ли иные расположения в кружочках чисел от 1 до 8, дающие сумму 13 по каждой стороне квадрата, отличные от найденного Олегом (решения, переходящие друг в друга с помощью поворотов и отражений, считаем одинаковыми)? И если да, то сколько их?



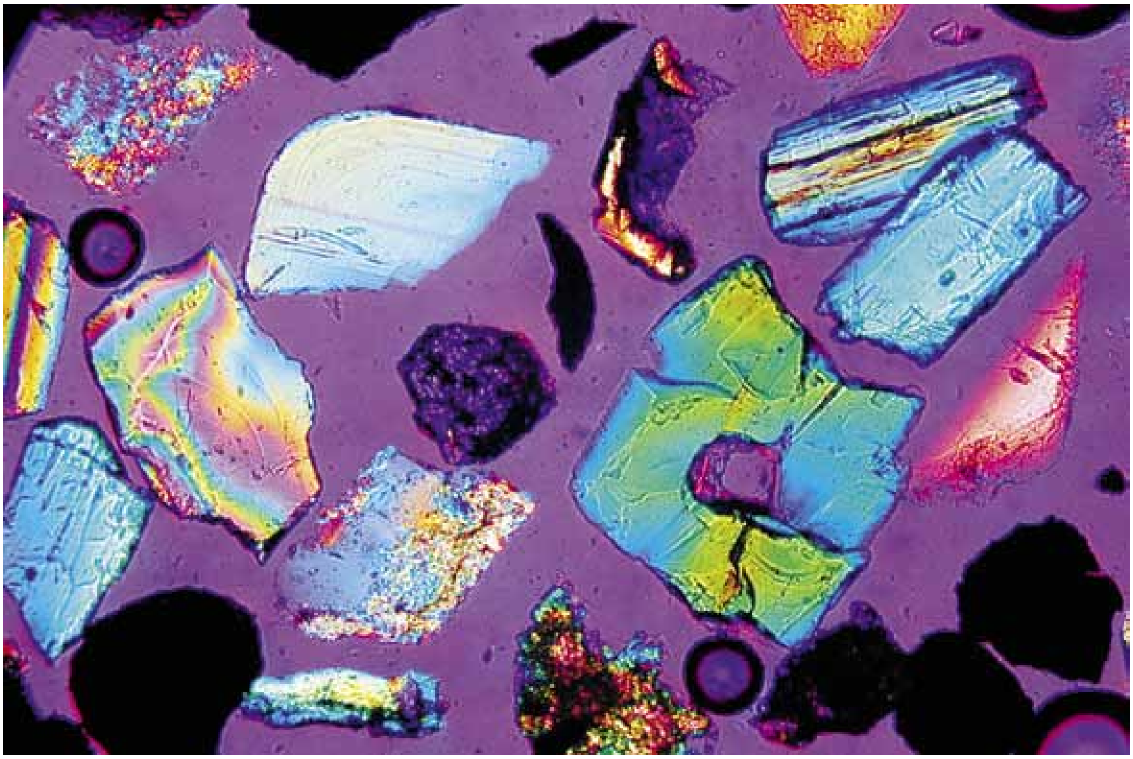
Художник Татьяна Ахметгалиева

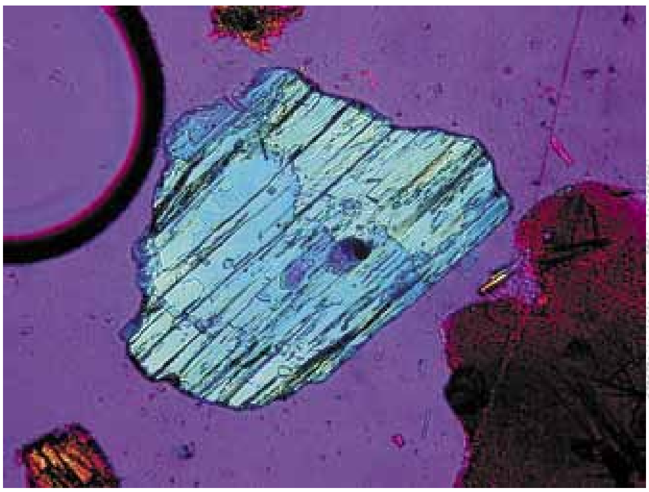
МИКРОМИР

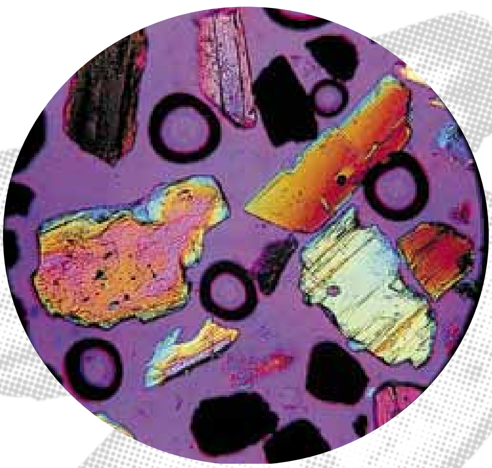
Материалы предоставлены
нанотехнологическим сообществом «Нанометр»
www.nanometer.ru

ОБЫКНОВЕННОЕ ЧУДО

Евгений Подольский







Песчинки в микроскопе. 100-кратное увеличение.
Фотография сделана с применением поляризационного фильтра.

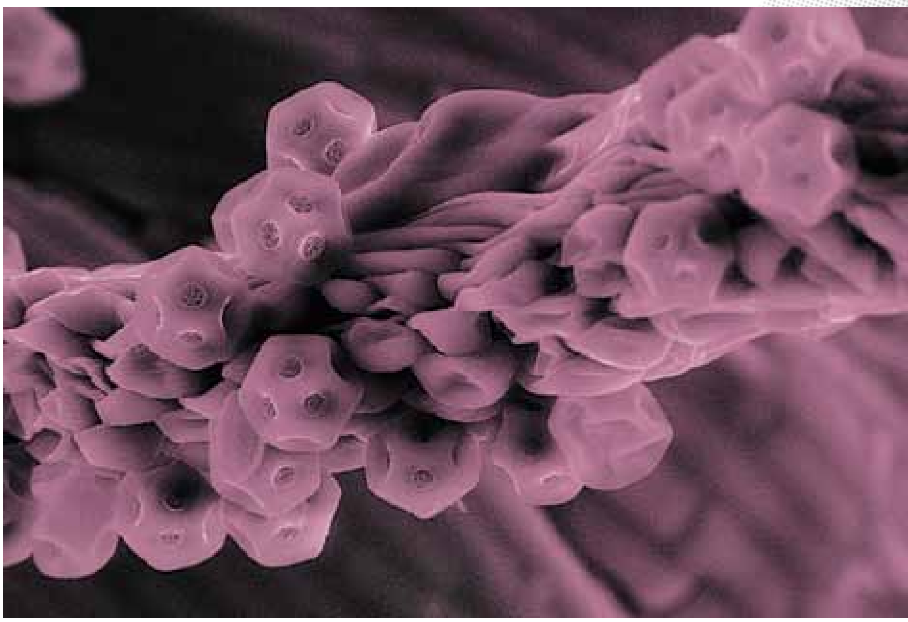
ЗВЁЗДНОЕ НАШЕСТВИЕ

Ольга Малиновская

Поверхность пестика цветка в электронном микроскопе. 1000-кратное увеличение.

СТРАННЫЕ ЛИЦА МИКРОМИРА

Ольга Малиновская



Пыльца мокричника[1] в электронном микроскопе. 1150-кратное увеличение.

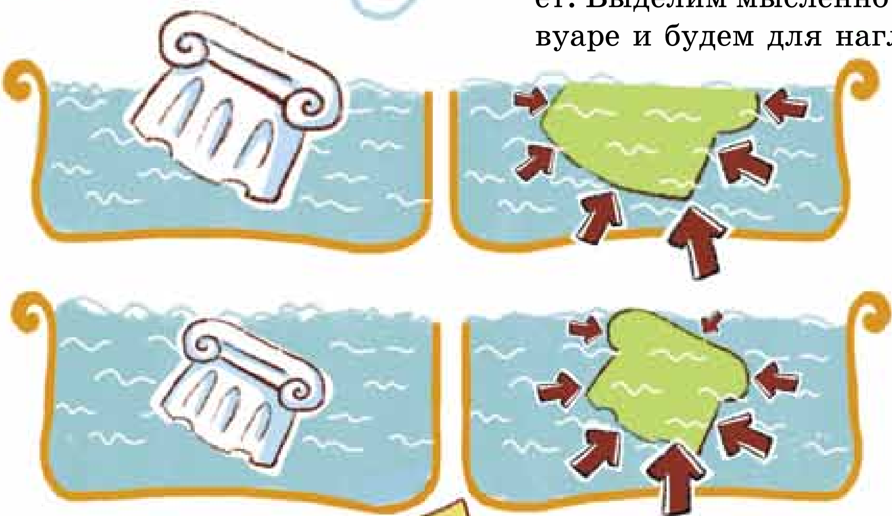
[1] Мокричник – однолетнее травянистое растение.

Александр Бердников

Подводные камни закона Архимеда

Обычно закон Архимеда формулируют так: *на тело, погружённое в жидкость* (*или газ*), *действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости* (*или газа*).

Полезно разобраться, откуда эта сила возникает. Выделим мысленно часть воды в спокойном резервуаре и будем для наглядности рисовать её зелёной.



Раз никаких течений нет, зелёная вода ни тонуть, ни всплывать не будет. Что же удерживает зелёную воду на плаву, почему она не проваливается? На неё со всех сторон давит остальная вода: сверху слабее, а снизу, на большей глубине, сильнее (это давление легко «увидеть», засунув руку в прозрачном пакете в кастрюлю, полную воды; главное, чтобы вода внутрь пакета не попадала). В результате все эти силы как раз компенсируют вес зелёной воды, оставляя её неподвижной. Заменим теперь эту воду на плавающее неподвижно тело. Окружающая вода будет точно так же давить на него, толкая вверх с силой, равной весу нашей зелёной воды, а это и есть вытесненная телом вода! Вот и получился закон Архимеда.

А теперь опровергнем его! Нальём в стакан растительное масло, а потом – воду (см. рисунок). Посмотрим на это с такой точки зрения: некое тело (вода) погружается в жидкость (масло). Вода вытеснит масло и опустится вниз, а значит, по закону Архимеда, на воду будет действовать выталкивающая сила и вода станет легче. Но как же так? На фотографии видно, что масло только и может, что давить на воду сверху. Это точно не уменьшит вес воды. Где-то в наших рассуждениях была ошибка?

Нет, просто мы предполагали, что погружённое тело ни с чем кроме окружающей жидкости не сопри-

касается. Если это не так, то становится непонятно, с какой силой остальные предметы – в нашем случае стенки и дно стакана – давят на объект.

С этим связана серьёзная опасность для подводных лодок. Если она опустится в вязкий ил, то, в точности как в нашем эксперименте со стаканом, окружающее давление жидкости перестанет выталкивать лодку вверх силой Архимеда, а начнёт придавливать вниз. Ведь теперь вода не давит на лодку снизу. И для того, чтобы лодка перестала быть придавлена ко дну с чудовищной силой океанской толщи, необходимо как-то заставить часть воды просочиться под дно лодки. Тогда при попытке открепиться от дна удерживавшее лодку давление ила снизу заменится давлением подтёкшей воды, «включая» обратно закон Архимеда. А если вода под лодку не подтечёт, при попытке всплыть давление вязкого малоподвижного ила просто уменьшится (ил не последует за лодкой), позволяя воде придавить лодку вниз. Таким же образом работает самая обычная присоска, которую удерживает в прикреплённом состоянии давление окружающего воздуха.

Всё это – отличные примеры того, что закон недостаточно знать наизусть. Бездумное его применение могло стоить нашим подводникам жизни, ведь они бы не подозревали о поджидающей их опасности, слепо полагаясь на безотказную архимедову силу. Поэтому нужно ясно себе представлять причины и механизм действия этого закона, чтобы не допускать такого рода ошибок.

Художник Анастасия Васильева

Владимир Красноухов

Чичен-Ица, Эйяфьядлайёкюдль и другие ГОЛОВОЛОМКИ на складывание симметричных фигур

Как правило, когда нам нужна подсказка в решении задачки, то приходится спрашивать знакомых и учителей, искать что-то в интернете... А бывает, что подсказка скрывается в названии задачи!

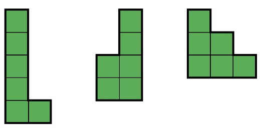
Ниже приведены три задачи-головоломки. В каждой из них даны несколько фигурок; нужно *собрать из них всех* ***симметричную*** *фигурку*. Фигурка в ответе может быть как центрально симметричной, так и иметь ось симметрии. Казалось бы, если не требуется ничего, кроме симметричности, то вариантов должно быть множество; но, как ни странно, это не так. Понять, какой формы должна быть фигурка в ответе, непросто. И вот тут обратите внимание на название головоломки!

При решении предлагаемых задач элементы можно как угодно перемещать, поворачивать и переворачивать, но *нельзя накладывать друг на друга*.

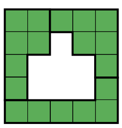
Чтобы решать головоломки было интереснее, советуем аккуратно изготовить их из любого доступного вам материала (фанеры, дощечки, оргстекла, плотного плохо гнущегося картона).

ВРЕМЕНА ГОДА

Головоломка «Времена года» состоит из трёх элементов гексамино (каждый элемент составлен из шести элементарных квадратов):



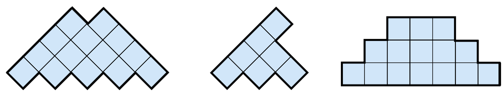
А вот пример симметричной фигуры, которую можно собрать из этих элементов:



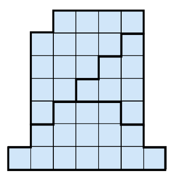
Кроме приведённой фигуры, головоломка имеет ещё два решения. Найдите их самостоятельно. Одно из этих решений напоминает о зиме, а второе о лете!

ЧИЧЕ́Н-ИЦА́

Головоломка состоит из трёх элементов, состоящих из 14, 7 и 15 одинаковых квадратиков соответственно.



Вот одна из попыток сложить нечто симметричное:



Полученная «шляпа» почти симметрична, но при всей элегантности такое решение не засчитывается из-за вмятины в верхней части. Но головоломка имеет два различных корректных решения, и ваша задача – найти оба варианта.

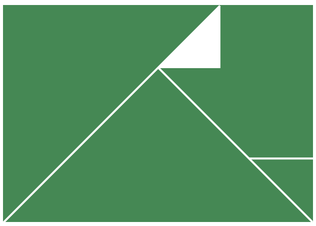
Чиче́н-Ица́ – политический и культурный центр майя на севере полуострова Юкатан (Мексика). Одной из главных его достопримечательностей является храм Кукулькана (на фото) – 9-ступенчатая пирамида высотой 24 метра с широкими лестницами на каждой из сторон.

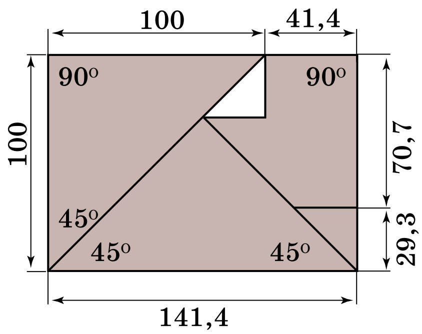
На фото вулкан на леднике Эйяфьядлайёкюдль, ставший известным после своего извержения в 2010 году.

Исландская певица Элиза Гейрсдоттир Ньюман сочинила песенку, помогающую выучить слово «Эйяфьядлайёкюдль». Кстати, русская транслитерация является неточной и любые попытки её прочитать не будут похожи на произношение названия Eyjafjallajökull на исландском.

ЭЙЯФЬЯДЛАЙЁКЮДЛЬ

Даны четыре элемента, чертёж которых приведён ниже. Составьте из этих элементов симметричную фигуру. Известно два различных решения. Обязательно найдите оба решения, и тогда станет понятно, почему головоломка имеет такое название.





Кстати, это одна из головоломок, которые были предложены финалистам XV чемпионата России по пазлспорту (2012 г.). На её решение отводилось 10 минут. В течение первых 5 минут с задачей справились 10% участников. После этого была сделана подсказка – объявлено название головоломки «Eyjafjallajökull». После этого головоломку решили практически все участники, уложившись в отведённое по регламенту время.

Словечки

выпуск 7

Сергей Федин

Математика — мама и тетка

Под Новый Год я сел писать своим друзьям и приятелям новогодние открытки. Поначалу всё шло как по маслу, пока очередь не дошла до знакомого художника Сергея Орлова. Тут дело застопорилось – зная, что он ас всяческих выкрутасов с буквами, я никак не мог придумать, какое хитрое послание ему отправить, чтобы удивить его. Поэтому кроме дурацкого слова ПОСЛАНИЕ мне ничего не лезло в голову. Взяв разноцветные ручки, я стал от нечего делать раскрашивать буквы в этом слове. И вдруг… о, чудо! Злополучное слово само собой распалось на два других:

ПОСЛАНИЕ

Видишь? *Послание: Поле, сани*… Здорово! И больше ничего не нужно! Я тут же отправил Сергею по электронной почте это раскрашенное слово без комментариев. И через полчаса получил в ответ вот такую картинку.

На ней отчетливо видны встроенные в «материнское» слово (кстати, не назвать ли такие слова-бутерброды встроями?) «послание» два других слова. Вот бы приклеивать такие необычные картинки-надписи на новогодние открытки или конверты!

Вдохновившись, я стал раскрашивать другие слова, пытаясь отыскать новые встрои. И очень скоро (не прошло и года 🙂) я нашёл еще одно «бутербродное» слово:

КОРЫСТЬ

Оказалось, в «корысти» коварно «прячутся» сразу два хищника. А ведь правда, соединение хитрого, хозяйственного (как Матроскин) кота и хищной безжалостной рыси в «жадном» слове «корысть» кажется вполне естественным…

И тогда я подумал, а не замахнуться ли мне на самое скучное для многих слово «математика». И вот что у меня получилось после раскрашивания буковок:

МАТЕМАТИКА!

Каким весёлым сразу стало это пугающее слово, каким неожиданным и притягивающим! Но на этом сюрпризы не закончились. Как будто в благодарность за маленький фейерверк, буквы открыли мне удивительную тайну этого слова. Посмотри: красные буквы образуют слово МАМА, синие – слово ТЁТКА, ну а зелёная буковка И – связывающий их союз. А все вместе складывается в забавную фразу: *Математика – мама и тётка*! А ведь действительно, для кого-то математика – мать родная (для меня, например), а для кого-то – тётка злая.

А вот как оформил эту (и последующие) находку Сергей Орлов:

Вот бы такую надпись на школьный учебник!

А эту красивую надпись вполне можно повесить на каком-нибудь храме, как завет христианам:

Христианину: храни Истину!

Ну и ещё несколько встроев в том же совместном исполнении.

Стадион – ад и стон!
Безделье – бед зелье.
Литература – Лета[1] *и траур.*

А на закуску еще два словесных «бутербродика». Первый придумал поэт Герман Лукомников:

КОМБИНЕЗОН

После «расшифровки» получается смешной, пусть и не очень понятный стишок:

Комбинезон. – Ко мне, бизон!

А этот придумал другой поэт, Борис Гринберг. Он уже не раскрашивал буквы, а вытягивал их. И вот что у него получилось:

КАЗАЧЕСТВО!

То есть (сначала читаются самые высокие буквы, потом – те, что пониже):

Казачество – за качество!

Вот теперь ты видишь, что можно расщеплять не только атом, но и слово. И пусть от расщепления словечек пользы для человечества, быть может, меньше, но зато для отдельных его представителей гораздо больше удовольствия. Надеюсь, среди них окажешься и ты.

[1] Лета – в греческой мифологии река забвения, протекающая в Аиде.

Художник Анастасия Мошина

Борис Дружинин

Новогодняя история

4«Б» класс участвовал в городской олимпиаде по математике. За 3 часа надо было всем вместе решить 11 задач. Разрешалось обсуждать, советоваться, выступать одной командой. Через два с половиной часа десять задач были успешно решены, осталась последняя.

«В огороде у Бабы Яги на двух грядках растут поганки. Как только Баба Яга срывает 4 поганки – вырастает ещё одна. На каждой грядке 2 ряда по 16 поганок. Сколько всего соберёт Баба Яга поганок с этих грядок?»

– Всё ясно, – воскликнул Вова. – Всего получается 64+16=80 поганок.

Ребята уже собирались записать ответ в чистовик, когда их остановил самый младший из них, Павлик Холодков. Его выслушали и поставили в ответе другое число.

КАКИМ ДОЛЖЕН БЫТЬ ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ?

Потом выяснилось, что 4«Б» занял первое место и получил в награду путёвки в лесной лагерь на зимние каникулы. Первые два дня ребята наслаждались всеми прелестями зимнего отдыха, и все жалели Гошу Курочкина, который слегка простудил горло. Из-за болезни он не выходил на улицу, а постоянно сидел в помещении, пил противные горькие лекарства и смотрел телевизор. И хотя показывали хорошие старые мультфильмы, снежные игры были куда веселее.

Прямо с утра 31 декабря началась подготовка к встрече Нового года. Сначала ребята украсили столовую. Потом девочки принялись расставлять на столах праздничные угощения, а ребята пошли на улицу украшать ёлку. Эта лесная красавица росла напротив окошек зала, где собирались встречать Новый год. Труднее всего было водрузить звезду на самую макушку, но, проявив смекалку, мальчишки с этой задачей справились. Девочки закончили свою работу и отправились помогать ребятам, потому что ёлка была большая, а уже начинало темнеть, и до начала торжеств оставалось совсем немного времени.

Наконец нарядная ёлка засверкала весёлыми огоньками, и дети вернулись в помещение. И что же они увидели? Главное украшение стола – торт – кто-то съел. Правда, не целиком, но то, что осталось, напоминало развалины храма Артемиды. Все замолчали.

– Ну и кто? – первым нарушил тишину Боря Ежов.

– Я знаю, кто съел торт, – выступила вперёд Машенька Смирнова. – Гоша Курочкин весь день дома сидел, вот он и не вытерпел.

– Ты это сама видела? – послышались голоса.

– Нет, нет, не видела, – забормотала Машенька, – но я так думаю.

– Конечно он, – заверил Паша Холодков.

– А ты откуда знаешь? – спросил Боря.

– Я сам видел, – продолжал настаивать Павлик.

– Как ты мог видеть? – удивился Вова. – Ты же с нами на улице ёлку наряжал.

– Я в окошко всё хорошо рассмотрел, – объяснил Павлик.

– Но окна замёрзли, – заметила Света. – Они все вон как инеем покрылись.

– Так я окошко варежкой протёр, – ответил Павлик.

– Всё ясно! – закончил обсуждение Боря и двинулся к Гоше. Все замерли. Боря уже два года занимался боксом, и если уж хотел кого наказать...

– Что-то меня смущает, – шепнул Вова на ухо Лизе. Та кивнула и отважно встала между Борей и Гошей.

– Я уверена, что Гоша ни в чём не виноват, – решительно сказала она. – Скорее всего, тортом полакомился...

Все с удивлением смотрели на Лизу. Как же, она осмелилась противиться силачу Боре, который и ребят-то редко слушал, а уж девчонок – никогда!

– Ну, продолжай, – потребовал Боря. – Кто же, по-твоему, мог съесть торт?

Лиза немного помолчала, собираясь с мыслями.

– Ты это сможешь определить сам.

ЧТО ПОСОВЕТОВАЛА ЛИЗА БОРЕ И КТО СЪЕЛ ТОРТ?

Неизвестно, чем бы всё закончилось, если бы на выручку не пришла добрая повариха тётя Клава. У неё на этот случай на кухне был припасён другой торт, лучше прежнего. Так что встреча Нового года прошла вкусно и весело.

Когда все уже расходились спать по своим комнатам, Боря остановил Лизу.

– Как ты догадалась про того, кто съел торт?

– В книжке прочитала. Ты только его не обижай, он такой маленький и слабенький. Спокойной ночи!

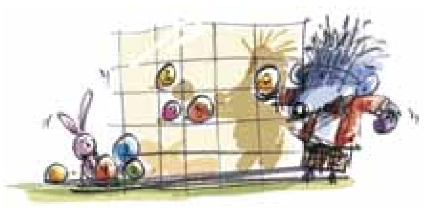
– Ладно, не обижу. Спокойной ночи! – ответил Боря и задумчиво побрёл спать. Засыпая, он бормотал: – Надо же, из книжки узнала. Надо и мне что-нибудь почитать.

Художник Евгения Константинова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА

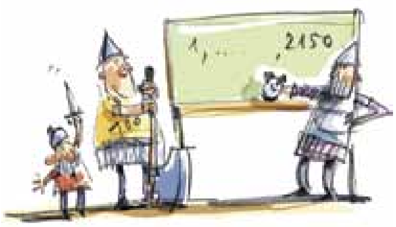
Составитель
Константин Кохась

Приводим подборку из нескольких задач районного тура Санкт-Петербургской олимпиады по математике (она состоялась 8 декабря 2012 года). В скобках после номера задачи указывается класс, в котором она предлагалась.



1. **(6)** В первую строку таблицы 5×5 вписывают числа от 1 до 5, во вторую строку – тоже числа от 1 до 5, в третью – числа от 3 до 7, в четвертую – тоже от 3 до 7, в пятую – от 4 до 8. Как следует вписывать числа, чтобы суммы чисел во всех столбцах таблицы оказались одинаковыми?

К.Кохась



2. **(6-8)** На доске выписаны числа от 1 до 2150. Каждую минуту каждое число подвергается следующей операции: если число делится на 100, то его делят на 100; если же не делится, то из него вычитают 1. Найдите наибольшее среди чисел на доске через 87 минут.

К.Кохась, Д.Максимов

3. **(6)** Гарри Поттер ведёт машину со скоростью 60 км/ч. Проезжая мимо ёлки, он мгновенно телепортируется до ближайшего по ходу движения дуба. В пунктах A и B, расстояние между которыми равно 120 км, растут дубы, а на дороге между ними растёт еще 10 дубов и ни одной ёлки. Докажите, что можно посадить на этой дороге 6 ёлок так, чтобы путь туда и обратно занимал у Поттера меньше 3 часов.

О.Иванова

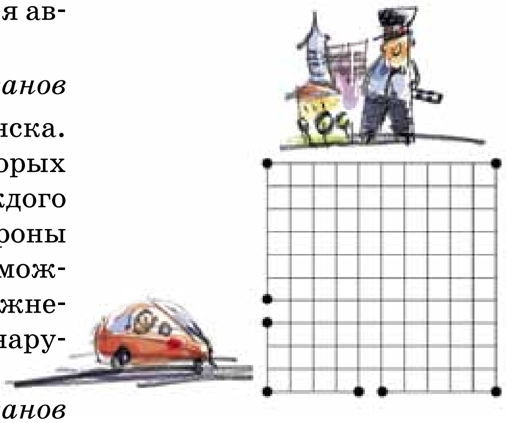
4. **(6)** Два слова называются похожими, если в них присутствует общая буква, которая встречается в них одинаковое число раз. Например, слова «клюква» и «какао» – похожие (из-за буквы «к»). Влад задумал три ключевых слова: КАРАБАС, БАРКАС и БАРС. Затем он взял большой словарь и выписал из него все слова, которые похожи на каждое из трёх его ключевых слов. Костя проделал с таким же словарём аналогичную операцию, используя другие ключевые слова: БАРАБАС, РАБ и КАРА. Докажите, что у Влада выписано не меньше слов, чем у Кости.

В. Волков, К.Кохась

5. **(7)** Между городами A и B ездят автобусы с одинаковой постоянной скоростью. Автобус, выехавший из A в полдень, и автобус, выехавший из B в 15:00, встретились на расстоянии 500 км от A. Автобус, выехавший из А в 14:00, и автобус, выехавший из B в 11:00, встретились на расстоянии 300 км от A. На каком расстоянии от A встретятся автобусы, выехавшие из A и из B в 13:00?

А.Голованов, М.Иванов

6. (7) На рисунке изображён план города Альфинска. Каждый единичный отрезок – это улица. На некоторых улицах движение одностороннее, но при этом с каждого перекрёстка можно уехать по крайней мере в три стороны (кроме перекрёстков, отмеченных точками, – с них можно уехать в две стороны). Докажите, что из левого нижнего угла города можно проехать в правый верхний, не нарушая правил дорожного движения.



А.Голованов

7. а) (7) Таня выписала в строчку 180 последовательных натуральных чисел в некотором порядке. Серёжа выписал под ними ещё какие-то 180 последовательных чисел в некотором порядке. Под каждым числом второй строчки Саша написал произведение этого числа и числа, стоящего над ним. Оказалось, что в третьей строчке тоже стоят 180 последовательных натуральных чисел. Докажите, что Саша где-то обсчитался.

б) (8) Обнаружив ошибку, Саша решил, что числа слишком велики. Он заменил каждое Танино и каждое Серёжино число на его сумму цифр. После этого он заново пересчитал все произведения (умножил каждое из первой строки на написанное под ним число второй строки). В результате опять получилось 180 последовательных натуральных чисел. Докажите, что Саша опять ошибся.*

С.Берлов

8. (8) Навигатор на «Лексусе» бизнесмена Бориса Михайловича сообщает, сколько осталось ехать до пункта назначения, если двигаться со скоростью, равной средней скорости на промежутке от начала пути до настоящего момента. Борис Михайлович выехал из дома на дачу. В середине пути навигатор сообщил, что осталось ехать 1 час. В этот момент прямо перед «Лексусом» на дорогу выехал тракторист Вася, обогнать которого не было никакой возможности. После того как Борис Михайлович проехал половину оставшегося пути, навигатор сообщил, что осталось ехать 2 часа. Через сколько часов после этого приедет на дачу бизнесмен, если так и не обгонит тракториста? (Скорость трактора постоянна.)

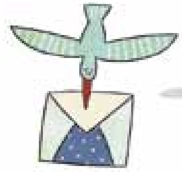
С.Берлов

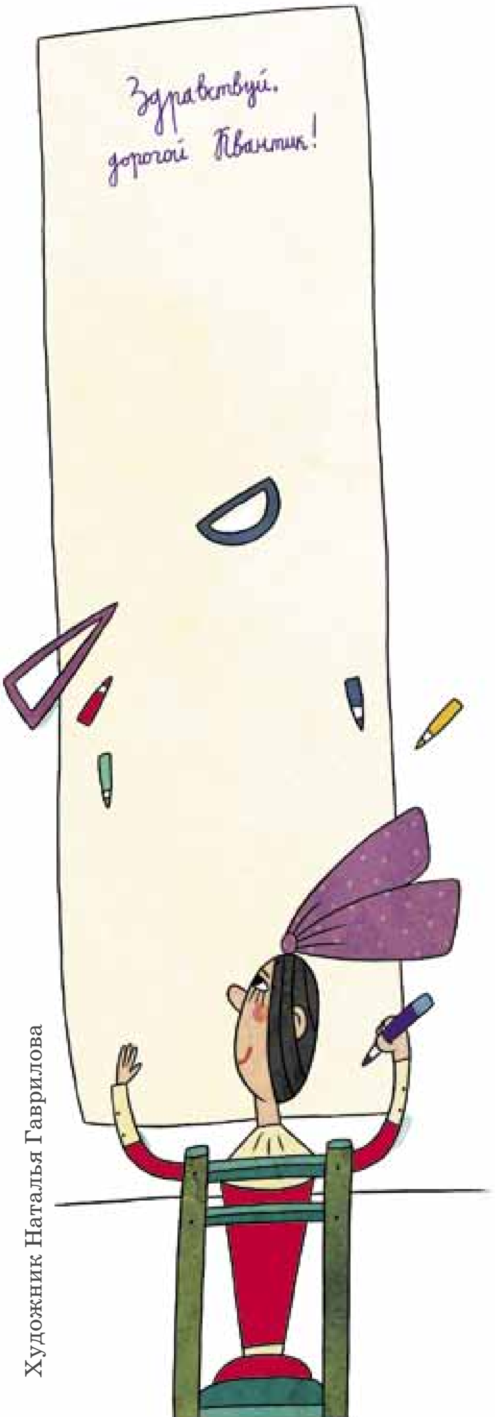
* Эта задача была предложена на олимпиаде в несколько другой формулировке для случая 200 последовательных чисел.

Художник Сергей Чуб

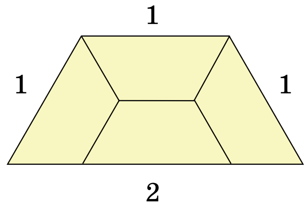
Нам пишут

КОМУ: 119002, Москва,
Большой Власьевский пер., д.11,
журнал «Квантик»
kvantik@mccme.ru

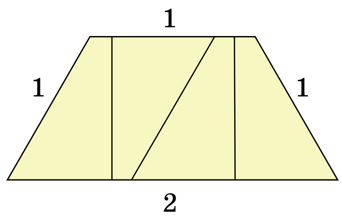




В «Квантике» № 8 за 2012 год были даны задачи на разрезание. Одна из них – как разрезать равнобедренную трапецию на четыре равные части. Решение показано на рисунке.



Даша Кузнецова учится в третьем классе средней школы посёлка Одоев Тульской области. Даша с мамой придумали другое решение задачи:



Даша пишет:

> *Мы с мамой и папой очень долго думали, как можно разрезать эту фигуру. И придумали, что можно её так разбить на маленькие трапеции. Эта задача была не самая сложная. Мне очень понравилось решать такие задачи.*

А вы попробуйте додумать Дашину мысль до конца и ответить на возникающие вопросы:

1. Какой длины получаются основания малых трапеций?

2. Всякую ли равнобедренную трапецию можно разбить Дашиным способом на четыре равные трапеции? Если не всякую, то интересно, какие трапеции можно, а какие – нельзя.

Художник Наталья Гаврилова

ДЮЖИНА ЗАДАЧ О СРЕДНЕМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ

1. Сумма всех 20 чисел равна 210, поэтому среднее арифметическое равно $210/20 = 10{,}5$.

2. Тут 19 отрицательных чисел, 20 положительных и ноль, всего 40 чисел. При суммировании все числа, кроме 0 и 20, попарно сокращаются. Значит, среднее арифметическое равно $20/40 = 0{,}5$.

3. Здесь удобно сгруппировать числа в пары: 1 и 1000, затем 2 и 999 и так далее. Получится 500 пар, последняя будет 500 и 501. В каждой паре сумма составляет 1001 и среднее равно 500,5. Поэтому и среднее всех чисел равно 500,5 (подумайте, почему).

4. Сначала среднее арифметическое трёх чисел было равно 11, т.е. их сумма равнялась 33. Затем среднее четырёх чисел было равно 14, т.е. их сумма равнялась 56. Значит, вошедшему было $56 - 33 = 23$ года.

5. Пусть, скажем, $a < b$ (случай $a > b$ рассматривается аналогично). Искомая координата x должна удовлетворять пропорции $(x - a):(b - x) = 3:5$, откуда получаем уравнение $5(x - a) = 3(b - x)$, $5x - 5a = 3b - 3x$, $8x = 5a + 3b$, $x = \frac{5}{8}a + \frac{3}{8}b$.

6. Да, например, если этот школьник был самым низким в 7 «А», но оказался самым высоким в 7 «Б». Вообще, такое происходит, если школьник был ниже среднего роста в 7 «А» и выше среднего роста в 7 «Б».

7. Такой способ годится, только если во всех классах поровну учеников. Пусть, скажем, в классе А учатся 25 школьников, а в классе Б учатся 29 школьников и средние арифметические в этих классах равны a и b. Тогда сумма всех годовых оценок в классе А равна $25a$, а в классе Б равна $29b$. Сумма всех оценок в двух классах равна $25a + 29b$, и это надо разделить на $25 + 29 = 54$. Поэтому средняя оценка всех семиклассников равна $\frac{25a+29b}{54} = \frac{25}{54}a + \frac{29}{54}b$, а не полусумме a и b. Это число называют *взвешенным средним* чисел a и b.

8. Если 1/10 самых богатых жителей города имеют доход в 15 раз больше среднего, то их общий доход в полтора раза больше суммарного дохода всех жителей города, включая их самих.

9. Так как все строки содержат поровну элементов, то среднее арифметическое всех чисел таблицы равно $(a + b + c)/3$. По аналогичным причинам оно равно $(d + x)/2$, где x – неизвестное среднее арифметическое во втором столбце. Отсюда $x = \frac{2}{3}(a + b + c) - d$.

10. Нет, поскольку тогда среднее арифметическое всех чисел таблицы окажется положительным и отрицательным одновременно.

11. Если раскрыть скобки в произведении $(1 + 2 + \ldots + 8 + 9)(1 + 2 + \ldots + 8 + 9)$, то получится как раз сумма всех чисел таблицы, поэтому она равна 45^2, а среднее равно $45^2/9^2 = 5^2 = 25$. Можно пытаться объяснить этот ответ по-простому: средний сомножитель (среднее арифметическое чисел от 1 до 9) равен 5, и потому среднее произведение равно 25. Но это опасная логика: так можно решить, что среднее чисел $1^2, 2^2, \ldots, 9^2$ равно 5^2, а это совсем не так.

12. Докажем, что $a_i \leqslant i$ при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Для этого рассмотрим числа $b_i = a_i - i$. Два крайних (b_1 и b_{100}) равны нулю, а каждое из остальных не больше полусуммы соседей. Надо доказать, что среди b_i нет положительных. Пусть это не так и пусть наибольшее из них b_k. Оно не может быть крайним, так как с краёв нули, поэтому оно равно полусумме соседей. Соседи не могут быть больше b_k и, значит, равны b_k: рядом с наибольшим стоят тоже наибольшие. Двигаясь к краю, получаем противоречие.

ПЕРВОЕ ИЗОБРЕТЕНИЕ ДЯДИ ЮРЫ

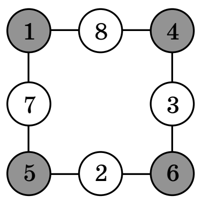
Итак, рассуждал Петя, дядя Юра предложил искать жучки, которых нет. То есть жучком должен стать кто-то, кто у нас уже есть. Что у нас вообще есть в ситуации с кодовым замком? Дверь есть, ручка на ней. Жильцы, которые в неё часто заходят. Наконец, есть сам замок, а он состоит из кнопочек и металлической пластинки. Жилец подходит, кнопки нажимает и заходит... Точно, кнопки! Жильцы ведь всегда нажимают на одни и те же кнопки! То есть надо просто найти потемневшие (или, наоборот, отполированные) или проседающие кнопки – вот и решение.

Ну, со второй задачкой теперь немудрено справиться. Надо найти то, что взаимодействует с посетителями. Пожалуй, это экспонаты и пол. Экспонаты от долгого смотрения на них не сильно меняются, а вот пол... Он наверняка будет грязнее там, где посетители чаще ходят. Но что делать, если на улице чисто? Если грязи нет, её можно принести – дурное дело нехитрое. Например, песочку у входа насыпать.

Можно идти к дяде Юре за второй порцией!

МЕНЬШЕ ЗНАЕШЬ – КРЕПЧЕ СПИШЬ

Такое расположение существует, и оно – единственное (см. рисунок). Как его найти? Вот краткое описание рассуждений.



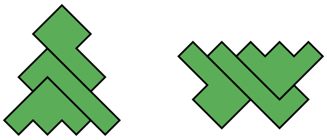
Так как расположения, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, считаем одинаковыми, то следует ограничиться теми, у которых восьмёрка стоит не в углу (вариант, когда она в углу, исчерпывающе «проработал» Олег), а в середине стороны, для определённости – верхней (т.е. в обозначениях, введённых нами, Б = 8). В одной строке с восьмёркой могут находиться либо единица с четвёркой, либо двойка с тройкой (ибо 8 + 1 + 4 = 8 + 2 + 3 = 13). Рассмотрим оба варианта:

1) Пусть это числа 1 и 4. Пусть для определённости А = 1 и В = 4 (а если наоборот, получим зеркальное отражение, что нового решения не даёт). Так как сумма чисел в левой вертикали равна 13, то Ж + И = 12. Поэтому Ж = 5, И = 7 или наоборот. Если Ж = 5, то, вспомнив, что по уже доказанному в статье сумма чисел в серых кружочках равна 16, получаем Д = 6. Остальные числа определяются автоматически, и мы получаем приведённый выше ответ. Ну, а если Ж = 7, то Д = 4, что недопустимо, поскольку В = 4.

2) Пусть это числа 2 и 3. Для определённости положим А = 2 и В = 3. Так как сумма чисел в левой вертикали равна 13, то Ж + И = 11, что может быть представлено (исключая использованные уже числа) как 11 = 4 + 7 = 5 + 6. Аналогично для правой вертикали Г + Д = 10, что представляется единственным способом: 10 = 4 + 6. Отсюда моментально следует, что в левой и правой вертикалях имеются одинаковые числа (либо 4, либо 6), что недопустимо. Так что этот случай решений не даёт.

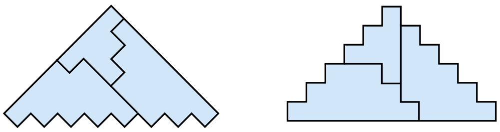
ГОЛОВОЛОМКИ

Головоломка «Времена года»



Ёлочка и бабочка

Головоломка «Чиче́н-Ица́»



Внешний вид этих фигур напоминает очертания храма Кукулькана из Чичен-Ицы

Головоломка «Эйяфьядлайёкюдль»

Вулкан до извержения

Вулкан после извержения

НОВОГОДНЯЯ ИСТОРИЯ

• Баба Яга может собрать с грядок 85 поганок. Сначала на грядках растут 16 · 4 = 64 поганки.

Когда Баба Яга сорвёт 4 поганки, вырастет ещё одна. Получается, что количество собранных поганок увеличилось на 4, а количество поганок на грядках уменьшилось на 3. Когда Баба Яга проделает эту операцию 20 раз, у неё будет собрано 20 · 4 = 80 поганок, а на грядках будет 64 – 20 · 3 = 4 поганки. Когда Баба Яга соберёт 4 оставшиеся поганки, вырастет ещё 1 поганка. Всего получается 80 + 4 + 1 = 85 поганок.

• Лиза посоветовала выйти на улицу и посмотреть в зал через окошко. Дело в том,что зимой окошки запотевают со стороны тёплого помещения, и Павлик никак не мог протереть окошко снаружи. Торт съел Павлик.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА

1. Если бы требовалось, чтобы в каждой строке были расположены числа от 1 до 5, подошла бы такая расстановка:

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

В условиях нашей задачи следует все числа третьей и четвёртой строки увеличить на 2, а числа пятой строки – на 3.

2. Ответ: 2012.

Если число при выполнении операций хотя бы один раз делили на 100, то оно от этого очень сильно уменьшилось. Число может избежать такого уменьшения, только если, вычитая из него единицу 87 раз, мы ни разу не получим кратное 100 число. Очевидно, число 2099 – самое крупное такое число среди данных. Из него-то после 87 операций и получится самое крупное число 2099 – 87 = 2012.

3. При поездке туда и обратно машина дважды проезжает по любому отрезку пути. Если посадить между двумя дубами ёлку, то, проезжая этот отрезок в одну сторону, Гарри телепортируется сквозь одну часть этого отрезка, а на обратном пути – сквозь другую. Таким образом, в сумме этот отрезок Поттер проедет всего один раз. В обычных условиях Поттеру на поездку требуется 4 часа. Чтобы уложиться в 3 часа, ему потребуется сократить путь на четверть, для чего достаточно посадить ёлки на отрезки суммарной длины хотя бы в половину от всего пути. Таким образом, можно посадить ёлки на 6 самых крупных отрезков.

4. Докажем, что каждое Костино слово встречается у Влада. Рассмотрим любое Костино слово x.

1) Так как оно похоже на слово РАБ, то оно похоже и на слово БАРС.

2) Так как оно похоже на слово КАРА, то оно похоже и на слово БАРКАС.

3) Оно похоже на слово БАРАБАС. Может ли оно при этом быть непохожим на слово КАРАБАС? Тогда оно похоже на БАРАБАС не из-за букв А, Р и С (в КАРАБАСе их столько же), значит, из-за Б. Значит, в слове x две буквы Б, а буквы К и С встречаются не по одному разу. При таком наборе свойств слово x может быть похоже на слово РАБ, только если в нем есть одна буква А. Тогда оно не похоже на слово КАРА. Противоречие. Выходит, что слово x похоже и на слово КАРАБАС тоже. Значит, действительно, каждое Костино слово выписано также и Владом. Значит, у него не меньше слов, чем у Кости.

5. Ответ: автобусы встретились в 400 км от A.

Условие задачи можно изменить следующим образом:

Из городов А и В выехали навстречу автобусы с одинаковой постоянной скоростью. Если автобус из А выезжает на 3 часа раньше, чем второй, они встретятся на расстоянии 500 км от А. Если на 3 часа раньше выедет автобус из В, а не из А, то они встретятся на расстоянии 300 км от А. Где встретятся выехавшие одновременно автобусы?

При таком условии очевидно, что в первых двух случаях автобусы встретятся в точках, симметричных относительно середины пути. Значит, середина эта находится на расстоянии $(500+300)/2=400$ км от A. Но это и есть точка встречи одновременно выехавших автобусов!

6. Будем ехать по городу, уезжая с каждого перекрестка вверх или вправо. В любой точке (кроме конечного пункта) по условию запрещено максимум одно из этих направлений, значит, так ехать всегда получится. Тогда при перемещении от одного перекрёстка к другому каждый раз уменьшается на 1 сумма расстояний по вертикали и горизонтали до конечного пункта. Поэтому через 20 «ходов» эта сумма расстояний станет равной нулю, то есть мы приедем в правую верхнюю точку.

7. а) В первой и второй строке написано по 90 чётных и 90 нечётных чисел. Так как произведения в третьей строке – это тоже последовательные числа, среди них тоже ровно 90 чётных и 90 нечётных. В нечётных произведениях оба сомножителя должны быть нечётными. Отсюда следует, что в первых двух строках под чётным числом обязательно стоит чётное, а под нечётным – нечётное. Но тогда все чётные произведения делятся на 4, чего в множестве 180 последовательных чисел не может быть (если число x делится на 4, то число $x+2$ чётно, но не делится на 4).

б) Среди 180 последовательных натуральных чисел ровно 60 делятся на 3, а остальные 120 не делятся на 3. По признаку делимости на 3 натуральное число делится на 3 в том и только в том случае, когда его сумма цифр делится на 3. Значит, в первых двух строках написано по 60 чисел, делящихся на 3, и по 120 чисел, не делящихся на 3. При этом в третьей строке имеется тоже ровно 60 чисел, делящихся на 3, и 120 не делящихся. Аналогично пункту **а)** получаем, что в третьей строке нет чисел, делящихся на 3, но не на 9. А такого не может быть для 180 последовательных чисел. Это же рассуждение работает и в пункте **а)**.

8. Ответ: Борис Михайлович (далее – Б.М.) приедет на дачу через 5 часов после второго заявления навигатора.

Когда Б.М. проехал половину пути, навигатор заявил, что осталось ехать 1 час. Следовательно, первую половину пути Б.М. проехал за 1 час. Когда Б.М. проехал три четверти пути, навигатор заявил, что осталось ехать 2 часа, т.е. в этот момент навигатор полагал, что «Лексус» едет с такой скоростью, что на преодоление четверти пути ему требуется 2 часа. Но тогда на преодоление трех четвертей пути понадобится 6 часов. Таким образом, второе заявление навигатора было сделано через 6 часов после начала движения, и, следовательно, через 5 часов после первого заявления. Значит, на преодоление четверти пути (промежуток между первым и вторым заявлением) «Лексусу» потребовалось 5 часов. Поскольку дальнейшее движение будет происходить с той же скоростью, на преодоление последней четверти пути понадобится ещё 5 часов.

НАМ ПИШУТ

1. Основания малых трапеций 1/8 и 5/8.

2. Не всякую. Равнобедренную трапецию можно разрезать таким образом на четыре равные прямоугольные трапеции, только если её малое основание больше, чем треть большого основания.

ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

Если вы получили по почте или приобрели бракованный номер (с дублированными или пустыми страницами, расплывшимся текстом и т.п.), напишите или позвоните нам, и мы постараемся обменять этот номер на новый.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 28 февраля по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11,
журнал «Квантик».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Итоги будут подведены в конце года. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

Желаем успеха!

I ТУР

1. Арнольд Шварценеггер за один удар ломает кирпич на три меньших. За сколько ударов он сможет разбить один большой кирпич на 27 маленьких?

2. Число-палиндром – это такое число, которое не меняется при записывании его цифр в обратном порядке. Чему равна сумма самого большого шестизначного палиндрома и самого маленького пятизначного?

ОЛИМПИАДЫ

Авторы задач:
Сергей Фомин (5)

3. Коля и Петя играют в такую игру. На столе лежат 20 спичек. Первым ходит Коля. За один ход разрешается взять со стола одну или две спички.

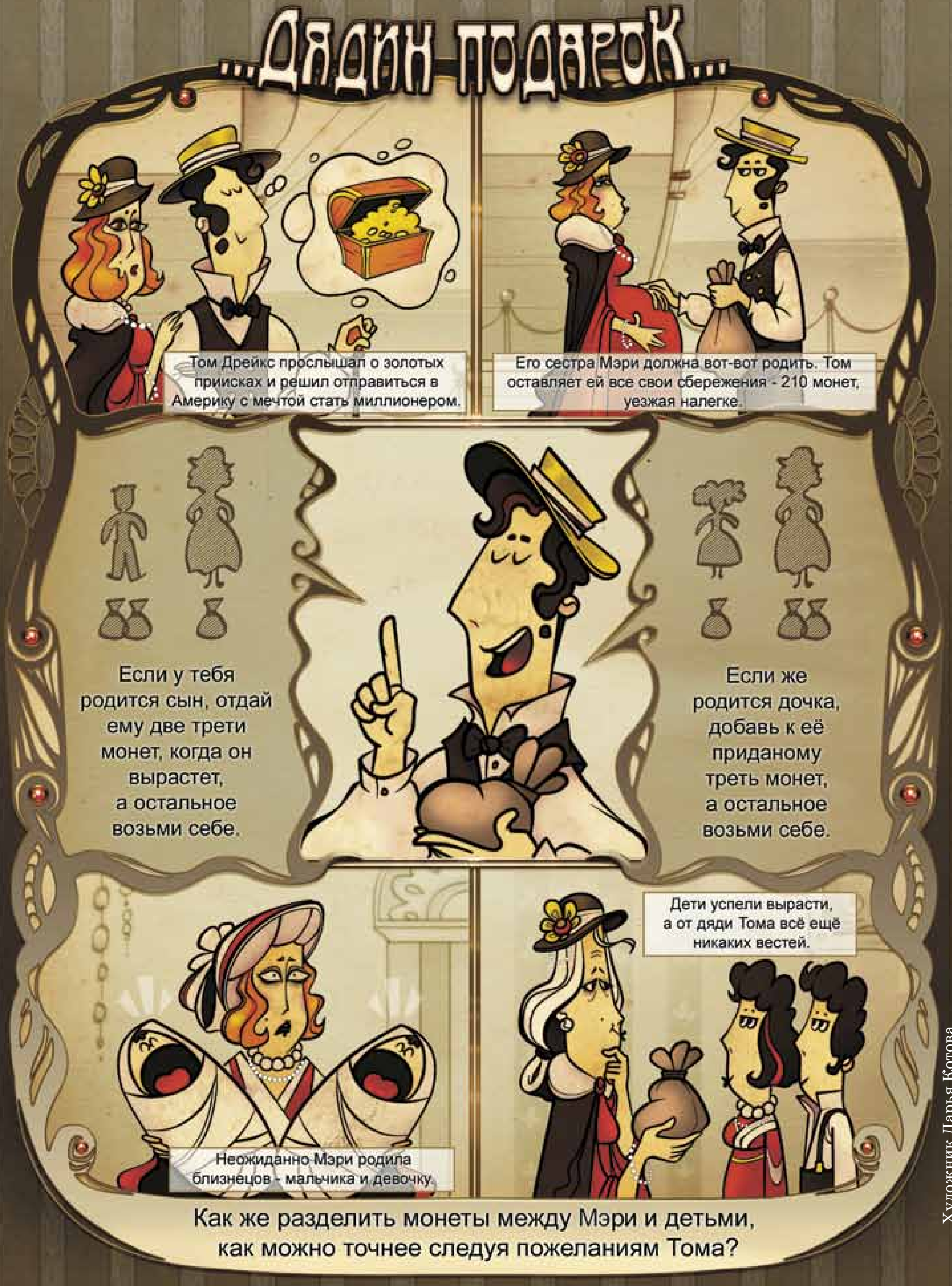
а) Может ли Коля действовать так, чтобы взять последнюю спичку, независимо от игры Пети?

б) А может ли он действовать так, чтобы последнюю спичку взял Петя, как бы тот ни сопротивлялся?

4. Из прямоугольника вырезали меньший прямоугольник и получили фигуру, изображённую на рисунке. Как с помощью карандаша и линейки провести прямую, которая делит площадь этой фигуры на две равные части?

5. Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

Художник Дарья Котова



Художник Дарья Котова