ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№12 декабрь 2013

СНЕЖИНКИ

БУМАЖНЫЙ ИТЕРАТОР

НОЧЬ ПЕРЕД РОЖДЕСТВОМ

Enter

№ 12 | декабрь 2013

Издается при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Вы можете оформить подписку на «Квантик» в любом отделении Почты России. Подписаться на следующий месяц можно до 10 числа текущего месяца. Наш подписной индекс **84252** по каталогу Роспечати.

Почтовый адрес: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик». Подписной индекс: 84252

Первые два выпуска
АЛЬМАНАХА «КВАНТИК»
с материалами номеров 2012 года,
а также все остальные
вышедшие номера
можно купить в магазине
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КНИГА»
по адресу: г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11,
http://biblio.mccme.ru
или заказать
по электронной почте:
biblio@mccme.ru

ISSN 2227-7986 12

www.kvantik.com
@ kvantik@mccme.ru
kvantik12.livejournal.com
vk.com/kvantik12

Появилась подписка на электронную версию журнала!
Подробности по ссылке: **http://pressa.ru/izdanie/51223**

Главный редактор: Сергей Дориченко
Зам. главного редактора: Ирина Маховая
Редакция: Екатерина Антоненко, Александр Бердников, Алексей Воропаев, Дарья Кожемякина, Андрей Меньщиков, Максим Прасолов, Григорий Фельдман
Главный художник: Yustas-07
Верстка: Ира Гумерова, Рая Шагеева
Обложка: Евгения Константинова, Yustas-07
Формат 84х108/16. Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
ISSN 2227-7986
Тираж: 5000 экз.
Адрес редакции: 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83. e-mail: kvantik@mccme.ru

По вопросам распространения обращаться по телефону: (499) 241-72-85;
e-mail: biblio@mccme.ru
Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

ИСТОРИЯ С ТРАФАРЕТОМ

Сергей Дворянинов

В конце августа, перед началом нового учебного года, на проезжей части дороги перед нашей школой надо было обновить разметку.

Рабочие вырезали из куска фанеры трафарет с числом 40 – такое ограничение скорости предусмотрено перед школой (рис. 1). Надпись эту надо было нанести на асфальте – на проезжей части дороги недалеко от школы.

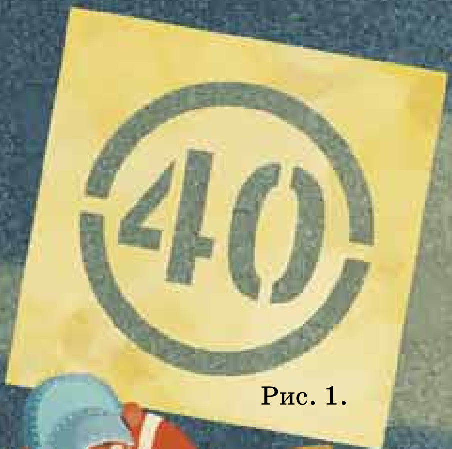


Рис. 1.

Трафарет удобен в подобных случаях. Размещаем его там, где нужно, и в прорези наносим краску. Делать это можно очень быстро, не беспокоясь о том, что кисть заедет на трафарет и туда попадёт часть краски. Надпись или рисунок получаются в точном соответствии с шаблоном (рис. 2). Надо только позаботиться о том, чтобы трафарет не распадался на части. Поэтому, например, внутренность цифры ноль соединена двумя перемычками с его внешней частью.

Рис. 2.

Слова «трафарет», «шаблон», «образец» можно считать синонимами. Правда, у первых двух слов есть негативный, то есть отрицательный, оттенок. Пусть, например, какая-то книга или песня не отличаются новизной, а похожи на те, что уже были раньше. То есть по сути они являются повторением, копией чего-то уже известного. Тогда говорят, что песня написана по шаблону или по трафарету. А вот образец – это хорошо. Здесь синоним – эталон. Приведём стандартные фразы, своего рода штампы: «этот спектакль – образец высокого искусства», «этот фильм – эталон режиссерского мастерства».

Вспомним слова Фамусова из пьесы А.С.Грибоедова «Горе от ума»:

Не надобно иного образца,
Когда в глазах пример отца.
Смотри ты на меня: не хвастаю сложеньем;
Однако бодр и свеж, и дожил до седин.

Но нельзя сказать, что трафарет, шаблон или штамп – это всегда плохо. Перегорела электрическая лампочка, и её надо заменить новой. Цоколь у новой должен быть точно таким же, как у старой. Стандартным. Иначе лампочку не ввинтить в патрон. Оригинальность и разнообразие здесь совсем ни к чему!

Так вот, когда рабочие уже собирались украсить дорожное полотно призывом снизить скорость до сорока километров в час, их остановил директор нашей школы:

– Такая надпись не годится! Трафарет надо переделать!..

– Как? Почему? – удивились рабочие.

– Трафарет должен быть вот таким, – и директор нарисовал на бумаге те же две цифры, но только почему-то неестественно вытянутыми. И вместо круга, их заключающего, вытянутый овал (рис. 3).

– Но этот трафарет никому не понравится, у нас шрифт краси..., – начали было возражать рабочие, но потом поняли, в чём тут дело и почему директор забраковал их шаблон.

...Через некоторое время на дороге забелели столь нужные для безопасности школьников и такие растянутые цифры.

А вам вопрос: почему трафарет на рисунке 1 не стали использовать?

Рис. 3.

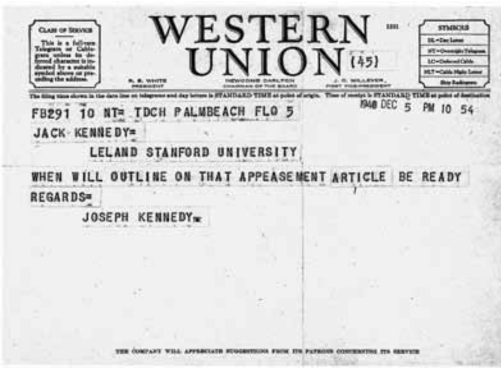
Художник Виктор Пяткин

Борис Дружинин

ПОЁТ МОРЗЯНКА ЗА СТЕНОЙ ВЕСЁЛЫМ ДИСКАНТОМ…*

A	·–	N	–·
B	–···	O	–––
C	–·–·	P	·––·
D	–··	Q	––·–
E	·	R	·–·
F	··–·	S	···
G	––·	T	–
H	····	U	··–
I	··	V	···–
J	·–––	W	·––
K	–·–	X	–··–
L	·–··	Y	–·––
M	––	Z	––··
1	·––––	6	–····
2	··–––	7	––···
3	···––	8	–––··
4	····–	9	––––·
5	·····	0	–––––

Код Морзе


WESTERN UNION (45)

FB291 10 NT= TDCH PALMBEACH FLO 5 1940 DEC 5 PM 10 54

JACK KENNEDY=

LELAND STANFORD UNIVERSITY

WHEN WILL OUTLINE ON THAT APPEASEMENT ARTICLE BE READY

REGARDS=

JOSEPH KENNEDY

Телеграмма 1940 года. Компания «Western Union» перестала предоставлять телеграфные услуги лишь в 2006 году.

Фото: *Natalie Maynor, проект Википедиа*

АЗБУКА МОРЗЕ

В XIX веке электричество только делало первые робкие шаги по нашей планете. Но успехи уже были. Самюэль Морзе сконструировал аппаратуру, позволяющую передавать и принимать электрические сигналы. Между крупными городами протянулись провода, и люди общались на расстоянии посредством «азбуки Морзе». Вообще-то, эту азбуку, состоящую из коротких (точки) и длинных (тире) электрических сигналов, предложил Морзе, а разработал Альфред Вейл.** Морзе финансировал его работу, причём поставил условие: чем чаще встречается буква в английском языке, тем меньше точек и тире должно входить в её код. Он не сомневался, что Вейл потратит много месяцев, чтобы подсчитать частоту появления букв. А тот нашёл верное решение за какой-нибудь десяток минут. Остановитесь и подумайте, как бы вы поступили на месте Вейла?

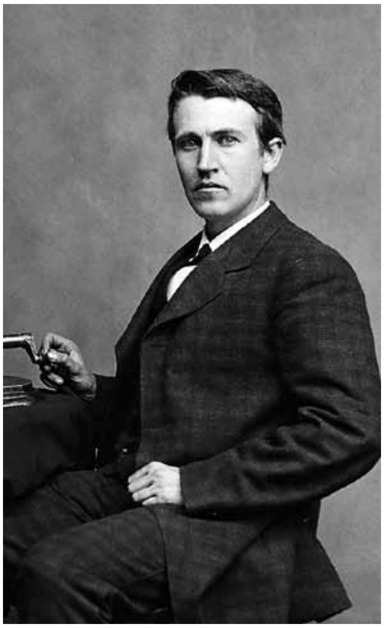
В те далёкие времена вся печатная продукция набиралась вручную. Буквы для набора вырезались в зеркальном отражении на металлических кубиках. Хранились все буквы A в одном ящичке-кассе, все буквы B – в другом и т.д. Наборщик складывал буква к букве, получались слова, предложения и целые страницы. Так вот, Вейл зашёл в ближайшую типографию и оценил размер ящичков-касс для каждой буквы. Чем реже встречалась эта буква в печатном тексте, тем в меньшем по размеру ящичке она хранилась. Всё гениальное – просто.

Естественно, все цифры тоже получили коды. Со временем свои коды получили и часто употребляемые сочетания слов. Например, русское «СК» означает «связь кончаю», а интернациональное «88» – пожелание любви или «целую».

*Из песни «Морзянка» (слова М. Пляцковского, музыка М. Фрадкина).

**По другой версии – всё-таки сам Морзе. – *Прим. ред.*

Люди, умеющие передавать и принимать эти сигналы, назывались телеграфистами; они пользовались не меньшим уважением, чем лётчики на заре авиации или космонавты в середине XX века.



Томас Эдисон

НОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФИСТ

Юный Томас Эдисон освоил работу телеграфиста. Казалось бы, живи и радуйся. Но неуёмная тяга к изобретательству сыграла с ним злую шутку. На железной дороге в Стрэтфорде он устроился телеграфистом ночной смены. Именно ночной, так как днём он ставил свои многочисленные эксперименты.

Строгие правила гласили: дежурный телеграфист должен передавать каждые полчаса сигнал в доказательство того, что он не спит. В ответ на это Эдисон придумал электромеханический будильник, который передавал этот сигнал сам, без участия своего хозяина, давая возможность тому безмятежно спать. Но однажды его «застукали» за этим занятием, и будущий великий изобретатель потерял работу. Эдисон возвратился в родительский дом в Порт-Гурон.

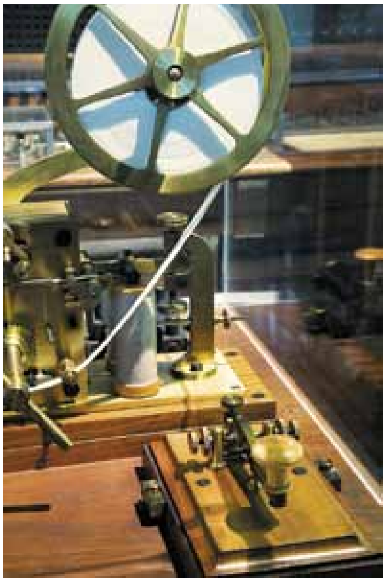
БЕЗ ПРОВОДОВ

Мозг настоящего изобретателя работает не только над созданием новых приборов и механизмов, но и ищет выход из самых безнадёжных ситуаций.

В 1864 году весна выдалась бурной. Река Сент-Клэр, что вытекает из озера Гурон, разлилась, снесла все мосты и порвала телеграфный кабель. Прекратилась всякая связь между городами Сарнией и Порт-Гуроном, стоящими напротив друг друга на разных берегах. И тут, как назло, потребовалось передать очень важное сообщение из Порт-Гурона в Сарнию.

Администрацию Порт-Гурона охватила паника. Радио к тому времени ещё не изобрели, а о мобильной связи и говорить нечего. Рассматривался даже вариант отправить сообщение с голубиной почтой. Но голубь

Телеграфный столб.
Фото: *Johannes Kazah*, *проект Викимедиа*



Телеграфный аппарат. На переднем плане ключ Морзе (передатчик), на заднем – приёмник. При приёме сообщение записывалось азбукой Морзе на ленту, а потом его расшифровывал телеграфист. Но делали и по-другому: телеграфист прослушивал сообщение и сразу записывал его расшифровку.

Фото: *Jorge Royan, проект Викимедиа*

Памятник Эдисону в городе Порт-Гурон.

Фото: *Matthew Gordon, проект Викимедиа*

не умеет летать по конкретному адресу, а лишь возвращается к себе домой.

Не растерялся только семнадцатилетний Томас Эдисон. Он забрался на паровоз и принялся короткими и длинными гудками передавать сообщение азбукой Морзе. На другом берегу телеграфист услышал гудки и вмиг сообразил, что от него требуется. Так смекалка преодолела разгул стихии.

ПУГАЛО ОГОРОДНОЕ

Старый друг Эдисона Адамс порекомендовал Томаса начальнику бостонского отделения компании «Вестерн Юнион» как опытного телеграфиста. Томас прямо с вокзала явился в телеграфную контору. Его вид вызвал откровенные усмешки у щёголей-телеграфистов. И этот деревенщина называет себя опытным телеграфистом?! Городских щёголей можно понять. За неделю пути Эдисон приобрёл вид огородного пугала.

Эдисона решили проверить по высшему разряду и заодно показать, как работают лучшие специалисты своего дела. Управляющий конторой предложил Эдисону прийти в семь вечера, сам связался с Нью-Йорком и договорился, что передачу на Бостон проведёт Ричард Хедчинсон, самый лучший телеграфист того времени, славившийся быстротой работы на ключе.

Ровно в семь пришёл Томас. Его усадили за аппарат и предложили принимать последние известия для газет. Хедчинсон начал передачу медленно, постепенно увеличивая темп. Эдисон спокойно принимал и записывал новости каллиграфическим почерком и без единой ошибки. Наконец, Хедчинсон дошёл до предела скорости и начал сокращать слова, а Эдисон обязан был записывать слова целиком. И он записывал.

Прошёл час, другой... Эдисон взялся за ключ и, не прерывая приёма, отстучал Хедчинсону: «Давай-давай, старина. Нечего спать. Поторапливайся».

Управляющий и остальные телеграфисты восторженно встретили победу Эдисона и устроили банкет в его честь. Вот вам и «деревенщина»!

ПРО ДИРИЖЁРА

Анастасия Челпанова

– Сегодня мы идём на концерт, ты не забыл? – поинтересовалась мама.

– Помню, – нахмурился я, – слушать Чуковского.

– Да нет же, опять ты его неправильно называешь. Не Чуковского, а Чайковского.

– Ну Чайковского... И почему сразу неправильно? Сказала бы – не совсем правильно.

– Нет же, совсем неправильно, – настаивала мама.

– Но почему? Я всего пару букв перепутал!

– Дело не в этом, – улыбнулась она. – Чуковский – это совершенно другой человек. Корней Иванович Чуковский – детский писатель, а Пётр Ильич Чайковский – композитор.

– Ладно, – вздохнул я, – согласен на «неправильно».

* * *

Под громкие аплодисменты на сцену стали выходить музыканты с разными инструментами в руках. Когда они все сели на свои места, вышел дирижёр в строгом чёрном костюме. Он поклонился залу, отвернулся, поднял руки... и вот полилась музыка. Красивые мелодии сменяли друг друга, инструменты играли то по отдельности, то вместе, сплетая из разных звуков музыкальные узоры. Каждый музыкант был внимателен и сосредоточен, каждый исполнял свою мелодию. Одно было мне совершенно непонятно: зачем нужен дирижёр? Он всего лишь беззвучно машет руками. Казалось – убери дирижёра со сцены, и ничего не изменится!

Я дождался антракта и подошёл с этим вопросом к маме.

– Ты, конечно, прав, – неожиданно начала она, – дирижёр сам ни на каких инструментах не играет, но именно он организует звучание всего оркестра. Вот представь, собрались музыканты, каждый взял в руки свой инструмент, приготовились играть... Но как им начать одновременно?

– Пусть кто-нибудь один скомандует.

– Хорошо. Но один музыкант начнёт играть быстрее, другой медленнее. Как быть?

Оглянись вокруг

– Надо потренироваться, чтобы получалось вместе, – объяснил я.

– Ладно, – не отступала мама, – они попробовали один раз, другой, третий, а потом кто-нибудь решил, что ему надоело.

– Так не годится, – деловито заявил я, – надо, чтобы все слушались.

– Слушались кого?

– Того, кого они сами выберут.

– Так вот, чтобы не было разногласий и споров, есть человек, которого все музыканты уважают и слушают, – это дирижёр.

Я задумчиво замолчал.

* * *

После концерта мы с мамой шли домой по аллее, освещённой фонарями. И вдруг я рассмеялся, да так громко, что сам вздрогнул от неожиданности.

– Ты что? – удивилась мама.

– Я тут про дирижёра вспомнил. Если он только начало музыки показывает, зачем же тогда всё произведение машет?

Мама тоже улыбнулась.

– Во-первых, он проверяет, правильно ли играют музыканты. Помнишь, перед каждым оркестрантом стояли специальные подставки – пюпитры, а на них лежали ноты. В этих нотах написана только одна мелодия, у каждого своя. А перед дирижёром лежала большая стопка нот, она называется партитурой, в ней записано, что и в какой момент должен играть каждый инструмент. Дирижёр смотрит в партитуру, показывает, какому инструменту в данный момент пора начинать играть, и проверяет, все ли играют то, что написано.

– Должно быть, это не очень просто, – вслух подумал я.

– А во-вторых, дирижёр показывает музыкантам не только «когда», но и «как» нужно исполнить мелодию. С тех пор как дирижёры на концертах стали дирижировать, стоя спиной к залу, был придуман…

– Подожди, – перебил я, – что значит стали дирижировать, стоя спиной... А раньше было не так?

– Да, сначала дирижёры стояли лицом к зрителям и спиной к оркестру.

– Здорово! – засмеялся я.

– Считается, что первым дирижёром, повернувшимся во время выступления лицом к оркестру, был композитор Рихард Вагнер. Дело в том, что музыка стала сложнее, контрастнее и дирижёру необходимо было подсказывать оркестрантам особенности исполнения каждой новой мелодии. Так вот, с этого момента был создан целый язык дирижёрских жестов, он включил в себя специальные движения, которыми дирижёр может общаться с музыкантами прямо во время концерта.

– Что же получается? Мы тут сидим и думаем, что дирижёр просто так руками машет, а он при помощи специального языка незаметно общается с оркестром?

– Да, так и есть.

– Ничего себе! – Я был потрясён. Дирижёр, только что казавшийся мне совершенно ненужным, вдруг предстал передо мной в обличии уважаемого человека, владеющего особыми знаниями.

– На самом деле всё, что он может показать, касается исключительно музыкального исполнения. Он говорит, кому играть тише, кому – громче; показывает, кто отстаёт, а кто торопится; старается изобразить руками и лицом общий характер музыки; может даже отругать кого-нибудь за плохую игру или похвалить за хорошую.

– А если все музыканты его понимают, значит они тоже владеют этим языком? – прищурился я.

– Думаю, да. Этого понимания они добиваются на многочисленных репетициях.

– Я понял,– тихо и задумчиво проговорил я, – вот, значит, что такое репетиция – это тренировка понимать друг друга, общаясь на неизвестном языке!

– Ну, в каком-то смысле да, – неуверенно ответила удивлённая таким выводом мама.

Художник Ольга Демидова

БуМажный Итератор

Игорь Акулич

Массовая замена традиционных деревянных оконных рам пластиковыми стеклопакетами неизбежно ведёт к снижению производства и продаж когда-то весьма необходимого товара – бумажной полоски для оклейки окон перед наступлением сурового зимнего периода. Не исключено, что в скором будущем такое понятие вообще исчезнет из обихода, ибо технический прогресс не остановишь. И потому вот совет читателям: пока не поздно, срочно бегите в ближайший хозяйственный магазин и приобретайте сей великолепный геометрический инструмент!

Это не оговорка. С помощью длинной и не очень широкой полоски из тонкой бумаги[1] можно не только решать многие геометрические задачи на построение, но и некоторые такие, которые с помощью «классического» набора чертёжных приспособлений (т.е. циркуля и линейки без делений) вообще неразрешимы! Мы же будем использовать её совсем необычным образом – в качестве *итератора*.

А что такое «итератор»? Это приспособление, посредством которого можно выполнять так называемые *итерации*, т.е. последовательные приближения к нужному результату[2]. Но как можно для таких целей приспособить бумажную полоску? Сейчас увидим.

Сначала изложим предысторию. Много лет назад автору этой статьи встретилось в одной из книг классика популярной математики Мартина Гарднера описание *гексафлексагона*. Увы, в те времена журнал «Квантик» ещё не выходил и не было возможности просто взять готовую развёртку[3] и склеить её в нужном месте. Ничего не оставалось, кроме как следовать указаниям Гарднера, который утверждал, что лучшим исходным материалом для этого является именно бумажная лента для оклейки окон[4], но предварительно «разделённая» с помощью перегибов на правильные треугольники (рис. 1).

Полоска, к счастью, нашлась. Теперь, если бы под рукой имелся минимальный набор чертёжных инструментов (хотя бы линейка и карандаш, ну и калькулятор не помешал бы), разбить полоску нужным

Рис. 1

[1] «Типовая» полоска для оклейки окон имеет ширину 5 см, а длина её, согласно действующим стандартам, не менее 70 см (хотя может быть и больше метра – это зависит от завода-изготовителя).

[2] Строго говоря, смысл слова «итерация» подразумевает лишь неоднократное повторение некоторой процедуры без какой-либо гарантии успеха. Но в нашем случае успех придёт!

[3] Такая развёртка имеется в «Квантике» № 4 за 2012 год.

[4] Вообще-то, М. Гарднер упоминал не ленту для оклейки окон, а ленту для чеков. – *Прим. ред.*

образом проблем бы не составило. Однако ничего подобного в обозримой окрестности не наблюдалось. Пришлось поступить следующим образом (см. рис. 2, где буквами обозначены все характерные точки). А именно: сначала я перегнул полоску по линии A_1A_2 так, чтобы угол A_2A_1M был по возможности ближе к 60°. Если бы удалось перегнуть *точно* по углу 60°, проблема была бы решена: как выполнить последующие перегибы и получить разбивку полосы на правильные треугольники – ясно каждому. Но точности ожидать не приходилось. Пришлось исхитряться и действовать так. Будем «плясать» не от острого угла A_2A_1M, а от внутреннего одностороннего с ним угла A_1A_2N. Ясно, что он тупой, и хотелось бы, чтобы он был как можно ближе к 120°. Тупой угол получить, разумеется, легко, а что касается его близости к нужной величине, то это весьма проблематично и сильно зависит от индивидуальных свойств исполнителя. Поэтому будем считать, что $\angle A_1A_2N = 120^\circ + \Delta$, где Δ – некоторая неизбежная погрешность (положительная или отрицательная). Далее перегнём полоску, чтобы совпали линии A_2N и A_2A_1, получив при этом отрезок A_2A_3. Ясно, что A_2A_3 – биссектриса угла A_1A_2N, вследствие чего $\angle A_1A_2A_3 = \angle A_3A_2N = \frac{1}{2}\angle A_1A_2N = 60^\circ + \frac{\Delta}{2}$. В таком случае $\angle A_2A_3M = 180^\circ - \angle A_3A_2N = 120^\circ - \frac{\Delta}{2}$. Как видим, получился угол, который отличается от желанных 120° на вдвое меньшую величину, чем исходный угол A_1A_2N (отличается, правда, в другую сторону, но какая, в принципе, разница?). Если теперь перегнуть полоску так, чтобы совпали линии A_3M и A_3A_2 (и при этом получился отрезок A_3A_4), то новый угол A_3A_4N будет отличаться от 120° лишь на $\frac{\Delta}{4}$. Ну и так далее. Сделав несколько перегибов, мы неизбежно добьёмся того, что очередной угол будет отличаться от 120° на ничтожно малую величину, и дальше пойдут практически правильные треугольники!

Другой вопрос – сколько перегибов для этого потребуется? Если, скажем, штук пятьдесят, то длины полоски просто не хватит. Что ж, давайте оценим это значение. Знающие тригонометрию смогут

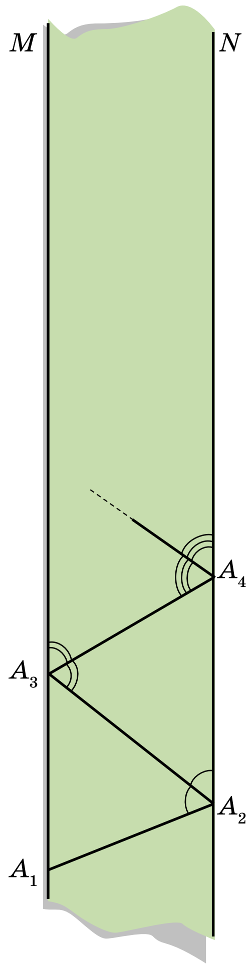


Рис. 2

выполнить вычисления легко и без проблем, мы же попробуем обойтись не столь тяжёлой артиллерией. Наша цель – «цепочка» правильных треугольников с высотой 5 см (ибо такова ширина полоски). У такого треугольника длина стороны, как известно, составляет $5 : \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 5{,}77$ см. Мы же стартуем с заведомо неправильного треугольника. Какова здесь может быть погрешность? Наверняка первая же сторона первого треугольника не меньше *ширины* полоски, т.е. тех же 5 см (это если угол A_1A_2N прямой, что, конечно, сомнительно, но мы намеренно ставим себя в наихудшие начальные условия). По мере снижения отклонения получающихся углов от 120° стороны образующихся треугольников будут всё ближе подходить к нужному нам значению 5,77 см. Будем считать, что при уменьшении отклонения угла вдвое отклонение стороны также снижается примерно вдвое. Вообще-то это неверно[5], но для оценки сойдёт.

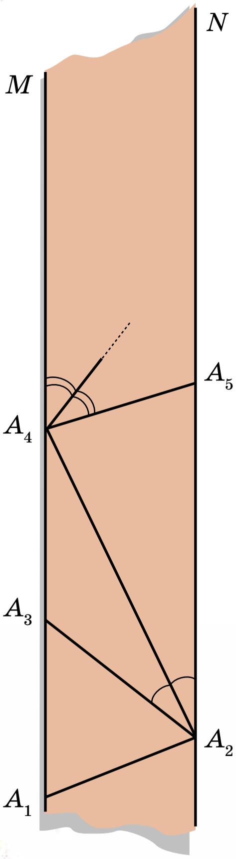
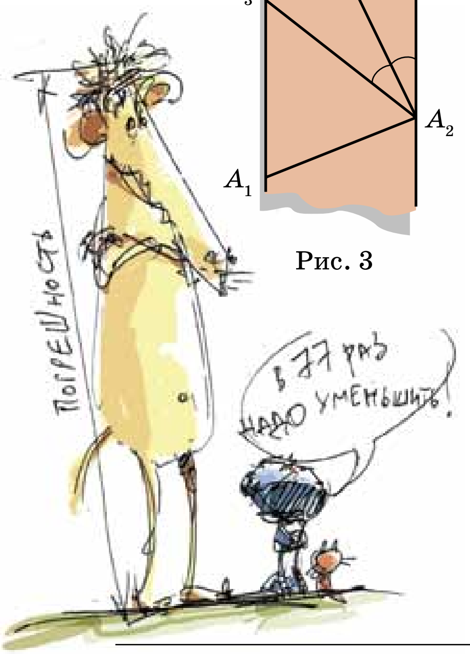


Рис. 3

Итак, первоначальное отклонение составляет не более $5{,}77 - 5 = 0{,}77$ см. А какое отклонение можно считать *практически* нулевым? Поскольку речь идёт о перегибах полоски, естественным критерием служит её *толщина* – при перегибах она имеет существенное значение. Толщину полоски определить нетрудно, взяв стопку из полосок (бумага для оклейки окон как раз в стопках и продаётся), измерив её толщину и поделив на количество полосок. Получаем, что она близка к 0,01 см.



Следовательно, необходимо уменьшить погрешность в $0{,}77 : 0{,}01 = 77$ раз. Поскольку мы приняли, что при каждом перегибе она снижается вдвое, а $2^7 = 128 > 77$, то должно хватить лишь *семи* перегибов[6]. На полоске это займёт совсем немного места, и останется вполне достаточная длина, чтобы получить нужное количество правильных треугольников для гексафлексагона.

Вот так буквально на пустом месте мы получили нужный результат. Бумажный итератор проявил себя безупречно.

Как ни странно, именно эта идея – перегибы по биссектрисам – позволяет получить и другие углы, не толь-

[5] Такое предположение становится приближённо верным, только когда отклонение угла становится достаточно малым.

[6] Расчёт с использованием отвергнутой нами тригонометрии показывает, что хватило бы восьми перегибов – практически то же самое.

ко равные 60°. В самом деле, давайте, как и прежде, начав от произвольного тупого угла A_1A_2N, построим перегибанием его биссектрису A_2A_3, а затем – биссектрису угла A_3A_2N. Получившийся новый угол A_4A_2N будет равен лишь четверти угла A_1A_2N. Далее аналогичным образом получим четверть угла A_2A_4M и так далее (рис. 3).

Через несколько итераций процесс практически «сойдётся», т.е. получающиеся углы будут совпадать (причины тому – те же, что и в самой первой рассмотренной задаче; можете в этом убедиться сами, написав соответствующие формулы). Как бы определить их значения? Это несложно. Рассмотрим две последовательные линии сгиба PQ и QR после того, как выполнено очень много перегибов, и ситуация «стабилизировалась» (рис. 4).

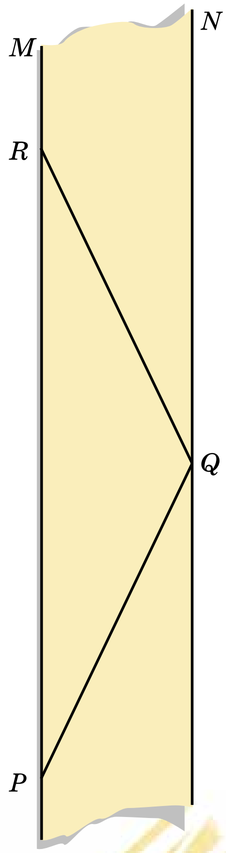


Рис. 4

Пусть $\angle PQN = \varphi$. Так как угол RQN есть четверть угла PQN, то $\angle RQN = \frac{\varphi}{4}$. Поэтому внутренний односторонний с ним угол QRM равен: $\angle QRM = 180^\circ - \angle RQN = 180^\circ - \frac{\varphi}{4}$. Но в силу «стабилизации» угол QRM равен углу PQN, т.е. тому же φ! Следовательно, $180^\circ - \frac{\varphi}{4} = \varphi$, откуда $\varphi = 144^\circ$ и $\angle RQN = 36^\circ$. Мы получили весьма примечательный угол 36°, возникающий при построении правильного пятиугольника, и притом весьма простым способом.

Можно использовать ту же идею, если (см. опять рис. 3) делить пополам не угол A_3A_2N, а угол $A_3A_2A_1$ (и так далее в том же духе), т.е. каждый новый угол составит не четверть, а три четверти предыдущего. В этом случае получаем такое «предельное» равенство: $180^\circ - \frac{3\varphi}{4} = \varphi$, и тогда $\varphi = 180^\circ \cdot \frac{4}{7}$. Как видим, здесь мы имеем дело с делением окружности на *семь* равных частей, чего «классическими» средствами получить вовсе невозможно.

Дальнейшие рассуждения существенно расширяют простор для комбинаций. Во-первых, можно делить углы не на 4, а на 8 и более частей. А можно действовать похитрей – скажем, делить углы попеременно на две и на 4 части или два раза на две, а потом один раз на четыре и так далее. То есть возможности здесь безграничны. Так что запасайтесь полосками, дорогие читатели! В крайнем случае сгодятся для оклейки окон.

Художник Сергей Чуб

УЛЫБНИСЬ

Игорь Акулич

В гостях у сказки

В далёком 2001 году на одном из турниров[1] состоялся шуточный математический бой. Как полагается, в начале боя были вызваны капитаны команд и им предложена «блиц-задача», ответ на которую требовалось дать в течение минуты. Формулировалась она так:

В двойном буквенном неравенстве одна из букв заменена вопросительным знаком:

$$Д + Б + В + Ж + К < Р < Д + Б + В + Ж + К + ?$$

Разгадайте закономерность и определите спрятанную букву.

Один из капитанов почти сразу опрометчиво заявил, что это буква «*Р*», и проиграл. Дальнейшее обдумывание вроде бы не имело смысла (поскольку автоматически победителем был признан его соперник), но членам жюри очень хотелось, чтобы хоть кто-то додумался до ответа самостоятельно. Поэтому командам (уже не только капитанам!) было предложено подумать ещё минуту. Когда и это не принесло результата, жюри в отчаянии обратилось также и к многочисленным зрителям, выделив третью минуту. Бесполезно!

Тогда ведущий дал подсказку: буква «*Р*» должна быть *большая-пребольшая*, и даже исправил неравенство на доске, придав ему примерно такой вид:

$$Д + Б + В + Ж + К < \mathbf{Р} < Д + Б + В + Ж + К + ?$$

Лишь после этого одного из участников осенило.

– «Репка»! – заорал он, и сразу всё стало ясно. Ну конечно, кто не знает этой народной сказки? В её сюжете, помнится, большую-пребольшую репку пытались дружным коллективом вытянуть *Дедка, Бабка, Внучка, Жучка* и *Кошка*. Ничего у них не вышло, и лишь при помощи *Мышки* удалось добиться успеха. Так что под вопросительным знаком спрятана буква «*М*».

Вся эта история была мне знакома (ибо был я не только свидетелем, но и непосредственным участником описанных событий). Полагаю, именно это помогло мне лет через пять безошибочно ответить на вопрос, заданный одним знакомым восьмиклассником:

Дано шесть букв (они перечислены по алфавиту): Б, В, Д, З, Л и М. Известно, что пять из них меньше К, а одна – больше. Какая?

Надеюсь, читатели, вооружённые ранее приведённой информацией, найдут ответ без труда. А остальным посоветуем: читайте сказки! Фольклор всегда поможет.

[1] Это был турнир математических боёв в рамках конкурса имени А. П. Савина «Математика 6-8», организованного журналом «Квант». Место проведения – посёлок Клещёвка Ивановской области.

Художник Виктор Пяткин

Снежинки

Александр Бердников

Интересные «новогодние» фотографии можно увидеть на сайте Сельскохозяйственого исследовательского центра Белтсвилла (BARC)[1]. Для научных и практических целей сотрудники этого центра изучают… снежинки! И вот как они это делают.

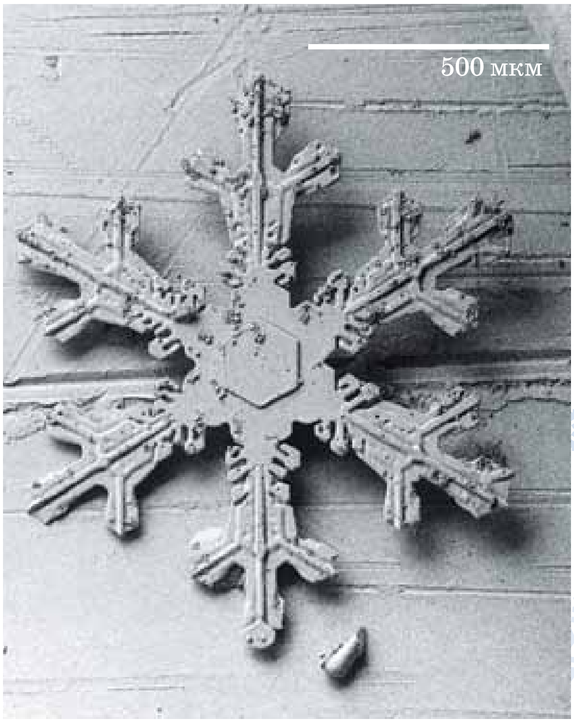
Снежинки помещают на медные пластинки и на долю секунды погружают в жидкий азот. Он быстро остужает их до −196°С и примораживает к пластинкам. Теперь благодаря высокой прочности примороженных кристаллов снежинки могут храниться хоть целый год и их можно даже перевозить на самолёте. Затем на снежинки напыляют тончайший слой платины (металл немного дороже золота) – для того чтобы по платине, как по проводам, со снежинок утёк лишний электрический заряд. Только после этого их сможет «рассмотреть» электронный микроскоп, с помощью которого и были сделаны приведённые ниже фотографии.

Перед взором электронного микроскопа снежинки предстают в непривычном для нас виде: они выглядят чёрно-белыми и непрозрачными. Зато электронный микроскоп даёт на порядки большее увеличение по сравнению с оптическим и имеет бóльшую глубину резкости. А главное, он деликатнее обращается с таким нежным материалом, как снежинки. Оптические микроскопы гораздо грубее. Одна только подсветка, необходимая для того, чтобы разглядеть снежинку, способна её испортить – например, подплавить.

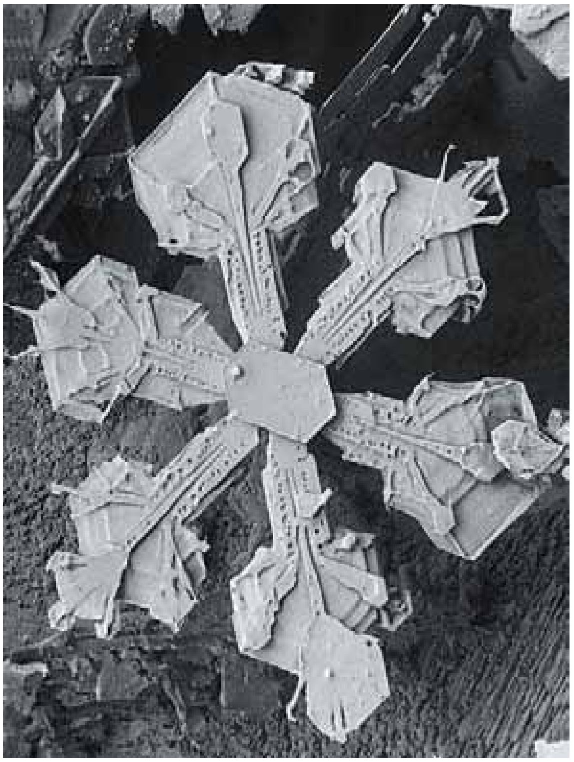
А теперь – несколько интересных фотографий. На некоторых из них показан масштабный отрезок (мм – миллиметр, мкм – микрометр, тысячная доля миллиметра). Для начала сравним, как выглядит лёд через оптический (вверху) и электронный (внизу) микроскопы.

[1] http://www.anri.barc.usda.gov/emusnow/default.htm

Вот такими мы привыкли представлять себе «правильные» снежинки:

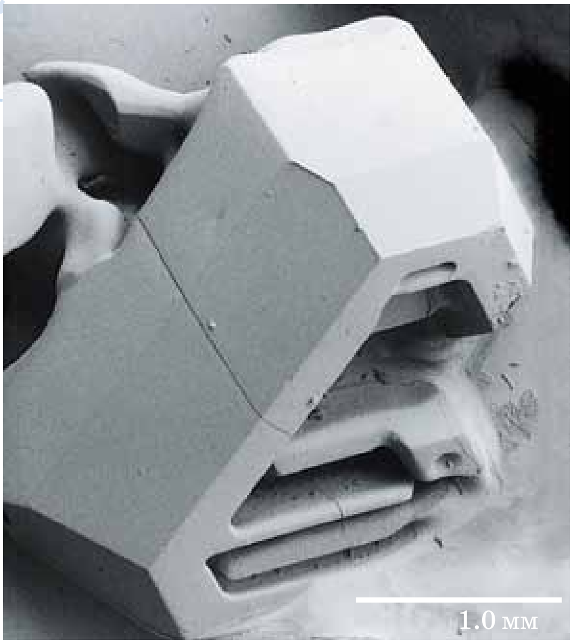


Ну, в крайнем случае, как-то так:



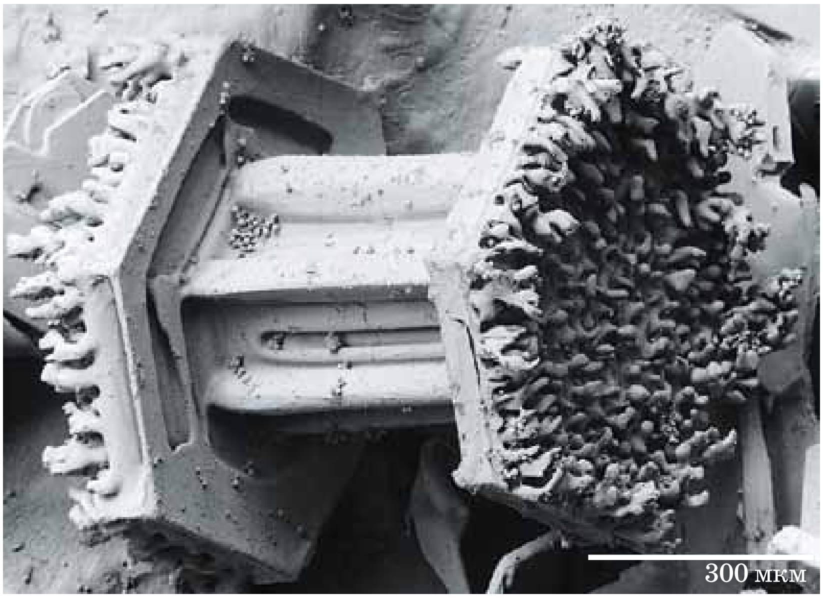
Однако они могут быть подтаявшими или вообще представлять собой бесформенный мокрый комок:

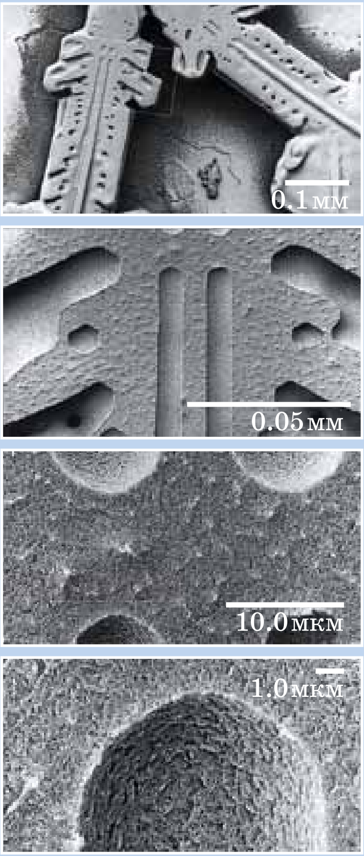
Глубоко под снежным покровом около самой земли иногда бывает очень рыхлый снег, состоящий из крупных аккуратных ледяных кристаллов. Если не видели – не беда, вот они какие:



Иногда снежные кристаллы бывают совсем причудливой формы – в виде колонн.

Поросль на второй колонне – изморозь. Иногда капли влаги в атмосфере, не застывая, переохлаждаются ниже –30°С. И лишь соприкоснувшись с твёрдой поверхностью, они быстро к ней примораживаются.





Ну и под конец покажем на примере снежинки увеличительную мощь электронного микроскопа. Каждая следующая картинка показывает фрагмент предыдущей.

Вот ещё пример изморози:

Для заинтересовавшихся приводим ещё одну интересную ссылку. По адресу **http://www.its.caltech.edu/~atomic/snowcrystals/movies/movies.htm** можно посмотреть несколько роликов, показывающих процесс роста снежинки с течением времени. Приятного просмотра и с наступающим Новым годом!

3, 14, 15...

Три, четырнадцать, пятнадцать...

Сергей Федин

– 2094 два раза.
– Ах, как это поэтично!

Диалог из кинофильма Жана Кокто «Орфей»

Насмотревшись ужастиков про всяческих зловещих терминаторов и киборгов, я как-то с тревогой стал смотреть на компьютер. А что если и впрямь машины когда-нибудь станут умнее человека и взбунтуются? Ведь уже сейчас они считают в миллиарды раз быстрее нас, обыгрывают людей в шахматы, стремительно учатся ходить, говорить и играть по нотам на музыкальных инструментах. Лет через пятьдесят роботы научатся думать и размножаться, и тогда...

Но нет, нет, думаю, всё не так страшно. Потому что кое-что мы ещё долго-долго будем делать лучше машин. Ну, например, писать стихи. Вот когда роботы превзойдут нас и в поэзии, то людям и в самом деле придётся потесниться. Но до этого, слава Богу, ещё далеко, а пока – пока человек и сам идёт в наступление и даже вовсю осваивает... машинные стихи. Ну да, а как же ещё назвать стихи, написанные на языке современной техники, языке цифр? Не веришь, что такое возможно? Тогда прочитай вслух вот такую весёлую считалочку Германа Лукомникова:

8, 8, 50,
9, 9, 60,
18, 19,
40, 40, 50.

7, 14, 1,
25, 31,
48, 48,
251.

А если у тебя сейчас не то настроение, то вот, пожалуйста, грустный стих из цифр:

148, 19,
2, 3, 4, 50,
711, 12,
100000, 360.

Даже по этим двум примерам можно понять особенности стихотворений из цифр. С одной стороны, они полностью абстрактны – практически всегда непонятно, о чём, собственно, в них говорится. С другой стороны, в них хорошо чувствуются ритм и настроение автора. И этим цифровая поэзия похожа на музыку. Может быть, именно эту музыку цифр имел в виду знаменитый поэт Иосиф Бродский, когда однажды написал: «В цифрах есть нечто, чего в словах, даже крикнув их, нет».

Но у цифровых стихов есть особенность, отличающая их и от обычных стихов, и от музыки – их почти невозможно перевести для иностранцев. Вот глупости, скажешь ты, ведь цифры одни и те же на всех языках и, значит, смысл цифрового стиха будет так же понятен и эскимосу, и «негру преклонных годов». Это, конечно, верно, но при прочтении на иностранном языке и ритм, и рифма почти наверняка потеряются, то есть наш цифровой стих перестанет быть стихом. Чтобы убедиться в этом, попробуй для примера прочитать на иностранном языке считалку, что была вначале. Или, наоборот, прочти на русском языке вот этот цифровой стих, написанный кем-то на английском:

23, 507,
13, 4, 7, 85,
5, 9, 100, 3, 11,
3000, 4, 45.

11, 87, 13,
14, 5, 89, 16,
903, 3, 7, 30,
100, 90, 17.

Сам видишь (точнее, слышишь), на русском это не стих, а ерунда какая-то. Правда, мне удалось написать короткий цифровой стих, который и на английском остаётся стихотворением. Убедись сам:

43, 32, 7, 15,
36, 25, 0, 16.

Но такие двуязычные стихи – большая редкость. И потом, а как быть с другими языками? Ведь, например, грузин или китаец воспримут этот англо-русский стих просто как бессмысленный набор цифр. Так что у цифровых стихов есть свои плюсы и минусы. И, конечно, у них есть враги и поклонники. Одни считают, что стихи из цифр – ничего не выражающая чепуха и настоящие стихи должны писаться с помощью слов. Другие – и их немало – наслаждаются цифровыми стихами и считают, что за ними будущее.

А может быть, истина, как обычно, прячется посередине между этими крайностями и давно уже пора писать стихи, в которых и числа, и слова чувствуют себя одинаково уютно. Как, например, в этой чудесной песенке Александра Дольского про то, как Две Двенадцатых пригласили на свидание Три Тринадцатых:

Однажды 2/12 позвали 3/13:
–Пойдёмте, 3/13, пройдёмся вечерком.
– Ах, что вы, 2/12, – смутились 3/13, –
Увидят 5/15, что вы со мной вдвоём.

– Пусть видят 5/15, – сказали 2/12, –
Мне это, 3/13, поверьте, всё равно.
Пусть знают 5/15, – сказали 2/12, –
Что я вас, 3/13, люблю уже давно.

– И я вас, 2/12, – сказали 3/13. –
Пройдёмте, 2/12, подайте мне пальто.
Ну что нам 5/15, ну что нам 6/16,
Ну что нам 7/17 и даже если 100!

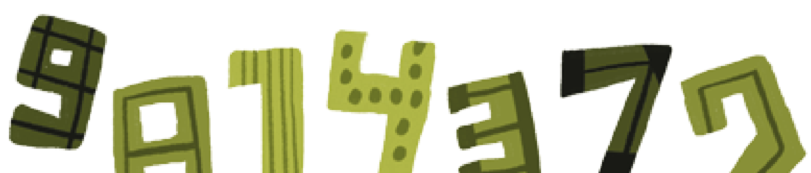
Почему-то любовная история двух дробей тронула меня гораздо больше, чем многие стихи про аналогичные чувства людей. Но, подружившись со словами, цифры могут выражать и грустные размышления:

18×5,
25:16,
и опять 25, 25…
и уже никогда 18!

(т.е. «18 умножить на 5, 25 разделить на 16…» и т.д.). Так и представляешь повзрослевшего 25-летнего человека, работающего где-нибудь бухгалтером. В его жизни всё предсказуемо и скучно, как в таблице умножения, и ему остаётся только со вздохом вспоминать то прекрасное волшебное время, когда ему было 18. Впервые прочитав этот печальный стих, я сразу вспомнил строки Анны Ахматовой, написанные лет сто назад, но, в сущности, о том же:

Вместо мудрости – опытность, пресное,
Неутоляющее питье.
А юность была – как молитва воскресная…
Мне ли забыть её?

Но снова вернёмся в детство. Хорошо помню, как у нас во дворе к вышедшему погулять с чем-нибудь вкусным тут же подбегал кто-нибудь из ребят. «48 – половину просим!» – говорил он стандартную в таких случаях попрошалочку, протягивая поцарапанную руку. «41 – ем один!» – так же стандартно отрезал сладкоежка, но потом, конечно же, делился.



Есть ещё один вид словесно-числовых стихов – они состоят уже не из чисел и слов, а из «числов», этаких удивительных кентавров, полученных скрещиванием букв и цифр в одно целое. Мне удалось придумать только один такой странный стих, правда он получился чересчур уж мрачным:

100нет с3ж 1окий в по2ле,
Он к с3жатам вернётся е2 ли...

Вот видишь, мы познакомились с цифровыми стихами двух видов. Одни состоят только из цифр, в других цифры перемешаны с буквами. Ты не поверишь, но есть, оказывается, цифровые стихи... вообще без цифр! Это особые стихи-запоминалки. Вот, например, такой несерьёзный стишок:

Два весёлых великана
пьют «Тархуна» два стакана.

Именно он, однако, занял первое место на конкурсе, организованном лет пятнадцать назад на страницах «Комсомольской правды». Требовалось придумать специальные фразы или стихи (они называются мнемоническими), помогающие запомнить телефонный номер 288-53-27. Большинство участников стали придумывать фразы, в которых надо было подсчитывать буквы в словах. Ну, например: *Не торопись зажигать свечи – ещё не сумерки!* Если ты выпишешь подряд числа, равные числу букв в словах этого предложения (*не* = 2, *торопись* = 8, *зажигать* = 8 и т.д.), то как раз получишь тот самый номер.

А вот автор стиха про весёлых великанов пошёл по другому пути – он использовал слова, начинающиеся на те же буквы, что очередная цифра в номере телефона: *Веселых = 8 (Восемь), Пьют = 5 (Пять), Стакана = 7 (Семь)* и т.д. Вот бы каждому из нас такую чудесную запоминалку для телефона! Ведь такой стих запомнить гораздо проще, чем число из семи цифр. А если бы в нём ещё что-нибудь говорилось о нас...

У цифровых стихов ещё очень много возможностей. Например, можно использовать знаки математических действий (+, –, : и т.д.) или разные поэтические хитрости. Вот одна из них. С давних времён поэты пишут акростихи. На вид они вроде бы самые

обычные, но первые буквы строчек, то есть первый столбец таких стихов, образуют слово или даже предложение. В цифровых стихах, конечно, не получится зашифровать в первом столбце слово, зато там можно спрятать дату какого-нибудь известного события. Скажем, этот цифровой стих (здесь, как и в заголовке статьи, встречается вездесущее число π) посвящён первому полёту человека в космос, а по его левому краю прочитывается дата этого великого события (12.04.1961).

1030, 420,	*10, 3^3, 134,*
214, 40+5.	*9, 180, 36.*
038, (2π/15),	*6030, (7−4),*
45000, 745.	*140746!!!!!!*

В общем, настоящий поэт может писать стихи даже с помощью калькулятора! Жаль, что когда-то давно на уроках математики мне вместе с таблицей сложения не объяснили *таблицу стихосложения*. Но у тебя-то ещё всё впереди! Ну а чтобы проверить, сможешь ли ты стать настоящим цифровым поэтом, попробуй-ка решить эту хитрую задачку.

С некоторых пор суперкомпьютер «Умище-15» начал писать стихи. Правда, пока он пишет их только из чисел. Но недавно он «перевёл» на «числовой» язык одно известное стихотворение, и вот что у него получилось:

40 9 3 15
30 8 2 17
20 10 60
7 13 50

Догадайся, какое из этих трёх стихотворений он «перевёл»:

1.
В лесу родилась ёлочка,
В лесу она росла,
Зимой и летом стройная,
Зелёная была.

2.
Вышел месяц из тумана,
Вынул ножик из кармана.
Буду резать, буду бить –
Всё равно тебе водить.

3.
Я помню чудное мгновенье:
Передо мной явилась ты,
Как мимолетное виденье,
Как гений чистой красоты.

Художник Анастасия Мошина

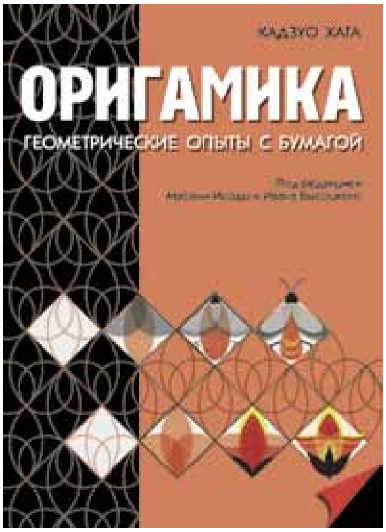
КАКОЙ НОМЕР ЗАКРЫВАЕТ ПРИПАРКОВАННАЯ МАШИНА?

Художник Артём Костюкевич

ЧТО ПОЧИТАТЬ?

Александр Воронцов,
Алексей Сгибнев

ОПЫТЫ С БУМАГОЙ



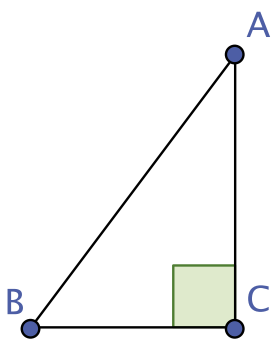
Многие знают про оригами – японское искусство складывать из цветных листов бумаги красивые цветы и фигурки животных. Но не всем известно, что идеи искусства оригами, перенесённые в математику, дали начало новому разделу геометрии – оригамике. В отличие от традиции геометрических построений с помощью циркуля и линейки, введённой древними греками, в оригамике инструментом для построения является сам материал, из которого мы строим, – лист бумаги.

Подробно про оригамику написано в книге её создателя Кадзуо Хаги «Оригамика. Геометрические опыты с бумагой» (М., МЦНМО, 2012).

А мы предлагаем вам сложить из листа бумаги замечательные фигуры – например, правильный треугольник. Но прежде потренируйтесь на упражнениях. Для решения некоторых вам понадобятся знания из курса 8 класса: теорема Пифагора и теорема Фалеса. Приведём формулировки этих теорем без доказательства.

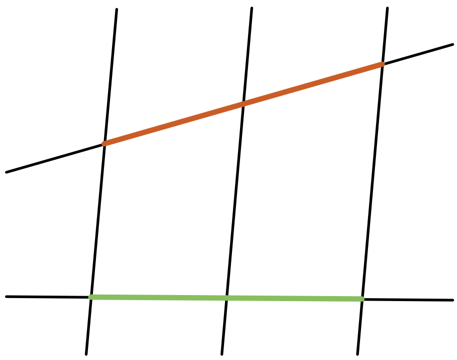
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

В треугольнике ABC с прямым углом C верно равенство: $AC^2+BC^2=AB^2$. Сторона AB называется гипотенузой прямоугольного треугольника ABC, а AC и BC – катетами.



ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

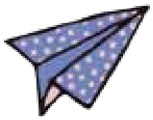
Если три параллельные прямые отсекают от одной прямой пару равных отрезков, то отсекаемые на другой прямой отрезки также равны.



Дан квадратный лист бумаги со стороной 1. Сложите его так, чтобы получился:

1) угол $22{,}5^\circ$;

2) отрезок длиной $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

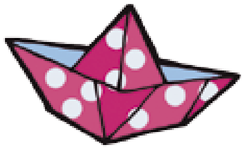


3) отрезок длиной $\frac{\sqrt{5}}{2}$;

4) отрезок длиной $\frac{1}{3}$ (Внимание! Часто предлагают решение – просто сложить лист втрое. Но как это сделать без приблизительной подгонки? В оригамике сгибы должны быть чёткими и ясными. Поэтому такое решение не засчитывается;

5) отрезок длиной $\frac{1}{5}$;

6) угол 30° ;



7) отрезок длиной $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

8) угол 75°;

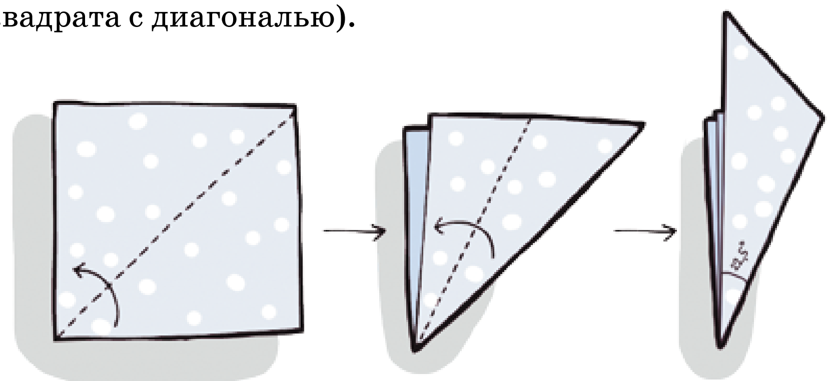
9) правильный треугольник;

10) правильный шестиугольник;

11) Дан прямоугольный лист бумаги. Сложите из него квадрат. С помощью этой задачи вы сможете сделать все построения и на прямоугольном листе.

Решение задачи 1.

Чтобы вы поняли, как вообще можно действовать с листом бумаги, опишем решение задачи 1. Заметим, что $22{,}5^\circ = 90^\circ/4 = 45^\circ/2$. Как получить угол 45°? Берём квадрат и складываем по диагонали, совмещая смежные стороны. Затем перегибаем угол получившегося треугольника, совмещая его стороны (т.е. сторону квадрата с диагональю).



Художник Татьяна Ахметгалиева

Анна Котова

Опубликовано в журнале «Квант» №12 за 1991 г.

Ночь перед Рождеством

В ночь перед Рождеством, сами знаете, непременно происходят чудеса. То Дед Мороз принесёт подарки, а то чёрт украдёт луну.

А то ещё некоторые гадают и очень интересные вещи про себя узнают. Вот Светлана (помните, у Жуковского?) башмачок за ворота кидала. А Татьяна (это уже у Пушкина) спрашивала имя у первого встречного. «Смотрит он – и отвечает: «Агафон». Помните? Кто ставит свечи перед зеркалом… Кто воском капает… Да мало ли способов выведать у потусторонних сил своё будущее?

Так и в нынешнее время: собираются вечером у ёлки, устраивают обстановку потаинственнее – и начинают священнодействовать. У каждого любителя гадания свой метод. Например, одна моя хорошая знакомая* предпочитает вызывать духов.

Делается это очень просто. Никаких особых приспособлений не требуется. Достаточно найти в хозяйстве четыре чайные ложки и лист бумаги.

Не спрашивайте, почему ложки именно чайные, какого качества должна быть бумага и какие заклинания положено произносить. Признаться, меня интересовала только техническая сторона дела.

Технология же вызова духов такова. Вы берёте в одну руку ложку, в другую – сложенную пополам узкую длинную полосочку бумаги (см. рис. 1). Теперь продеваете в бумажную петельку ручку ложки и, держа бумажку за сложенные вместе концы, плотно наматываете её на ложку (рис. 2). Готово? Кладите ложку на стол. Теперь повторяем ту же операцию с остальными ложечками. Надо расположить их крестом. Зачем – не могу вам сказать. Возможно, тогда духи-христиане охотнее явятся на ваш зов.

*А также дядя школьника из Ростова Олега Ярошенко, предложившего тему этой заметки.

Ну вот, ложки разложены. Можете спрашивать: «Николай Васильевич Гоголь, здесь ли вы?» (Вы понимаете, Гоголя я называю для примера. Но и в самом деле, хотелось бы знать – он сам видел чёрта с луной под мышкой или поверил свидетельству Солохи?) Теперь разматываем бумажки, взявшись за оба конца полоски одной рукой. Если почтенный дух пришёл и готов беседовать, происходит чудо: хотя бы одна из ложечек... вынимается из бумажной петельки, будто вы её и не продевали!

Дальше можно спрашивать о чём угодно. Заматываете ваши ложки снова, задаёте незримо присутствующему авторитету вопрос, разворачиваете бумажки. Случилось вышеописанное чудо – «да», не случилось – «нет».

Сильнейшее впечатление это гадание произвело на моего соседа. Он не верит в духов – уж такой законченный материалист. К тому же Лев Толстой обещал ему генеральские погоны в ближайшем будущем (а он даже не майор).

Но если не веришь в потусторонние силы, приходится искать научное объяснение. Мой сосед наутро после гадания принялся ставить эксперименты. Оказалось, что шариковая ручка, ключ от квартиры, ржавый гвоздь ничем не хуже чайных ложек – бумажка довольно часто снимается и с этих предметов. Он даже установил, что «маленькое чудо» происходит приблизительно в одном случае из четырёх. Это значит, что при гадании по всем правилам положительный ответ получается достаточно часто (ложек четыре, и скорее всего, полоска снимется хотя бы с одной).

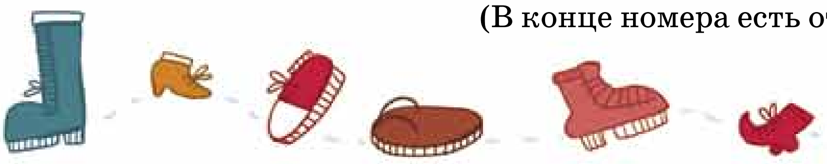
Но объяснения найти не удавалось.

И тут пришёл математик. Он один раз повторил опыт, засмеялся и растолковал, в чём тут дело.

В самом деле, в чём?

(В конце номера есть ответ.)

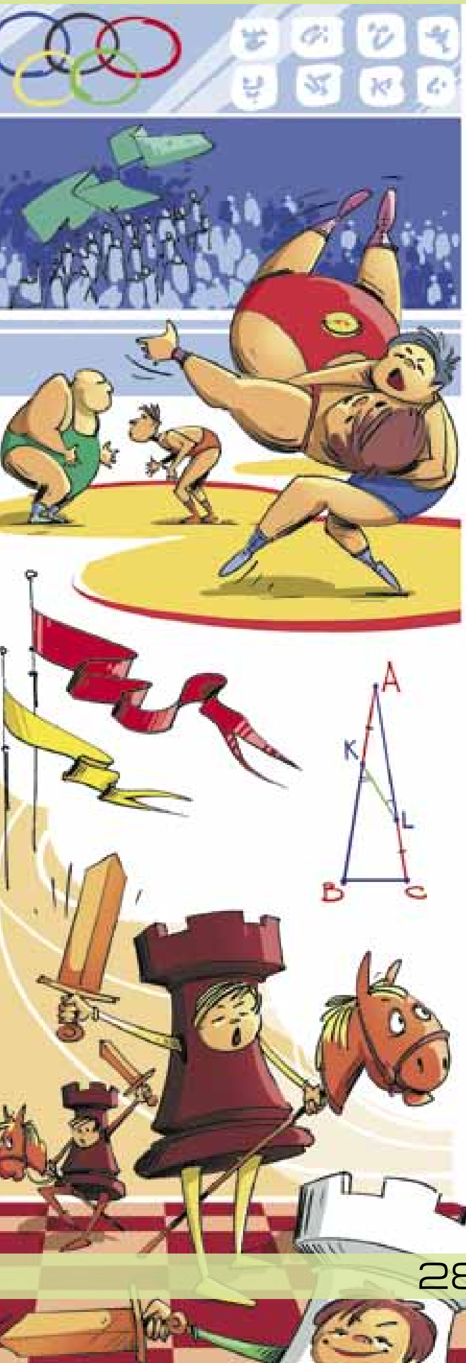
Художник Анна Сарвира



ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

13 и 27 октября 2013 года состоялся осенний тур XXXV Турнира Городов – международного математического соревнования для школьников. Приводим задачи базового варианта для 8 – 9 классов. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов у каждого участника учитываются три задачи, по которым он набрал больше всего баллов.

Надеемся, что какие-то из этих задач окажутся под силу и пятиклассникам – например, первая.



ОСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

Базовый вариант

1 [3]. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призёров?

Б.Френкин

2 [4]. Найдётся ли десятизначное число, записанное десятью различными цифрами, такое, что после вычёркивания из него любых шести цифр получится составное четырёхзначное число?

К.Кноп

3 [4]. Наибольший общий делитель натуральных чисел a, b будем обозначать (a, b). Пусть натуральное число n таково, что $(n, n+1) < (n, n+2) < \ldots < (n, n+35)$.

Докажите, что $(n, n+35) < (n, n+36)$.

Б.Френкин

4 [5]. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки K и L так, что $AK = CL$ и сумма углов ALK и LKB равна 60°. Докажите, что $KL = BC$.

Е.Бакаев

5 [6]. На шахматной доске стоят 8 не бьющих друг друга ладей. Докажите, что можно каждую из них передвинуть ходом коня так, что они по-прежнему не будут бить друг друга.

(Все восемь ладей передвигаются «одновременно», то есть если, например, две ладьи бьют друг друга ходом коня, то их можно поменять местами.)

Е.Бакаев

Художник Леонид Гамарц

Ученица московской школы «Интеллектуал» Светлана Коноваленко, прочитав статью Сергея Федина «Листовертни» из «Квантика» №3 за 2012 год, нарисовала и прислала нам листовертень (картинку-перевёртыш).

Оформила Наталья Гаврилова.

НАШ КОНКУРС («Квантик» №10)

46. *Вадик и Саша увидели старые весы (со стрелкой) и взвесили на них свои портфели. Весы показали 5 кг и 4 кг. Когда они взвесили оба портфеля вместе, весы показали 8 кг.*

– Как же так? – воскликнул Саша. – Пять плюс четыре не равняется восьми!

– Разве ты не видишь? – ответил Вадик. – У весов сдвинута стрелка.

Так сколько же весили портфели на самом деле?

Ответ: 4 кг и 3 кг.

Пусть стрелка у весов была сдвинута на x, тогда портфели на самом деле весили $5-x$ и $4-x$, а в сумме они весили $8-x$. Получаем уравнение $5-x+4-x=$ $=8-x$, откуда $x=1$.

47. *Внутри круга отметили точку. Разрежьте круг на две части так, чтобы из них можно было составить новый круг, у которого отмеченная точка будет в центре.*

Соединим центр нашего круга и отмеченную точку отрезком. Если бы можно было вырезать сам этот отрезок, то, просто перевернув его, мы поменяли бы точки местами. Но можно вырезать, скажем, круг с центром в середине этого отрезка и диаметром, чуть большим его длины. Повернув этот круг на 180°, мы решим задачу.

48. *Автомобильные покрышки стираются на передних колёсах через 25000 км пути, а на задних – через 15000 км пути. Какое наибольшее расстояние удастся проехать на таком автомобиле, если в пути можно поменять покрышки местами?*

Будем рассматривать покрышки как единый целый материал, а не просто как 4 отдельных покрышки. За 1 км пути в передней части автомобиля стирается $2 \cdot 1/25000$ покрышечного материала, а в задней – $2 \cdot 1/15000$. Тогда всего за 1 км пути стирается $2/25000+2/15000=16/75000$. Покрышек всего у нас 4, значит, на таком автомобиле удастся проехать не более $4 \cdot 75000/16=18750$ км. Понятно, что такое расстояние проехать возможно: проезжаем половину пути, 9375 км, а затем просто меняем местами передние покрышки и задние и едем ещё 9375 км. Тогда все покрышки сотрутся поровну и полностью.

49. *Разрешается переставить цифры* 1, 3, 4 *и* 6 *в любом порядке и расставить между какими угодно из них знаки арифметических действий* $+, -, \cdot, :$ *и скобки (например, так:* $(63+1):4$*). Получите выражение, значение которого равняется* 24.

Вот одно из решений: $(14-6) \cdot 3$. Можно и не «склеивать» цифры: $6:(1-3:4)=24$, и такой пример без «склейки» уже единствен!

50. *Среди* 10 *человек, подозреваемых в преступлении, двое виновных и восемь невиновных. Экстрасенсу предъявляют подозреваемых по трое. Если среди троих есть преступник, экстрасенс указывает на него, если там два преступника – на одного из них, а если преступников нет – на любого из троих.*

а) Как за 4 *таких сеанса найти хотя бы одного преступника?*

б) Как за 6 *таких сеансов наверняка выявить обоих преступников?*

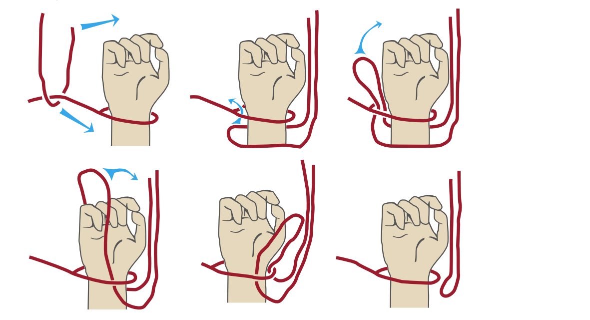
а) Сделаем для начала для 9 подозреваемых «отборочный тур»: разобьём их на 3 тройки и проведём сеанс в каждой из них. Среди этих 9 обязательно есть хотя бы один преступник. Тогда в его тройке экстрасенс обязательно укажет на преступника (возможно, не на него, а на его коллегу). Проведём «финал»: проверим трёх человек, на которых указал экстрасенс за эти 3 сеанса. Среди этих трёх человек снова обязательно есть хотя бы один преступник, поэтому «победивший» обязательно будет преступником.

б) Продолжим начатые в пункте а) сеансы. Заметим, что подозреваемые не из начальной тройки «победителя», не прошедшие «отборочный тур», невиновны (иначе, будь они преступниками, они прошли бы в «финал»). То есть, мы уже нашли 1 преступника и 4 невиновных. Осталось ещё 5 человек. Проверяем первых трёх из них, и того, на кого укажет экстрасенс, проверяем с оставшимися двумя. Тогда второй преступник точно не останется незамеченным.

ПРЕВРАЩЕНИЯ ВЕЩЕСТВ НА СЛУЖБЕ ИЗОБРЕТАТЕЛЯ («Квантик» №11)

Из прошлого номера осталась неразобранной задача об очистке чугунных деталей струёй песка – как сделать, чтобы сам песок не застревал в деталях? Вот как рассуждал Петя. Требуется нечто, что будет удалять остатки песка. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы это делала какая-то из имеющихся частей системы. Собственно, частей было две: деталь и песок. Кроме того, дядя Юра уже дал подсказку – надо было на что-то заменить песок. То есть нужно вещество, состоящее из маленьких частичек, которое бы потом «само уходило». Ну конечно! Можно взять просто маленькие льдинки. Они прочистят деталь, а потом растают. Ещё лучше взять так называемый сухой лёд – от него даже воды не останется.

СЦЕПЛЕННЫЕ РУКИ («Квантик» №11)



ИСТОРИЯ С ТРАФАРЕТОМ

Посмотрите на знак перед собой так, как смотрит на него водитель: не держа его прямо, а будто положив на плоскость дороги, вдоль линии взгляда (см рис.). При этом знак будет выглядеть сильно сплющенным. Если бы он был круглым, в таком ракурсе он был бы неразборчив. А директор специально растянул по вертикали знак, чтобы после сплющивания он стал пропорциональным и легко читался.

В ГОСТЯХ У СКАЗКИ

Главное здесь – подобрать подходящую «опорную» сказку. В данном случае это «Колобок». Каждый знает, что он последовательно укатился от *Бабушки, Дедушки, Зайца, Волка* и *Медведя*, а вот *Лису* обхитрить не сумел. Так что ответ понятен: *Л*.

ТРИ, ЧЕТЫРНАДЦАТЬ, ПЯТНАДЦАТЬ…

Ответ: прочитай стихотворение из чисел вслух, и ты увидишь, что это считалочка про месяц из тумана.

СТРАННАЯ ПАРКОВКА

Ответ: 87. Чтобы убедиться в этом, переверните картинку!

ОПЫТЫ С БУМАГОЙ

Подсказки:

2. $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$. **3.** $\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{?^2+?^2}$.

4. Разбейте сторону на четыре равные части, возьмите три и воспользуйтесь теоремой Фалеса.

5. Разбейте сторону на восемь равных частей…

6 и 7. Постройте прямоугольный треугольник с гипотенузой 1 и катетом $\frac{1}{2}$. Углы такого треугольника: 30°, 60°, 90°. **8.** $75^\circ=90^\circ-\frac{30^\circ}{2}$.

9. Используйте дважды построение из задач 6, 7.

10. Можно использовать правильный треугольник или откладывать дважды углы по 60°.

11. Совместите меньшую сторону прямоугольника с частью большей. Линия сгиба будет диагональю искомого квадрата.

НОЧЬ ПЕРЕД РОЖДЕСТВОМ

Покрасим стороны бумажки разными цветами (рис. 1). Видно, что ложка находится внутри красной петельки, но не синей. Вы можете разматывать полоску как на рис. 2 – тем же способом, что и заматывали. Получится петля, красная изнутри, и ложка будет в ней. Но вы могли взяться за концы полоски и по-другому – как на рис. 3. Вы ведь не следили за концами, а глядя на рис. 1, непонятно, как именно разматывать бумажку. Но в случае с рис. 3 получится синяя изнутри петля, которая ложку не захватывает.

Рис.1 Рис.2 Рис.3

ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ.

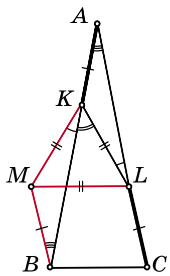
1. Ответ: один.

Самый сильный обязательно станет призёром. Покажем, что может быть ровно один призёр. Пронумеруем борцов по возрастанию силы от 1 до 100. В первом туре проведём поединки 1 – 2, 3 – 4, …, 99 – 100, во втором – 100 – 1, 2 – 3, …, 98 – 99. Тогда каждый, кроме самого сильного, в одном из туров проиграет.

2. Ответ: найдётся.

Например, подходит число 1397245680. Если не вычеркнута хотя бы одна из последних шести цифр, то оставшееся четырёхзначное число чётно или делится на 5. Если же вычеркнуты шесть последних цифр, то останется число 1397, кратное 11.

3. Заметим, что общие делители чисел n и $n+k$ такие же, как и общие делители чисел n и k (докажите!). Значит, $(n,\ n+k)=(n,\ k)$. Но очевидно, что $(n,k)\leqslant k$. Тогда получаем, что $(n,n+1)\leqslant 1$, $(n,n+2)\leqslant 2$, …, $(n,n+35)\leqslant 35$. Поэтому неравенства из условия задачи могут выполняться тогда и только тогда, когда $(n,\ n+1)=1$, $(n,\ n+2)=2$, …, $(n,\ n+35)=35$. Но тогда $(n,n+4)=4$, $(n,n+9)=9$, то есть n делится на $4\cdot 9=36$, откуда $(n,\ n+36)=36>35=(n,\ n+35)$.



4. Построим параллелограмм $BCLM$. Треугольники AKL и BMK равны: $BM=LC=AK$, $BK=AL$, $\angle KBM=\angle A$ (как накрест лежащие). Значит, в треугольнике LKM выполнено $KL=KM$, а $\angle LKM=\angle BKM+\angle LKB=\angle ALK+\angle LKB=60^\circ$. Следовательно, треугольник LKM равносторонний, и $KL=ML=BC$.

5. Ход конём состоит как бы из двух полуходов – по горизонтали и по вертикали. Объясним, как ходить ладьям, разбив ход каждой ладьи на такие два полухода. Сдвиг по горизонтали будет всегда на одну клетку, по вертикали – на две.

Начнём с горизонтальных полуходов. Ладью из 1-го столбца переставим во 2-й столбец, из 2-го – в 1-й. Аналогично обойдёмся с ладьями из 3-го и 4-го, 5-го и 6-го, 7-го и 8-го столбцов.

Теперь разберёмся с полуходами по вертикали. Ладью из 1-й строки переставим в 3-ю, из 3-й – в 1-ю. Аналогично обойдёмся с ладьями из 2-й и 4-й, 5-й и 7-й, 6-й и 8-й строк.

Тогда каждая ладья будет переставлена ходом коня, и в каждых строке и столбце будет по ладье, так что они не будут бить друг друга.

наш конкурс

ПОЗДРАВЛЯЕМ!

Вот и закончился очередной конкурс. Целый год участники из разных городов России, Украины, Казахстана, Белоруссии, США, Великобритании решали задачи, и теперь мы рады подвести итоги.

Поздравляем наших победителей! Ими стали

Бобков Григорий	Черноголовка	Школа № 75	6 кл.
Бояринцев Максим	Харьков (Украина)	Лицей № 27	5 кл.
Ванак Павел	Москва	Школа № 2008	7 кл.
Воронецкий Дмитрий	Москва	Школа № 1384	8 кл.
Гринёв Филипп	Москва	Британская Международная школа	9 кл.
Домрина Варвара	Москва	Школа № 2008	5 кл.
Крышин Илья	Волгоград	Школа № 81	8 кл.
Куянов Фёдор	Москва	Интеллектуал	5 кл.
Махлин Мирон	Москва	Школа № 200	2 кл.
Можаева Мария	Санкт-Петербург	Лицей № 486	4 кл.
Никулицкий Артём	Жуковский	Гимназия № 1	6 кл.
Пунанова Натали	Лондон (Великобритания)	The Totteridge Academy	9 кл.
Ретинский Вадим	Ливны	Школа № 2	7 кл.
Рязанов Даниил	Москва	Школа № 9	6 кл.
Савченко Антон	Харьков (Украина)	Лицей № 27	7 кл.
Сандаков Никита	Черноголовка	Школа № 75	7 кл.
Сморцов Михаил	Харьков (Украина)	Лицей № 27	6 кл.
Соколова Вера	Москва	Гимназия № 1543	8 кл.
Толмачёв Александр	Саров	Лицей № 3	7 кл.
Филиппов Степан	Санкт-Петербург	Гимназия № 610	7 кл.
Чеклетов Александр	Москва	Лицей Вторая Школа	8 кл.
Шеин Матвей	Балашов	Гимназия № 1	6 кл.
Яворский Александр	Москва	Гимназия № 1543	6 кл.

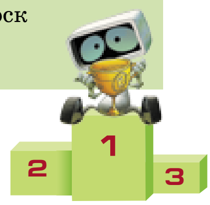
Победителям будут высланы дипломы журнала «Квантик», а также призы – научно-популярные книги издательства «МЦНМО» и диски фонда «Математические этюды».

Благодарим всех остальных ребят, кто принимал участие в нашем конкурсе. Это

Абанова Софья	Стони-Брук (США)
Александрова Евгения	Москва
Андрианова Виктория	Петропавловск-Камчатский
Аракчеева Дарья	Москва
Армякова Лидия	Москва
Асланов Мухамед	Залукокоаже
Безукладникова Татьяна	Челябинск
Беляев Олег	Санкт-Петербург
Бердашкевич Роман	Москва
Бердовский Алексей	Новороссийск
Береговая Анна	Пенза
Блатова Серафима	Москва
Блик Антон	Екатеринбург
Болвинова Дарья	Нижний Новгород
Бухрякова Снежана	с. Талажанка
Вакин Арсений	Электросталь
Валиева Рената	Москва
Василевич Данила	Минск (Белоруссия)
Васильев Валерий	с. Талажанка
Васильева Оксана	с. Талажанка
Виленский Сергей	Москва
Волков Александр	Липецк
Волков Анатолий	Москва
Волкова Ия	Москва
Вонятыцкий Александр	Москва
Воробьев Иван	Москва
Галкина Мария	Юбилейный
Геращенко Максим	Лос-Аламос (США)
Голицын Андрей	Москва
Гончар Владимир	
Горячева Анастасия	Москва
Гребняк Ярослав	Зеленоград
Григорьев Иннокентий	Москва
Гришин Михаил	Липецк

ПОЗДРАВЛЯЕМ!

Данилин Иван	Мытищи
Даниярходжаев Александр	Москва
Деб Натх Максим	Москва
Добровольский Денис	Санкт-Петербург
Дулгер Лия	Харьков (Украина)
Дульцева Александра	Новосибирск
Елисеев Егор	Азнакаево
Желободько Максим	Новосибирск
Загревский Дмитрий	Харьков (Украина)
Зарипова Алина	с. Большие Кляри
Зарицкая Валентина	Москва
Звонов Андрей	Жуковский
Зорина Екатерина	Апатиты
Иваницкий Георгий	Нижний Новгород
Иванов Илья	Долгопрудный
Иванова Алеся	Москва
Илюхин Владислав	Москва
Карзова Алина	Ливны
Карпов Иван	Москва
Киланова Полина	Новосибирск
Кирсанов Ярослав	Алексин
Киселев Максим	Снежинск
Князев Николай	Люберцы
Кобзева Анастасия	Талдыкорган (Казахстан)
Коваленко Дарья	Санкт-Петербург
Комаров Александр	Александров
Корнеенко Алексей	Москва
Коробова Александра	
Корякина Екатерина	Новосибирск
Кравченко Анастасия	Харьков (Украина)
Кратман Максим	Новосибирск
Крупенин Денис	
Крыжанков Степан	Санкт-Петербург
Кузнецова Виктория	Санкт-Петербург
Куклянов Данила	Москва
Кутилов Александр	Москва
Лаптев Алексей	Ярославль
Липаева Ксения	Тверь
Лисов Сергей	Москва
Лулаков Пётр	Санкт-Петербург
Лыщик Андрей	Москва
Любич Софья	Тамбов
Макрушова Диана	с. Талажанка
Малолеткина Анастасия	Санкт-Петербург
Мартемьянов Иван	
Марченко Андрей	Москва
Матвеев Константин	Москва
Милкина Ольга	Москва
Морозов Савелий	Ипатово
Нагайко Сергей	Москва
Назаревский Максим	Новосибирск
Никитина Юлия	Санкт-Петербург
Никифорова Анастасия	Старая Русса
Ниматов Лев	Москва
Новицкий Дмитрий	Ярославль
Нуртдинов Альфред	Санкт-Петербург
Остаплюк Никита	Харьков
Оськина Арина	Саранск
Пахнушев Андрей	Санкт-Петербург
Пашков Никита	Егорьевск
Переведенцев Артём	Москва
Переверзев Егор	Ярославль
Песоцкий Михаил	Москва
Петров Алексей	Новосибирск
Пикулин Иван	Жуковский
Пшунетлев Аслан	Краснодар
Рацеева Ольга	Москва
Родионова Мария	Москва
Рожков Михаил	Пенза
Романов Владимир	Москва
Рыжов Василий	Санкт-Петербург
Ряннель Анна	Санкт-Петербург
Савенков Роман	Петропавловск-Камчатский
Садыков Артур	Одинцово
Салехов Александр	Воронеж
Сергеичев Георгий	Москва
Сидорова Валентина	
Спорова Алёна	Харьков (Украина)
Степанов Николай	Тейково
Суквев Дмитрий	Санкт-Петербург
Табанаков Семён	Набережные Челны
Тарасова Алёна	Саров
Телешева Элина	Набережные Челны
Теляковская Юлия	Москва
Торопина Марта	Москва
Трушкина Вера	Саранск
Турецкий Фёдор	Москва
Фахрутдинова Валерия	Набережные Челны
Филатов Андрей	Москва
Хакимов Артём	Москва
Хохлов Всеволод	Москва
Хроменко Анастасия	Новосибирск
Цуканов Данила	Липецк
Цысин Михаил	Алма-Ата (Казахстан)
Чижевский Артём	Санкт-Петербург
Чуханов Анатолий	Новосибирск
Шаульский Виктор	Санкт-Петербург
Шаханина Мария	Барнаул
Шерстюгина Татьяна	Новосибирск
Шишкина Анастасия	Новосибирск
Шкатова Мария	Москва
Щербаков Артём	Москва
Ядренцев Илья	Москва
Янак Константин	Петропавловск-Камчатский
Яцко Евгений	Новосибирск



Где разорвётся верёвочка?

Положите палку на створки раскрытых дверей. Подвесьте к ней на тонкой верёвочке пластиковую бутылку с водой. Снизу к бутылке привяжите такую же верёвку и дёрните за неё. Где порвётся верёвочка – сверху или снизу?

Автор Яков Перельман
Художник Александра Будилкина