ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 2 | февраль 2018

Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 2

февраль 2018

ДРЕВНЕРУССКИЕ ЛОВУШКИ

ЧАСОВАЯ БИССЕКТРИСА

ДИСКИ НА КОЛЁСАХ

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

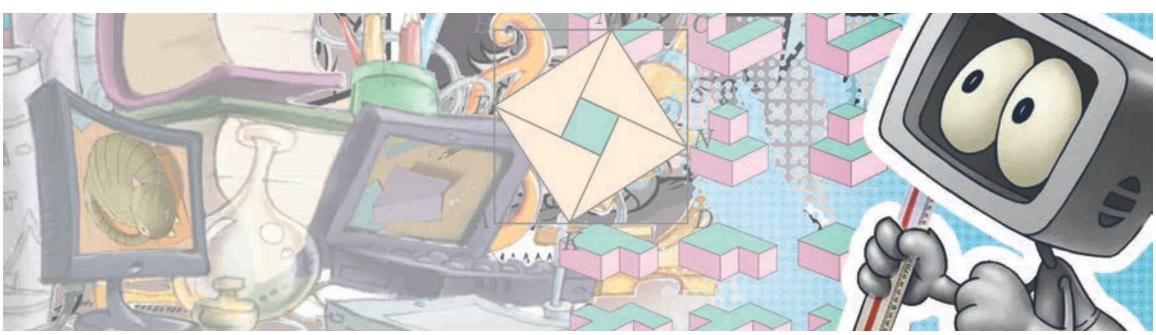
Журнал «Квантик» № 02, февраль 2018 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, В. А. Дрёмов, Е. А. Котко, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Евгений Паненко

Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное учреждение «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 28.12. 2017
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ № 110
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ



Часовая биссектриса

Игорь Акулич

– Даня! Давай-ка проверим твою память!

– Давай, Федя. Если это не больно.

– Помнишь ли ты задачу про стрелки часов, в которой использовалась медиана треугольника?

– Ещё бы – помню, конечно[1].

– Но ведь в треугольнике бывают не только медианы. А биссектрисы чем хуже?

– Подумать надо. Наверно, ничем. Разве что по мелочам...

– Вот именно. Поэтому вот тебе задача про *часовую биссектрису*[2]:

Сколько раз в сутки хотя бы одна из трёх стрелок правильно идущих часов является биссектрисой угла, образованного двумя другими стрелками?

– И всего-то? Да мы с тобой такого типа задачи как орехи щёлкаем! Даже как семечки.

– Так попробуй.

– Пожалуйста. Прежде всего, понятно, что можно рассмотреть не суточный, а полусуточный интервал времени, а потом результат удвоить – ведь в 12:00 все три стрелки занимают то же положение, что и в 00:00. Далее, как обычно в таких случаях, полный оборот обозначим за единицу. Тогда часовая стрелка может пройти путь x, где x лежит в пределах от 0 до 1. Стоп, нехорошо получается! Если мы берём строго полусуточный интервал, то надо исключить один из концов. Какой? Наверно, всё равно, но пусть – начальный. Итак, $0 < x \leqslant 1$, то есть x – строго положительное число, не превышающее 1. Теперь порядок!

Есть, конечно, три варианта – в зависимости от того, какая именно стрелка является биссектрисой. Пусть сначала часовая стрелка есть биссектриса угла между минутной и секундной стрелками. Если часовая стрелка прошла путь x, то минутная продвинулась на $12x$, а секундная – на $720x$. Как же «оформить» эту биссектрису? Чего молчишь – подсказывай!

– А не зафиксировать ли часовую стрелку? Свяжем с ней систему отсчёта. Тогда она становится как бы

[1]Статья «Часовая медиана», «Квантик» № 8 за 2015 г.
[2]Автор задачи неизвестен.

неподвижной – допустим, вертикальной (и пройденный ею путь равен нулю), зато остальные две прошли по кругу расстояния, равные $11x$ и $719x$. И если часовая стрелка – биссектриса, то получается, что угол, на который *отошла* одна из двух остальных стрелок от вертикали, равен углу, на который *не дошла* вторая стрелка до вертикали. Только вот как определить эти углы?..

– А не надо их определять. И вообще, мне твои подсказки не нужны – сам справлюсь!

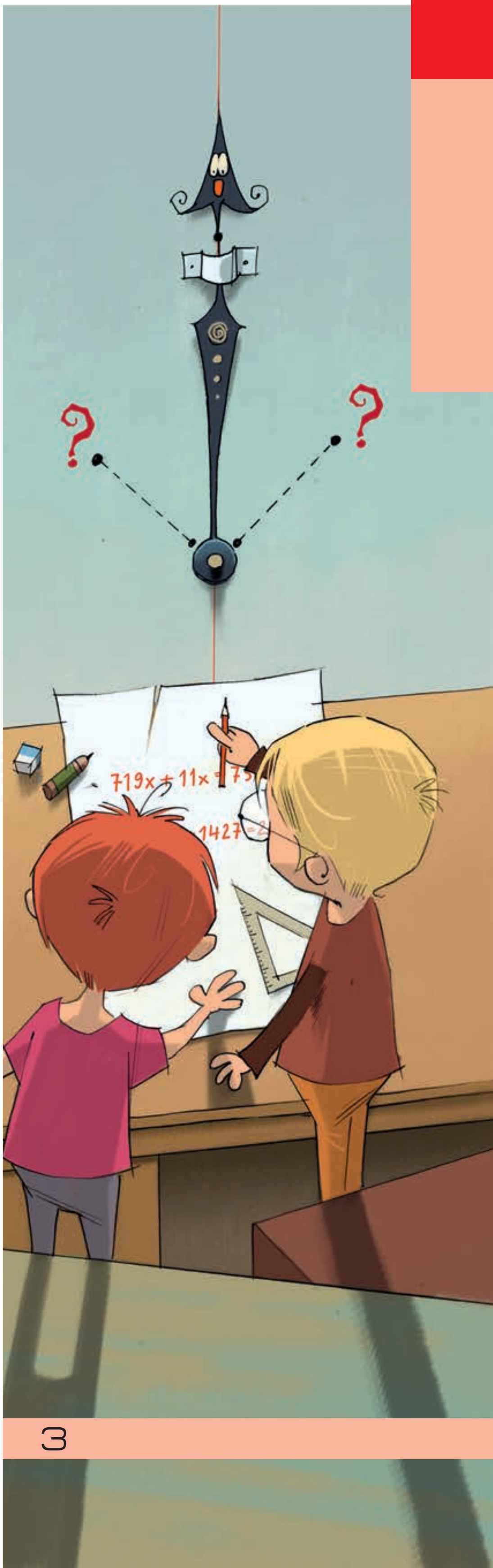
Заметь, что суммарно пути, пройденные минутной и секундной стрелками, дают целое число оборотов – равные углы отклонения от вертикали друг друга компенсируют. И наоборот – если суммарно число оборотов целое, то углы отклонения равны (ведь оба они меньше оборота и иначе друг друга не компенсируют). Дальше трудностей не видно: надо лишь выяснить, при каких положительных x, не превышающих 1, сумма $719x+11x=730x$ – целое число. Понятно, что x может быть любой из дробей: $\frac{1}{730}, \frac{2}{730}, ..., \frac{730}{730}$, и всего таких дробей ровно 730 штук. Вот так – треть задачи решена. Есть возражения?

– Вроде нет. Продолжай.

– Хорошо. Пусть теперь биссектрисой является минутная стрелка. Фиксируем её. Тогда часовая и секундная стрелки прошли пути $-11x$ (ишь ты – отрицательное число, то есть как бы крутится в обратную сторону) и $708x$. Снова получаем, что их сумма $697x$ – целое. Вот ещё 697 моментов времени. Наконец, если биссектриса – секундная стрелка, то целым числом должно быть... один момент... вот – $1427x$. Ещё 1427 решений. Всего же выходит $730+697+1427=2854$. Именно столько раз за половину суток одна из стрелок является биссектрисой между двумя другими!

– Ошибаешься. Ведь в 12:00 *каждая* из стрелок есть биссектриса, а момент-то один и тот же!

– Да, верно. Упустил. Значит, надо вычесть 2. Получаем за полусутки 2852 момента, а за целые сутки – вдвое больше, то есть 5704. Хотя... а вдруг ещё есть такие «кратные совпадения»?



– Думаю, что нет. Ведь если хотя бы две стрелки одновременно являются биссектрисами, то такое возможно только либо когда все три стрелки совпадают, либо образуют между собой три равных угла по 120°. А ведь мы с тобой, помнится, уже выяснили[3], что первое возможно, лишь когда все стрелки вертикальны, а второго не бывает никогда. Так что твой ответ верный, но... я вдруг понял, что уравнения тут вообще были не нужны.

– Это как?

– А вот как. Рассмотрим сначала пару стрелок – минутную и секундную. Создадим *фиктивную* стрелку, которая направлена по биссектрисе угла между ними, а точнее – *две* фиктивные стрелки, потому что в произвольный момент времени минутная и секундная стрелки образуют *два* угла (один из них, как правило, меньше развёрнутого, второй – больше, хотя иногда они могут оба стать развёрнутыми). В частности, в начальный момент (00:00) одна фиктивная стрелка направлена вверх (будем называть её «стрелка *А*»), а вторая – вниз («стрелка *Б*»). Ясно, что скорость вращения каждой фиктивной стрелки равна полусумме (или, что то же самое, среднему арифметическому) скоростей вращения минутной и секундной стрелок. Поэтому каждая фиктивная стрелка делает за полусутки $\frac{12+720}{2} = 366$ оборотов. Значит, надо всего лишь определить, сколько раз за этот период совпадут часовая и каждая из фиктивных стрелок. А такого рода задачи мы уже решали и выяснили[4]: если две стрелки, стартуя из одного положения, за какой-то промежуток времени делают k_1 и k_2 оборотов, где k_1 и k_2 – целые числа и $k_1 > k_2$, то в течение всего промежутка они совпадают ровно $k_1 - k_2$ раз (если исключить начальный момент, но включить конечный). А здесь у нас что? Фиктивная стрелка *А* делает 366 оборотов, а часовая – всего 1. Получается, что они за полсуток совпадут

[3] Статья «Приключения продолжаются», «Квантик» № 6 за 2012 г.

[4] Статья С.Дориченко «Приключения со стрелками», «Квантик» № 1 за 2012 г.

$366-1=365$ раз. Со стрелкой *Б* (которая изначально смотрит вниз) такой подход не годится – стартовые позиции не совпадают. Но сразу видно, что прежде, чем с часовой стрелкой пересечётся фиктивная стрелка *А*, с ней *непременно* совпадёт стрелка *Б*. Мысленно представь себе всю картину – и сразу согласишься.

– Да, соглашусь.

– Потому и стрелка *Б* совпадёт с часовой за полсуток тоже 365 раз. В целом же часовая стрелка совпадёт с фиктивными стрелками за полсуток $365\cdot 2=730$ раз, а за сутки – $730\cdot 2=1460$ раз.

Пусть теперь биссектриса – это минутная стрелка. Тогда фиктивные стрелки делают за полсуток по $\frac{1+720}{2}=360$ *с половиной оборотов*! Неприятно – число оборотов должно быть целым. Ну, тогда будем считать сразу за сутки – чего мелочиться? Получается 721 оборот. Минутная же стрелка делает за сутки 24 оборота. Поэтому каждая из фиктивных стрелок совпадёт с минутной $721-24=697$ раз в сутки, а обе вместе – $697\cdot 2=1394$ раза.

Остался последний случай: биссектриса – секундная стрелка. Поскольку здесь, очевидно, тоже полусутками не обойтись, можно сразу подсчитать, что каждая фиктивная стрелка сделает за сутки $1+12=13$ оборотов, секундная же – 1440 оборотов, и потому за сутки совпадение секундной стрелки с какой-либо из фиктивных будет иметь место $(1440-13)\cdot 2=$ $=2854$ раза.

Итого получается $1460+1394+2854=5708$ моментов в сутки, когда одна из стрелок является биссектрисой угла между двумя другими. Осталось «сбросить» пару «тройных совпадений» (в 12:00 и 00:00), и получим $5708-4=5704$ момента. Ответ тот же, что и у тебя.

– Слушай, поскольку и с медианой, и с биссектрисой мы разобрались, может, пришло время атаковать и высоту?

– Я бы и рад, но где её взять? Хотя «часовая высота» – звучит очень выразительно!

Художник Алексей Вайнер

Андрей Андреев,
Алексей Панов

ПОВТОРЯЕМ ОПЫТ ГАСПАРО БЕРТИ

Все мы часто слушаем прогноз погоды и хорошо знаем, что атмосферное давление измеряется в миллиметрах ртутного столба. Когда писались эти строки, атмосферное давление в Москве равнялось 743 мм ртутного столба, в Риме – 758 мм, во Флоренции – 761 мм.

Иногда давление измеряют в миллиметрах или метрах водяного столба. Чтобы перейти от «ртутного» давления к «водяному», нужно первое из них умножить на 13,6. Например, сейчас в Риме давление составляет 13,6×758 мм рт. ст.≈10309 мм вод. ст.≈≈10,31 м вод.ст. Коэффициент 13,6 появляется потому, что ртуть в 13,6 раз тяжелее воды.

Первым атмосферное давление измерил Эванджелиста Торричелли. В 1644 году он вместе с Вивиани провёл важнейший эксперимент. Метровую стеклянную трубку, запаянную с одного конца, заполнили ртутью, конец трубки закрыли пальцем и поместили в сосуд с ртутью. После того как палец убрали, часть ртути вылилась в сосуд, и ртуть в трубке установилась на высоте 76 см от уровня ртути в сосуде.

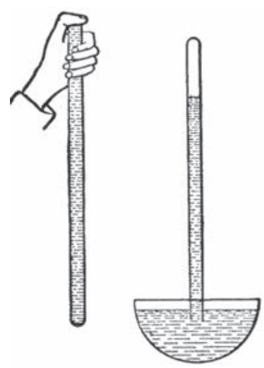


Рис. 1. Эксперимент Торричелли

Так что атмосферное давление во Флоренции в тот день не слишком отличалось от сегодняшнего. Вот что писал сам Торричелли по этому поводу:

На поверхность жидкости в чашке давит тяжесть 50 миль воздуха. Поэтому что же удивительного, если внутри стекла, где ртуть не испытывает ни влечения, ни сопротивления, поскольку там ничего нет, она стоит на таком уровне, что уравновешивает тяжесть внешнего воздуха, оказывающего на неё давление! В такой же трубке, но значительно более длинной, вода стоит на высоте 18 локтей, то есть во столько раз выше ртути, во сколько раз ртуть тяжелее воды, для того чтобы уравновесить ту же самую причину, оказывающую давление и в том и в другом случае.

Так Торричелли установил наличие атмосферного давления. Он понял, что давление столба воздуха над нами такое же, как у столба ртути высотой 76 см или у столба воды высотой 18 локтей (это около 10 м). Он изобрёл первый барометр и впервые в лабораторных условиях создал вакуум – *торричеллиеву пустоту*, расположенную в верхней части трубки на рисунке 1.

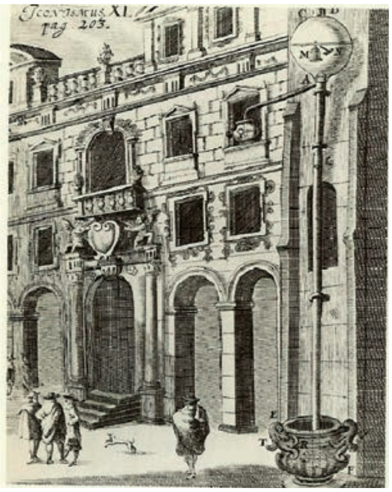


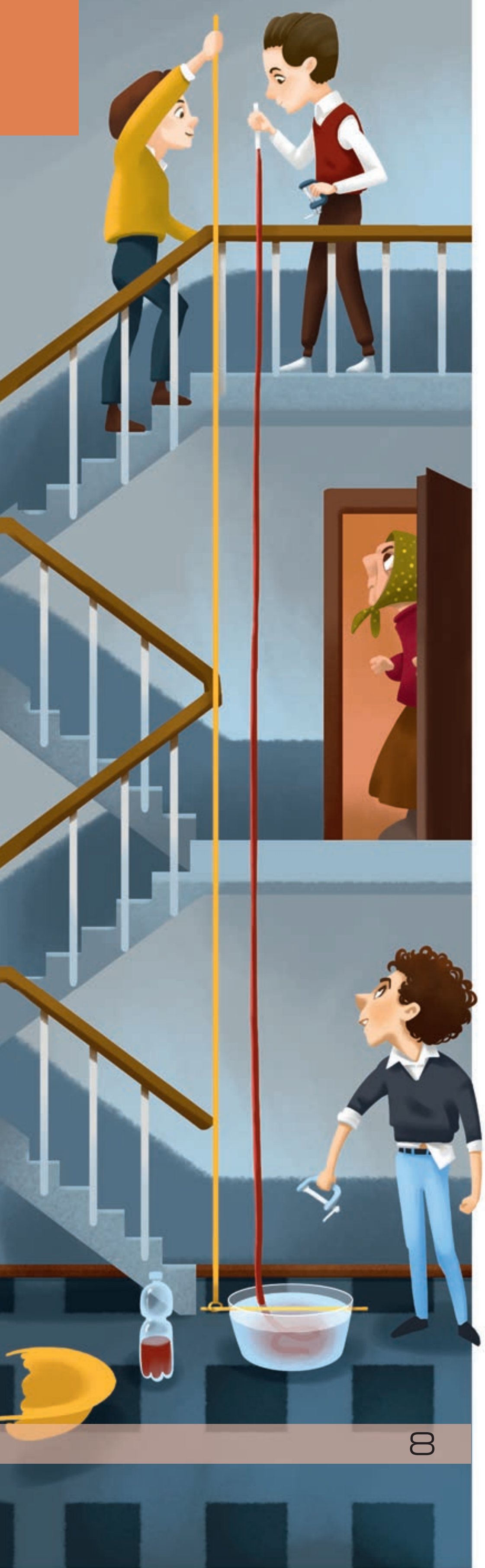
Рис. 2. Более поздний эксперимент Берти с продвинутым дизайном

Что касается трубки, заполненной водой на высоту 18 локтей, которую упоминает Торричелли, то это о римских экспериментах Гаспаро Берти, проведённых им около 1640 года. Берти использовал свинцовую трубу длиной больше 11 м. Сначала её заполняли водой и оба конца закупоривали. Затем трубу ставили вертикально, её нижний конец помещали в сосуд с водой и открывали. Часть воды из трубы выливалась, высота столба оставшейся в трубе воды была порядка 10 м. (Попробуйте придумать, как бы вы измерили высоту столба воды в непрозрачной свинцовой трубе; каким способом воспользовался Берти, нам неизвестно.)

Хоть Берти и предполагал наличие вакуума в верхней части трубы, он не смог доказать этого, да это было и не совсем верно. На самом деле пространство над уровнем воды в трубе было заполнено насыщенным водяным паром.

Подробнее об истории этих экспериментов и связанных с ними обстоятельствах читайте в тексте «Картезианский водолаз» на сайте «Квантика» kvantik.com/diver.pdf

Давайте воспроизведём эксперимент Берти, ограничившись более скромными, подручными материалами, на лестнице в вашем подъезде.



Вместо тяжёлой свинцовой трубы возьмите прозрачную ПВХ-трубку длиной 11 м с внутренним диаметром 6 мм и толщиной стенок 2 мм – стенки должны быть толстыми, чтобы верхнюю часть трубки не сдавило атмосферное давление. Ещё вам понадобятся две небольшие струбцины. Трубку заполните подкрашенной водой, на это уйдёт чуть больше 0,3 л. После заполнения самые кончики трубки сложите вдвое и сгибы зажмите струбцинами, обеспечив герметичность объёма внутри трубки (рис. 3).

Один конец трубки вместе со струбциной поместите в сосуд с водой (рис. 4), другой поднимите на всю длину трубки – больше 10 м, то есть на три этажа с лишним.

В трубке может остаться немного воздуха, например, в виде пузырьков, прилипших к стенкам. Чтобы его удалить, сначала простучите трубку пальцем по всей высоте снизу вверх. Тогда весь этот воздух поднимется к верхнему концу трубки. После этого открутите верхнюю струбцину, снова сложите вдвое трубку чуть ниже верхнего уровня воды в ней и зажмите сгиб.

Теперь можно разгерметизировать нижний конец трубки, находящийся в сосуде.

Рис. 3. Трубка заполнена подкрашенной водой, концы зажаты струбцинами

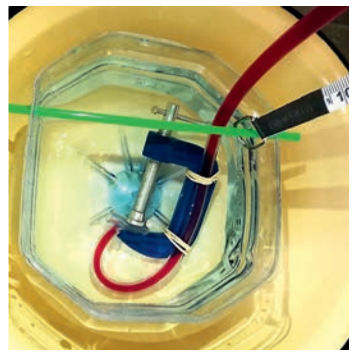


Рис. 4. Одна струбцина погружается в сосуд, нулевая отметка рулетки совмещается с поверхностью воды

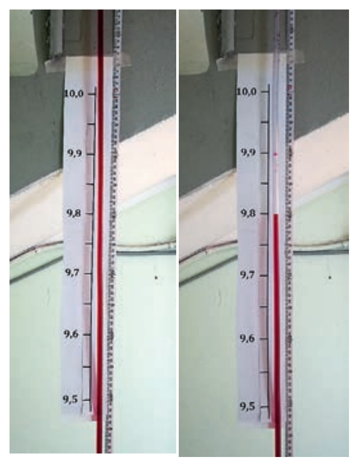


Рис. 5. До разгерметизации трубка заполнена доверху, после – уровень воды снижается до 9,8 м

При этом часть воды из трубки выльется в сосуд, оставшаяся установится на высоте примерно 10 м. В нашем эксперименте это было 9,8 м (рис. 5, справа).

На самом деле атмосферное давление на месте эксперимента в тот момент было 740 мм рт. ст., то есть 13,6×740 мм рт. ст.=10064 мм вод. ст.≈10,06 м вод.ст.

Это кажется достаточно далёким от полученных нами 9,8 м. Но если учесть давление насыщенных паров воды, заполняющих верх трубки, а при температуре 20 °С оно составляет 23,6 см вод. ст., то теоретически предсказанное значение высоты водяного столба уменьшится до 10,06 – 0,24 = 9,82 м вод. ст., что намного ближе к нашим экспериментальным 9,8 м.

В эксперименте Торричелли таких проблем не возникает – ведь давление насыщенных паров ртути при комнатной температуре составляет всего лишь 0,0013 мм рт. ст., практически 0. Так что ртутный барометр очень точно показывает значение атмосферного давления, а в верхней части трубки на рисунке 1 действительно глубокий вакуум – торричеллиева пустота.

Чтобы было легче ориентироваться в проделанных нами расчётах, приводим таблицу соответствия высот ртутного и водяного столбов и значения давлений насыщенных паров воды и ртути при 20 °С. Они пригодятся и для ваших собственных опытов и расчётов.

Высота ртутного столба	Высота водяного столба
1 мм	1,36 см
760 мм	10,33 м
750 мм	10,20 м
740 мм	10,06 м
730 мм	9,92 м

Давление насыщенных паров при 20 °С	
ртути	*воды*
0,0013 мм рт.ст.	23,6 см вод.ст.

И ещё один полезный факт: на небольших высотах над уровнем моря (скажем, до 500 м) при подъёме на каждые 12 метров атмосферное давление уменьшается примерно на 1 мм ртутного столба. Вы можете проверить это, захватив с собой барометр и поднявшись с ним на последний этаж своего дома. Посмотрите, насколько давление там ниже, чем на первом этаже.

Художник Мария Усеинова

Ольга Кузнецова

Древнерусские ловушки

Миша и Марк готовятся к олимпиаде по русскому языку. Особенно их интересуют задания с устаревшими словами, перевод с древнерусского.

– Вообще-то древнерусский язык не такой сложный, – говорит Миша, – я заметил, что если глагол кончается на *-ти*, то это всё равно, что современные начальные формы на *-ть*: пити – это пить, посылати – посылать. Меняешь конец – и всё, очень просто!

– Да? Но в нём есть и ловушки. Как ты думаешь, что означает «ветрило»? – спрашивает Марк.

– Ну, ветер такой сильный, ветрище! Что ж ещё, – уверен Миша. – Помнишь, у Пушкина: «Шуми, шуми, послушное ветрило» – попутного ветра герой просит.

– Не думаю. Это может быть ветер, – заметил Марк, – но смотри, что написано у нас в предложении: «Устали ум и мысли, ветрило и вёсла свисли». Как ветер может свиснуть?

– Обыкновенно, – оправдывается Миша, – как он обычно свистит в ушах…

– Нет же. Часто всё решает контекст, нужно смотреть на окружающие слова. Помнишь, что по-древнерусски значит «красный»?

– Красивый, прекрасный – это все знают! Красная девица, красный угол…

– Точно. Но у этого слова есть и значение цвета. Например, красной называлась масть лисицы, или вот я выписал: «дорога к красному болотцу».

– Ну, лисица-то правда по красоте могла так называться, – заспорил Миша.

– Да, а болото? Тоже по красоте? Давай проверим «ветрило» по словарю древнерусского языка.

– Действительно, – отозвался Миша, перелистывая словарь, – тут написано, что «ветрило» – это ещё и «парус». Значит, в нашем предложении опущены вёсла и паруса!

– Отлично. Читай, что там дальше.

– «Мудру мужу не подобает сваритися»… Это значит, если ты умный, то никогда не попадёшь в суп!

– Постой, какой суп? – нахмурился Марк. – Из людей, что ли?

– Из глупых людей, – уточнил Миша, – мудрецам вариться не подобает, тут так и сказано.

– Не вариться, а сваритися. Ты когда-нибудь слышал слово «свара»? Это ссора, спор.

– Значит, опять не то значение?

– Опять ловушка, – кивнул Марк. – Ну-ка, дай я следующее прочту: «Пришли люди от заходных стран». Имеются в виду, наверное, соседние страны, ведь туда чаще заходят.

– А вот и нет, я догадался! Солнце ведь восходит и заходит или «западает». Куда оно западает или заходит – там и запад. Значит, страны находятся на западе!

– Ты подглядывал, – возмутился Марк, указывая на словарную статью.

– Ну и что. Между прочим, читать словарь очень полезно. Давай следующее.

– «Коварство их как злая паучина», – пробормотал Марк, косясь на Мишу.

– Паучина – это как мужичина? Огромный паук?!

– Паучина – вариант слова «паутина». Коварство ведь похоже скорее на паутину, как-то глупо сравнивать его с одушевлённым. Нужно помнить, что в языке бывают всякие чередования, и облик слова обманчив. Смотри, вот ещё одно: «Червь красит царские одежды».

– Червяк-маляр, – оживился Миша, и его воображение живо нарисовало червя, держащего во рту кисточку и раскрашивающего царскую мантию.

– Погоди, меня гложет червячок сомнения, – возразил Марк, – давай проверим по словарю. Есть же такое слово «червлёный» – то есть красный… Ну точно! А «червити» – это красить в красный цвет, и слово действительно связано с особыми червячками, из которых раньше добывали пурпурную краску.

– Значит, речь идёт всего лишь о составе, которым красят одежду царя? – расстроился Миша.

– Не огорчайся! У меня для тебя ещё ворон есть!

– Какой ворон?

– Вот такое предложение: «Он попросил ворона мёда испити». Попробуй перевести сам.

– Хорошо. А я тебе тогда загадаю про лошадей: «Велено дати жеребей, кому достанутся земли».

Догадайтесь и вы, о чём идёт речь в этих фразах.

Художник Ольга Демидова

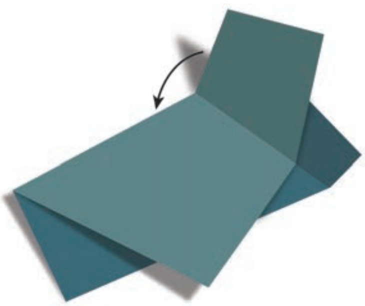
Николай Авилов

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАБАВЫ с бумажным квадратом

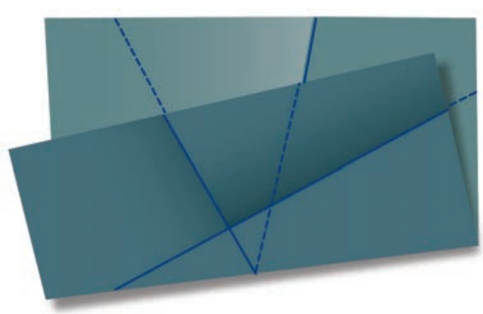
Бумажный квадрат – интересный объект для моделирования. Если перегнуть бумажный лист, а потом развернуть, на бумаге останется складка – фактически, мы провели на бумаге отрезок без помощи линейки. Перегибая бумажный квадрат, можно научиться откладывать отрезок, равный данному, отмечать середину отрезка, откладывать угол, равный данному, проводить биссектрису угла, строить перпендикулярные и параллельные отрезки и многое другое.

Такая игра с бумажным квадратом порождает своеобразную геометрию: роль прямых играют края бумажного квадрата и складки, возникающие при перегибах, а роль точек – вершины квадратного листа и точки пересечения складок между собой или с краями листа. Операции перегибания бумажного квадрата включают в себя всю геометрию одной линейки и даже позволяют использовать возможности циркуля, конечно, без проведения дуг окружности. Помимо проведения прямой через две точки, отметим два типа операций.

1. Перпендикуляры. Если мы сгибом квадрата совместим какие-то две точки, то получим срединный перпендикуляр между этими точками. А если сгибом квадрата наложим прямую на саму себя (рисунок справа), то получим перпендикуляр к этой прямой. При этом, выбирая место сгиба, мы можем провести перпендикуляр через любую данную точку.



2. Отражения. При сгибе по одной из прямых мы можем «обновить» все остальные сгибы, при этом соответствующие складки симметрично отразятся относительно первой прямой (добавятся складки по штриховым линиям на рисунке справа).



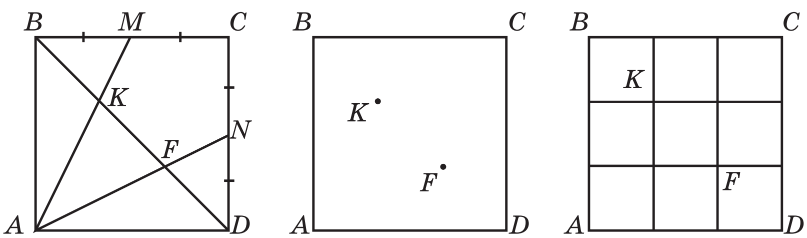
Запасёмся набором бумажных квадратов (в качестве таковых можно использовать бумагу для записей, которая продаётся в кубических блоках) и решим вместе несколько задач в качестве тренировки.

Пожалуй, самая простая задача – найти центр квадрата. Она легко решается проведением диагоналей квадрата – срединных перпендикуляров к парам противоположных вершин. Эту же задачу можно решить проведением срединных перпендикуляров к сторонам квадрата. Их точка пересечения будет центром бумажного квадрата. При этом бумажный квадрат окажется разделённым на 4 равных квадрата.

Попробуем разделить данный бумажный квадрат на 9 равных квадратов. В основе решения лежит красивая геометрическая задача.

Пусть M и N – середины сторон BC и CD. Оказывается, отрезки AM и AN делят диагональ BD квадрата $ABCD$ на три равные части: $BK = KF = FD$.

Попробуйте доказать этот факт самостоятельно, мы лишь подскажем, что помогут диагональ AC и свойство медиан треугольника.



Отсюда вытекает способ деления бумажного квадрата на 9 равных квадратов:

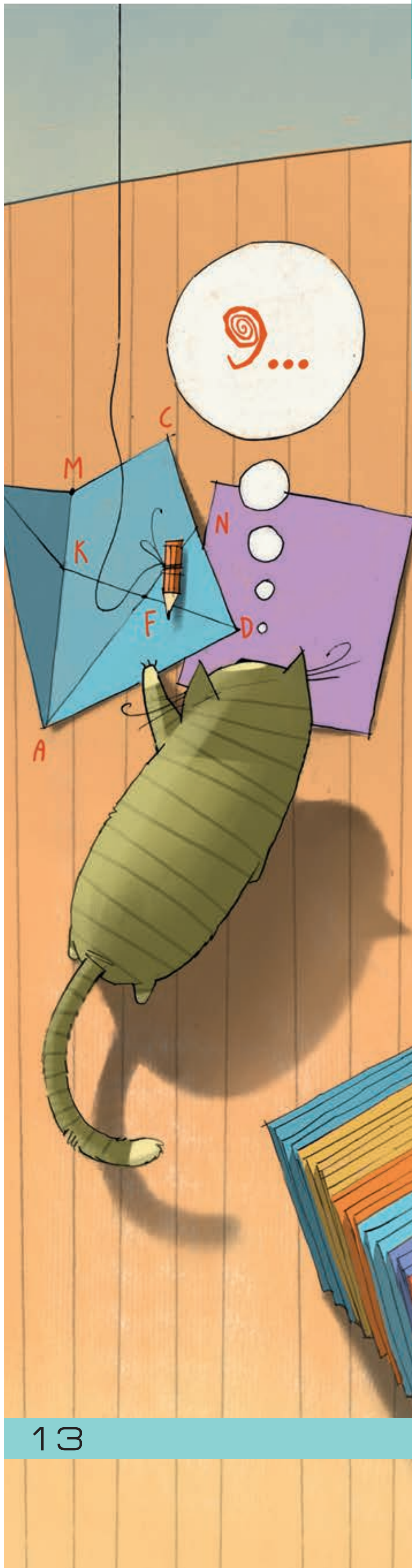
1) проведём диагональ BD;

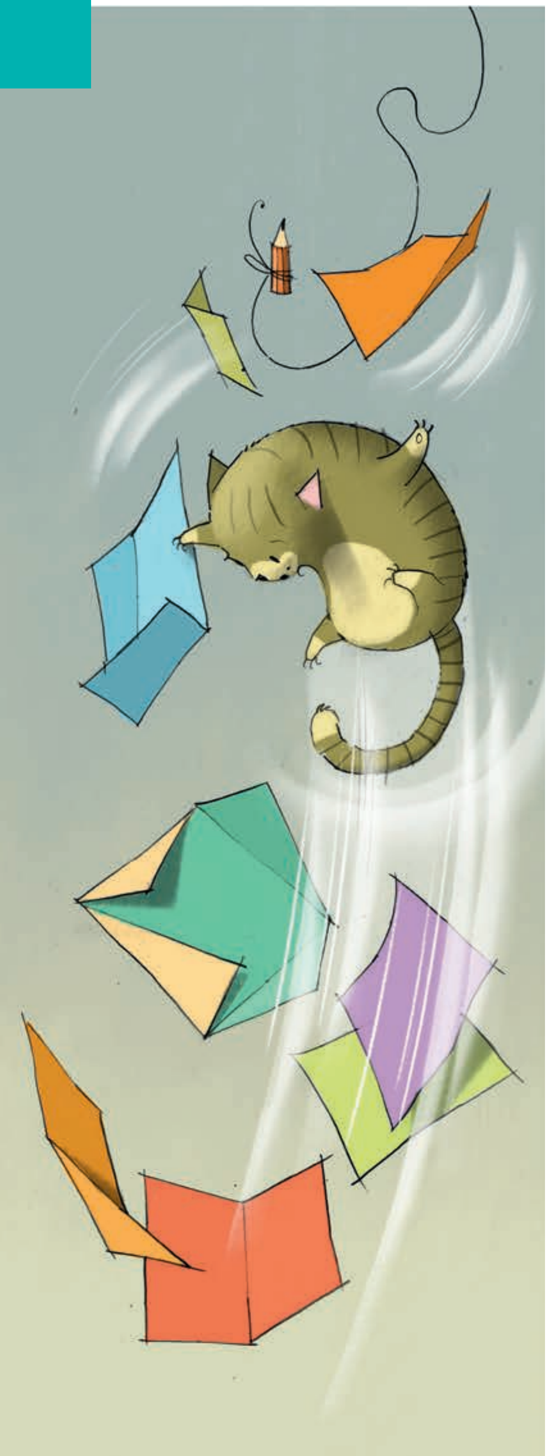
2) отметим середины M и N сторон BC и CD соответственно;

3) проведя прямые AM и AN, найдём точки K и F, делящие диагональ BD на три равных отрезка;

4) через точки K и F делаем перегибы, перпендикулярные соответствующим сторонам квадрата.

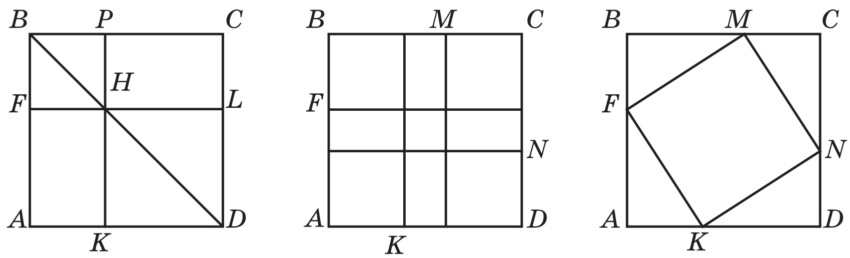
Чтобы вписать в данный бумажный квадрат другой квадрат, все вершины которого лежат на сторонах бумажного квадрата, нужно на краях бумажного квадрата найти четыре точки, равноудалённые от вершин углов. Сделать это можно так. Вначале перегнём лист



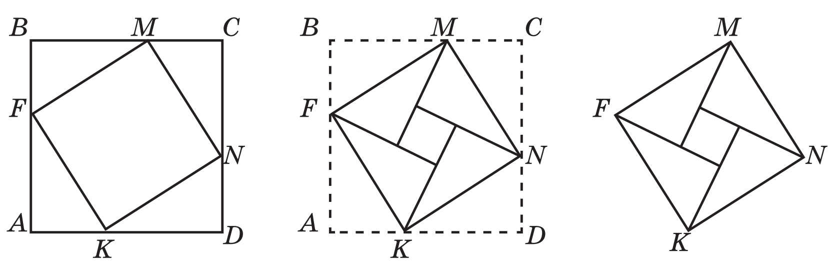


по диагонали BD, в верхней части листа проведём произвольный перпендикуляр FL к AB и отметим точку H их пересечения. Через точку H проведём перпендикуляр PK к FL. У нас получился квадрат $BPHF$, построенный при вершине B бумажного квадрата.

Далее, отразив относительно диагонали AC, получим четыре точки M, N, K и F, удалённые на одинаковое расстояние от вершин бумажного квадрата. Сделав перегибания FM, MN, NK и KF, получаем квадрат $MNKF$, вписанный в данный бумажный квадрат. (Точки M, N, K и F можно было получить и проще: найти центр бумажного квадрата и провести через него два взаимно перпендикулярных перегиба.)



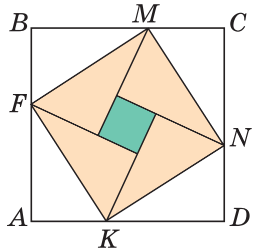
В полученном бумажном квадрате загнём внутрь четыре его угла. Мы получим квадрат $MNKF$, внутри которого находятся четыре прямоугольных треугольника, между которыми образовался маленький квадрат. Эта конфигурация в геометрии известна с давних времён: она использовалась для доказательства теоремы Пифагора. Древние индусы, не утруждая себя многословием, писали: «Смотри!». Они считали, что этого чертежа достаточно, чтобы обосновать утверждение: в любом прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Как же рассуждали древние индусы?



Пусть в прямоугольном треугольнике даны катеты a и b, для определённости $a \geqslant b$, и гипотенуза c, тогда площадь квадрата можно найти двумя способами.

Во-первых, она равна квадрату его стороны, то есть c^2, во-вторых, она равна сумме площадей четырёх прямоугольных треугольников с катетами a и b и площади внутреннего квадрата со стороной $a-b$. Поэтому верно равенство $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (a-b)^2$. После упрощений получим $c^2 = a^2 + b^2$. Вот так неожиданно, с помощью квадратного листа, мы доказали знаменитую теорему.

Взглянем на эту конструкцию ещё раз. Она содержит три квадрата: исходный большой квадрат со стороной $a+b$, средний квадрат со стороной c и малый квадрат со стороной $a-b$. Не поленитесь, найдите среднее арифметическое площадей большого и малого квадратов. Думаю, что результат вас удивит.



Теперь попробуйте решить несколько задач самостоятельно. Помните, что в основе всех перегибаний лежат свойства геометрических фигур, которые нужно сначала увидеть, потом обосновать.

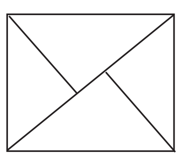
Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте угол 15°. *Указание*: вам потребуется новая операция, которая находит пересечение окружности данного радиуса с прямой.

2. Наложите два равных бумажных квадрата друг на друга так, чтобы одна их вершина была общей, а общая часть имела площадь, равную половине площади каждого квадрата.

3. Разделите бумажный квадрат на 25 равных квадратов.

4. Можно ли сложить бумажный квадрат в форме прямоугольного конверта, изображённого на рисунке справа? Уточним: без пробелов и наложений.



5. Сложите квадратный конверт с квадратным «окном», площадь которого составляет одну четвёртую часть площади исходного квадрата.

Художник Алексей Вайнер

ГРУЗИНСКИЕ МОНЕТЫ

Приведены оборотные стороны нескольких грузинских монет, чеканившихся после присоединения Грузии к России.

Двойной абаз 1808 года

Абаз 1815 года

Абаз 1831 года

Полуабаз 1804 года

Полубисти 1805 года

Полубисти 1810 года

Пули 1806 года

Приведён также современный грузинский алфавит, в котором не хватает нескольких букв по сравнению с алфавитом начала XIX века:

ა ბ გ დ ე ვ ზ თ ი კ ლ მ ნ ო პ ჟ რ ს ტ უ ფ ქ ღ ყ შ ჩ ც ძ წ ჭ ხ ჯ ჰ.

ВОПРОСЫ:

1. Где в алфавите стояла буква ჵ?

2. Сколько пули в одном бисти? Сколько бисти в одном абазе?

3. Что было отчеканено на полуабазе 1807 года? Двойном абазе 1819 года? Абазе 1923 года?

4. В штемпелях этих двух монет резчик допустил грубые ошибки. Какие?

Абаз 1804 года

Бисти 1806 года

Примечание. Надписи ქართული ფული и ქართული თეთრი – это не обозначения номиналов; они переводятся как «грузинская монета» (на медных монетах) и «грузинское серебро» соответственно.

Автор Михаил Гельфанд
Художник Артём Костюкевич

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Борис Дружинин

ПУТЕШЕСТВИЕ №9 ПО ЗООПАРКУ ЭЛЕМЕНТОВ

НИОБИЙ, МОЛИБДЕН, ТЕХНЕЦИЙ, РУТЕНИЙ, РОДИЙ

НИОБИЙ Nb

Nb 41 92,90638 НИОБИЙ

Ниобий занимает клетку №41. Минерал, из которого выделили ниобий, нашли в Северной Америке и назвали *колумбитом*. В самом начале XIX века, в образце колумбита, более ста лет хранившегося в Британском музее, английский учёный Хатчет обнаружил оксид неизвестного элемента, названного *колумбием*. А чуть позже шведский химик Экберг нашёл похожий оксид, который доставил много мучений химикам, пытавшимся растворить его в кислоте, так что элемент, образующий этот оксид, назвали *танталом*. Разительное сходство свойств колумбия и тантала привело учёных к выводу, что это один и тот же элемент, ему оставили имя тантал. И лишь 40 лет спустя установили, что это всё же разные элементы. Бывшему колумбию дали имя *ниобий* в честь дочери Тантала.

Ниобий придаёт сплавам высокую коррозионную стойкость. А детали химической аппаратуры, изготовленные из сплава ниобия с танталом, служат в среде сильных кислот – азотной или серной – до двух-трёх лет, в то время как подобные детали из нержавеющей стали не выдерживают более двух месяцев!

Ниобий хорошо поглощает газы и применяется при изготовлении вакуумных приборов. Алюминий, если в него ввести 0,05% ниобия, не реагирует со щелочами, хотя обычно в них растворяется. Некоторые сплавы ниобия обладают сверхпроводимостью, и из них делают обмотки мощных магнитов на ускорителях, в частности, на большом адронном коллайдере.

МОЛИБДЕН Mo

Mo 42 95,94 МОЛИБДЕН

Клетку №42 занимет *молибден*. Высокая твёрдость и прочность клинков самурайских мечей объясняется тем, что в железе была небольшая добавка молибдена. Молибден попадал туда из железной руды, содержащей примеси оксида молибдена. В Европе этот металл известен с конца XVIII века. Всё, что оставляло след на бумаге, в средние века называли молибденом от латинского *molibdaena*, что, в свою очередь, происходит от греческого μόλυβδος – свинец. Под это название попадали многие минералы – и свинец, и графит, и молибденит, из которого сейчас получают собственно молибден.

Выходит, молибден «украл» имя у свинца, хотя трудно найти металлы, более несхожие. К примеру, температура плавления свинца 327 °С, молибдена 2620 °С, и при нагревании свинец расширяется в несколько раз сильнее, чем молибден. Близки они лишь по плотности: у свинца 11,3 г/см^3, у молибдена 10,2 г/см^3.

Только вольфрам расширяется при нагревании слабее, чем молибден. В лампочках вольфрамовые нити накаливания подвешивают на молибденовых крючках, впаянных в стекло, потому что жаропрочное стекло расширяется так же, как молибден, и вольфрамовые крючки просто выпадали бы при нагревании.

Добавка молибдена в металлы повышает их прочность, вязкость и коррозийную стойкость. Из хромомолибденовой стали делают бронебойные снаряды, судовые валы и другие детали, испытывающие большие нагрузки. Оружейная компания «Винчестер» использовала эту сталь для винтовочных стволов.

Тугоплавкий, ковкий, не тускнеющий, приятного цвета молибден получил признание ювелиров. Им иногда заменяют драгоценную платину. Но гораздо дороже платины радиоактивный изотоп ^{99}Mo. Его цена достигает 50 миллионов долларов за 1 грамм. Почему – читайте ниже в рассказе про технеций.

ТЕХНЕЦИЙ Tc

Tc 43 97,9072 ТЕХНЕЦИЙ

В клетке №43 «живёт» *технеций*. Это самый лёгкий из элементов, не имеющих стабильных изотопов. Заполняя свою таблицу, Менделеев клетку №43 оставил пустой, предсказав существование элемента *экамарганец*. Неоднократно в неё пытались поместить вновь открытые элементы с именами ильмений, люций, ниппоний, мазурий, но каждый раз их успешно «закрывали». Дошло до того, что учёные начали сомневаться в существовании элемента №43 в природе. И сомневались правильно! К 1930 году учёные-ядерщики выяснили, что элемент №43 имеет только радиоактивные изотопы. Те, что оказались на Земле во время её рождения, давно распались, а новые атомы появлялись

лишь при спонтанном распаде урана в мизерных количествах, и найти их было практически невозможно.

Долго у элемента был лишь номер, но в 1947 году ему дали имя *технеций*, от древнегреческого τεχνητός – искусственный. Это первый синтезированный человеком элемент. Был воссоздан химический «динозавр», некогда существовавший в природе, но «вымерший» в результате радиоактивного распада.

В промышленности используется долгоживущий изотоп ^{99}Tc. Соли технециевой кислоты – эффективные ингибиторы (замедлители) коррозии железа и стали. Излучение ^{99}Tc используется в дефектоскопах – приборах, позволяющих обнаружить скрытые дефекты деталей машин и механизмов.

У ^{99}Tc есть короткоживущая разновидность – изотоп ^{99m}Tc, который за несколько часов превращается в ^{99}Tc. Выделяемое при этом мягкое излучение, безопасное для человека, позволяет диагностировать онкологические заболевания: изотоп ^{99m}Tc вводят в организм, и он задерживается в тканях или органах, поражённых опухолью. Излучение регистрируется с помощью томографии, подсвечивая опухоль на снимке. Столь малое время жизни изотопа ^{99m}Tc – и его преимущество (даже в малых количествах он достаточно активен), и недостаток (его нельзя заготовить впрок).

Изотоп ^{99m}Tc получается при β-распаде ^{99}Mo. Но и сам ^{99}Mo имеет период полураспада всего 66 часов, поэтому его производят непрерывно в ядерных реакторах из осколков деления урана U^{235} и в кратчайшие сроки доставляют потребителям. Вот почему и радиоактивный молибден, и технеций такие дорогие.

РУТЕНИЙ Ru

Ru 44 101,07 РУТЕНИЙ

Клетка №44 принадлежит рутению. *Рутений* открыл в 1844 году наш соотечественник Карл Карлович Клаус. Название «рутений» (на латыни *Ruthenia* – Россия) предложил немец Готфрид Озанн ещё в 1828 году для открытого им, но на самом деле несуществующего элемента. Он как в воду глядел!

Рутений относится к благородным металлам, которых насчитывается всего восемь. Из-за хрупкости он не поддаётся механической обработке. Поэтому украшений из него не делают, но добавляют к ювелирным сплавам для придания им прочности. А при нанесении на поверхность золота рутений придаёт ему графитовый цвет – получается так называемое *чёрное золото*. Металлический рутений не растворяется в щелочах, кислотах и даже в кипящей царской водке.

При «сжигании» урана в реакторах образуется новое ядерное горючее – *плутоний*. Одновременно возникают осколки деления ядер урана, в том числе и радиоактивные изотопы рутения, которых нет в природе. Отходы радиоактивного рутения опасны из-за летучести и хорошей растворимости в воде соединений рутения.

Сплав рутения и платины используется для изготовления износостойких электрических контактов, что принципиально для слаботочной аппаратуры.

РОДИЙ Rh

Rh 45 102,90550 родий

Родий занимает клетку № 45. Этот благородный металл, входящий в платиновую группу, получил имя от древнегреческого ῥόδον – роза, потому что растворы многих соединений родия имеют тёмно-красный цвет

Родий содержится в мизерных количествах в россыпях самородной «сырой» платины, основные мировые запасы которой находятся на Урале. В России выделяли только чистую платину, а другие металлы платиновой группы, которые сейчас дороже самой платины в десятки раз, шли в отходы. К 1843 году на Монетном дворе в Петербурге скопилось около полутора тонн таких отходов, и их продали за границу практически за копейки.

Родий очень дорог, но спрос на него стремительно растёт. Главным образом родий используется как катализатор – в частности, в фильтрах-нейтрализаторах выхлопных газов автомобилей. Производство азотной кислоты тоже не может произойти без платино-родиевого сплава. А ещё его поверхность отражает 80% видимой части спектра. Родий химически и механически износостоек, им покрывают технические зеркала высокоточных измерительных приборов.

Родиевое покрытие придаёт украшениям из белого золота и серебра особый блеск и красоту, не даёт мягкому металлу тускнеть из-за механических повреждений, а серебру ещё и не даёт окисляться. Но техническая ценность, трудность получения и скудость запасов родия в природе ограничивают его использование ювелирами.

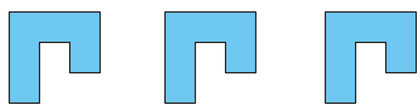
Художник Мария Усеинова

Владимир Красноухов

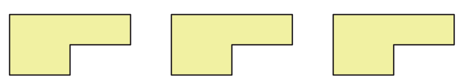
ДВУХСЛОЙНЫЕ ПИРОГИ

Головоломки такого типа появились и стали весьма популярны совсем недавно. В них требуется из заданных элементов составить две фигуры, одинаковые по форме и размеру. Как правило, решатели быстро находят простой (и зачастую эффективный) способ решения: составляют наобум некую плоскую фигуру из части заданных элементов, а затем пытаются её полностью покрыть оставшимися элементами. В случае неудачи строят и испытывают другую фигуру. В случае успеха получается своеобразный двухслойный пирог, отсюда и название этого семейства головоломок.

Задача 1. Используя три элемента гексамино (*A*), составьте фигуру в один слой так, чтобы её можно было полностью покрыть тремя элементами гексамино (*B*), рис. 1. Элементы можно перемещать и переворачивать как угодно, очертания сложенных фигур могут иметь любую форму и пустоты внутри, но слои должны полностью совпадать.



элементы *A*

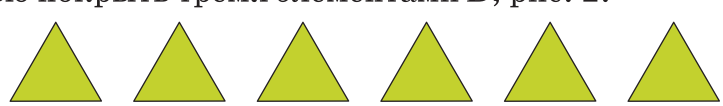


элементы *B*

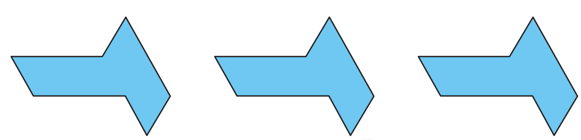
Рис.1

Приведём ещё один рецепт такого пирога.

Задача 2. Используя шесть элементов *A*, составьте фигуру в один слой так, чтобы её можно было полностью покрыть тремя элементами *B*, рис. 2.



элементы *A*



элементы *B*

Рис.2

Эта задача имеет два решения.

Естественно, пироги могут быть не только двухслойными, но и многослойными. Другой вопрос – повысится ли при этом занимательность задачи.

А вот если перейти от плоских (2D) фигурок к трёхмерным (3D), решение подобной задачи потребует большего напряжения пространственного воображения. Во всяком случае, метод слоёного пирога, используемый для 2D-фигур, здесь применить трудно.

Задача 3. Из каждой тройки элементов (пентакубиков) *A*, *B*, *C*, *D*, приведённых на рисунке 3, можно сложить тысячи связных фигур. Сложите в каждой тройке элементы так, чтобы получить четыре одинаковые фигуры.

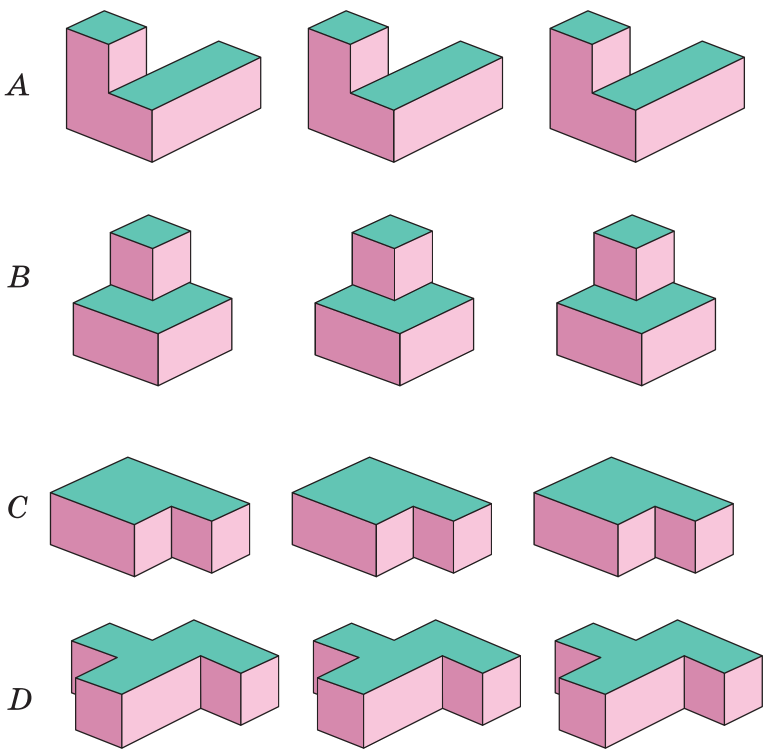


Рис.3

Нам известно единственное решение этой задачи. Желаем успеха!

Художник Динара Галиева

LXXXIV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовил
Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс, приглашаются все желающие. Первый (письменный) тур очередной олимпиады прошёл 18 ноября 2017 года. Мы приводим несколько задач этого тура для 6, 7 и 8 классов, попробуйте с ними справиться.

В 6 и 7 классах предлагалось по 4 задачи, а в 8 классе – 5, на решение отводилось 3 часа.

Избранные задачи I тура

1 (6 класс). Андрюша разделил прямоугольник четырьмя прямыми разрезами на 9 прямоугольничков и в каждой части написал, чему равен её периметр. Получилось 9 чисел, как на картинке. Известно, что ровно в одном прямоугольничке Андрюша ошибся. Найдите этот прямоугольничек. Не забудьте обосновать, почему ошибка находится именно в том прямоугольничке, который вы выбрали, а не в каком-то другом.

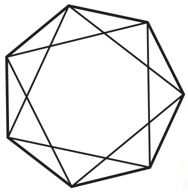
14	16	12
18	14	10
16	18	14

Андрей Солынин

2 (6 и 7 классы). За большим круглым столом сидят 100 человек: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, причём известно, что среди присутствующих имеется хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждый человек видит только 10 ближайших соседей справа и 10 ближайших соседей слева от себя. Каждого спросили: Ты видишь больше рыцарей, чем лжецов? Докажите, что кто-то ответит: Нет!

Ольга Иванова

3 (7 класс). В семиугольнике провели несколько диагоналей, как показано на рисунке, а в вершинах семиугольника расставили целые числа. Для каждой стороны семиугольника оказалось, что одно из чисел, стоящих на концах стороны, делится на другое. Может ли при этом так быть, что для любых двух чисел, стоящих на концах проведённой диагонали, ни одно из них не делится на другое?



Ольга Иванова, Сергей Иванов

4 (7 класс). Клетки доски 2017×100 (2017 горизонталей, 100 вертикалей) покрашены в шахматном порядке. Стоящая на доске фигура «кузнечик» держит под боем все клетки своей горизонтали, имеющие тот же цвет, что и клетка, на которой она стоит, а также все клетки своей вертикали, имеющие противоположный цвет. (Чтобы побить какую-то клетку, кузнечик может перепрыгивать через другие фигуры.) Какое наибольшее число не бьющих друг друга кузнечиков можно расставить на этой доске?

Надежда Власова

5 (8 класс). Наступила осень. Некоторые зелёные листья на дереве желтеют, а некоторые зелёные листья – краснеют. Жёлтые и красные листья, повисев немного, опадают. Вчера 1/9 всех листьев на дереве были зелёными, еще 1/9 – красными, а остальные – жёлтыми. А сегодня 1/9 всех листьев на дереве – зелёные, еще 1/9 – жёлтые, а остальные – красные. Докажите, что не менее 3/4 листьев, висевших вчера на дереве, опали за эту ночь.

Андрей Солынин

Художник Сергей Чуб

СВЕТ НА ЗАНАВЕСКЕ

На фото солнце просвечивает сквозь занавеску, сотканную из чёрных гладких лесок. Почему же мы видим три светящиеся кривые?

Автор Александр Бердников

Фото автора
Художник Алексей Вайнер

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 12, 2017)

16. *На острове три селения. В одном из них живут рыцари, в другом разбойники, в третьем торгаши. Рыцари всегда говорят правду, разбойники всегда лгут, а торгаши могут как сказать правду, так и солгать. Путешественник поговорил с тремя туземцами А, Б, В из трёх разных селений, не зная, кто откуда. Туземец А сказал, что Б рыцарь; Б сказал, что В разбойник; В сказал, что А торгаш. Солгал ли торгаш?*

Ответ: да, солгал. Если торгаш сказал правду, то про двух туземцев сказано правильно, поскольку рыцарь тоже сказал правду. Но тогда и про третьего сказано правильно. Получается, что лжец сказал правду, чего не может быть.

17. *На доске написано десятизначное число. Все его цифры различны. Может ли оказаться, что, вычеркнув две его последние цифры, получим число, делящееся на 2, вычеркнув три его последние цифры, получим число, делящееся на 3, ..., вычеркнув 9 его последних цифр, получим число, делящееся на 9?*

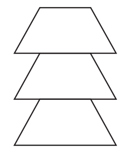
Ответ: нет, не может. Предположим, что условия про делимость выполняются. Вычеркнем из числа 9 последних цифр, останется только первая. Она делится на 9, значит, равна 9. Припишем к ней вторую цифру, получится число от 90 до 99. По условию оно должно делиться на 8, а такое число только одно, 96. Припишем третью цифру, получится число от 960 до 969. Только одно из них, 966, делится на 7. Значит, не все цифры различны, и такого быть не может.

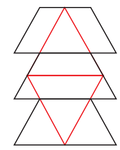
18. *На каждой клетке квадратной доски 10×10 стоит чёрная или белая фишка, причём всего тех и других поровну. Разрешается поменять местами две разноцветные фишки, стоящие рядом (в соседних по стороне клетках), или убрать с доски две одноцветные фишки, стоящие рядом. Верно ли, что всегда возможно убрать все фишки с доски, действуя по правилам, как бы фишки ни были расположены вначале?*

Ответ: да. По условию можно менять местами соседние фишки разного цвета. Обмен местами соседних фишек одного цвета ничего не меняет. Поэтому можно считать, что менять местами разрешается любые две соседние фишки.

Понятно, что тогда за несколько перестановок любую фишку можно поставить на любую клетку. Заполним верхнюю половину квадрата чёрными фишками (а нижнюю – белыми). После этого удалить все фишки не составит труда.

19. *Николаю Ивановичу – любителю занимательных задач – нравится наряжать игрушками-головоломками новогоднюю ёлку для внуков. Он приготовил из плотной бумаги правильный тетраэдр (треугольную пирамидку из равносторонних треугольников). Затем разрезал его хитрым способом и получил ёлочку (она составлена симметрично из трёх равных половинок правильного шестиугольника, см. рисунок вверху). Как ему это удалось?*





Свернём елочку по красным линиям (см. рисунок справа). Получим исходный тетраэдр.

20. *В школьном химическом кабинете имеются двухчашечные весы с набором из 20 гирек массами 1 г, 2 г, ..., 20 г. Коля разложил все эти гирьки по чашкам весов так, что они уравновесились. Петя хочет убрать часть гирек так, чтобы равновесие сохранилось. Какое наименьшее количество гирек ему потребуется снять, чтобы гарантированно добиться успеха (как бы ни были разложены гирьки по чашкам)?*

Одной гирькой Петя не обойдётся: чашка, с которой он снимет гирьку, станет легче. И двух гирек недостаточно: чашка, с которой будет снята более тяжёлая гирька, станет легче.

Докажем, что три гирьки Петя может снять всегда (сохранив равновесие), как бы Коля ни разложил их по весам. Заметим, что суммарная масса гирек равна $1+2+\ldots+20=210$ г, и потому изначально суммарная масса гирек на каждой чашке равна $210:2=105$ г.

Предположим, гирьки разложены так, что Петя не может уравновесить весы снятием трёх гирек. Пусть гирька массой 1 г лежит, например, на левой чашке, и пусть k – масса следующей по величине гирьки на левой чаше. Заметим, что гирька массой $k+1$ лежит на левой чашке (иначе мы уравновесим её гирьками 1 и k), тогда и гирька массой $k+2$ – тоже, и т.д. Значит, на левой чашке лежат гирьки массами 1, k, $k+1$, ..., 20 г, а на правой – массами 2, 3, ..., $k-1$ г. Тогда $105=2+3+\ldots+(k-1)$. Но это невозможно: при $k\leqslant15$ сумма не превосходит 104, а при $k>15$ сумма не меньше 119. Противоречие.

ЧЕРВОНЦЫ («Квантик» № 1, 2018)

Ясно, что особенной является одна из монет 37½ рубля и 25 рублей, потому что весят они одинаково, а достоинства у них разные. Так что надо понять, какая из них соответствует двум оставшимся, а для этого надо определить соотношение мер веса и номинала. Из сравнения монет 7½ рубля и 10 рублей ясно, что 2½ чеканятся из 43,56 доли золота, стало быть, 10 рублей – из 174,24 доли, то есть 1 золотник это 174,24 – 78,24 = 96 долей. Дальше можно действовать по-разному; чтобы не делить и умножать много дробей, давайте их складывать.

25 рублей = 2 × 7½ + 10 рублей = (переводим в вес) = (2 + 1) золотника (2 × 34,68 + 78,24) доли = 3 золотника 147,6 доли = 4 золотника 51,6 доли. Не сходится.

37½ рублей = 5 × 7½ = (переводим в вес) = = 5 золотников (5 × 34,68) доли = 5 золотников 173,4 долей = 6 золотников 77,4 доли. Сходится!

Итак, в старой стопе отчеканена монета в 25 рублей. Чтобы ответить на второй вопрос, разделим содержание золота в этой монете на то, которое должно было быть по новой стопе. (6 золотников 77,4 доли) / (4 золотника 51,6 доли) = = 653,4 доли / 435,6 доли = 1,5. Монета старой стопы оказалась в 1,5 раза тяжелее, чем надо было. Стало быть, реформа состояла в уменьшении золотого содержания рубля в полтора раза.

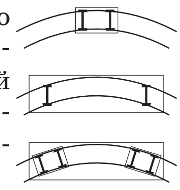
Примечание. Объясним, откуда взялись дополнительные номиналы «2½ империала» и «100 франков». Дело в том, что реформа проводилась в два этапа. В 1895 году была введена новая единица – империал, равная 10 старым рублям. В 1897 году её приравняли к 15 новым рублям. Так что на монете 1908 года указаны не новые, а старые рубли. А до того, ещё в 1886 году, содержание золота в (старом) рубле было выбрано с таким расчётом, что 5 рублей равнялось 20 французским франкам и приравненным к ним монетам Латинского монетного союза, существовавшего в Европе в конце XIX – начале XX веков (подробнее см. trv-science.ru/2017/08/29/predshestvennik-evro). Обе эти монеты были отчеканены очень небольшим тиражом и не имели широкого хождения, а использовались для подарков придворным.

XL ТУРНИР ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

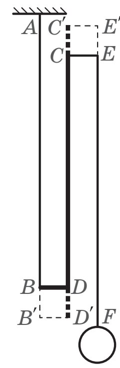
(«Квантик» № 1, 2018)

Физика

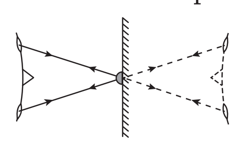
1. Современные железнодорожные вагоны значительно больше вагонов XIX века – и по длине, и, особенно в случае грузовых вагонов, по весу. Поэтому первая причина заключается в том, что нагрузку от более тяжёлого вагона требуется распределить на большее количество колёсных пар. Однако это не объясняет того, зачем четыре оси нужны в гораздо более лёгких пассажирских вагонах. Заметим, что двухосные вагоны с трудом могли проходить повороты (если бы между рельсами и колёсами не было зазора – не могли бы совсем, см. верхний рисунок). Сделать длинный вагон, оставив его двухосным, невозможно – он сойдёт с рельсов на первом же повороте, потому что оси его колёс окажутся не перпендикулярными рельсам (средний рисунок). Нижний рисунок объясняет, как наличие колёсных тележек решает эту проблему.



2. Нарисуем, как будет выглядеть подвес после теплового расширения, если его длина не изменилась. Точки A и F остаются на месте, а остальные точки переходят в штрихованные. Так как боковые стержни сделаны из одного и того же металла, их удлинения одинаковы – $BB' = EE'$. Тогда удлинение центрального стержня – $CC' + DD' = EE' + BB'$, то есть в два раза больше, чем удлинение каждого из боковых стержней.



3. Плоское зеркало даёт мнимое изображение предмета (в нашем случае, мальчика), расположенное симметрично относительно плоскости зеркала. Когда мальчик закрыл изображение зажмуренного левого глаза, его палец оказался ровно посредине между правым глазом и изображением левого, то есть напротив носа. Если теперь он зажмурит правый глаз и посмотрит левым, то в силу симметрии закрыто пальцем будет изображение правого глаза.



Астрономия

Представьте, что вы держите перед собой мяч и крутитесь равномерно, стоя на одном месте. Примерно как этот мяч, Луна вращается вокруг Земли: она обращена к Земле всегда одной и той же стороной. В любой точке этой стороны на лунном небе видна Земля, причём она висит в небе неподвижно (на земном небе таких «неподвижных» спутников, планет, звёзд не увидишь). С обратной стороны Луны Землю не видно. Казалось бы, тогда никаких восходов и заходов не может быть, но это только в такой упрощённой модели. Так как движение Луны отличается от модельного, то и Земля совсем немного, но движется по Лунному небу. Зайти за горизонт она может только при наблюдении с тех точек Луны, в которых Земля всё время почти у горизонта. Такие точки расположены на границе между видимой и невидимой частями Луны. Заход Земли там бывает один раз за один период обращения Луны вокруг Земли, то есть примерно за 27,5 суток.

Ни один человек, находясь на поверхности Луны, не видел восхода Земли. Но 24 декабря 1968 года экипаж аппарата Аполлон-8 сделал фотографию «Восход Земли» (англ. *Earthrise*), когда делал оборот вокруг Луны.

В разных точках Луны заходы Земли происходят по разным причинам. Ось Луны немного наклонена к плоскости её орбиты, поэтому, облетая вокруг Земли, Луна обращена к ней то одним, то другим полюсом; соответственно и Земля видна над горизонтом то с одного полюса, то с другого. Всё точно так же обстоит и на земных полюсах с заходами Солнца. А в точках на границе видимой и невидимой частей Луны, которые находятся далеко от полюсов, заходы бывают по другой причине: из-за того что орбита Луны не круговая. Дело вот в чём. Вокруг своей оси Луна вращается с постоянной скоростью. Это вращение компенсировано движением Луны по орбите, так как она нам видна всегда только с одной стороны. Но Луна, как любой спутник, соблюдающий второй закон Кеплера, движется быстрее, находясь ближе к Земле, чем когда она находится дальше от Земли. Из-за этого, когда Луна далеко от Земли, её собственное вращение обгоняет орбитальное, а когда Луна близко – отстаёт. Вот нам и открываются небольшие участки «невидимой» стороны Луны. Происходит это с таким же периодом, с каким Луна вращается по орбите.

Биология

1. Сходства. Очень многие сходства объясняются основной защитной функцией кожи и коры. И кора, и кожа – это сложный комплекс тканей, имеющий слоистое строение. Наружный слой состоит из плотно сомкнутых клеток, создающих хорошую границу между организмом и внешней средой. Клетки самого наружного слоя мёртвые и относительно плотные. Характерно нарастание наружного слоя изнутри и слущивание внешних слоёв клеток. Кожа и кора обеспечивают газообмен между внешней средой и внутренними слоями клеток, могут в определённой степени служить для выведения продуктов обмена. Содержат элементы транспортных систем организма (луб в коре и кровеносная система в коже), могут содержать элементы, выполняющие запасающую функцию. В коже человека много желёз, кора дерева также часто имеет железистые клетки.

Различия. Кора твёрже и гораздо менее эластична, чем кожа (так как кожа покрывает более подвижные органы). Кожа имеет волосяной покров, кора – нет. Выделения кожных желёз человека (потовых, сальных) принципиально отличаются от выделений коры дерева (смола, камедь). Функцию газообмена в коре выполняют специальные структуры чечевички, в коже специализированных структур нет. В коже располагаются чувствительные нервные окончания – рецепторы, в коре чувствительных элементов нет. Слой делящихся клеток, обеспечивающих нарастание наружного слоя, в коже функционирует всю жизнь, а в коре периодически отмирает и закладывается заново в более глубоком слое.

2. Животные могут обеспечивать перенос пыльцы (опыление), участвовать в распространении спор, плодов и семян. Прохождение семян через кишечный тракт животных может улучшать прорастание семян. Животные могут рыхлить почву вокруг растения, обеспечивать удобрение растений продуктами жизнедеятельности, способствовать вегетативному размножению растений, перенося части, прорастающие на новом месте. Объедая растение, животные могут способствовать разрастанию растения в ширину, ветвлению, образованию дерновин и т.п., могут удалять старые части, от которых растению полезно избавиться. Животные могут приносить конкурентам данного растения вред (поедать, вытаптывать и др.) больший, чем ему самому, могут защищать растение от более активных и опасных пожирателей. Вытаптывая, перекапывая почву, животные организуют места, где могут прорастать семена и споры. Человек (как одно из животных) может обеспечивать рост культурных растений.

МЕНЯЕТСЯ ЛИ ВЕС? («Квантик» № 1, 2018)

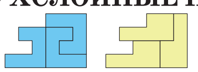
Вес может уменьшиться, если писать стилом по восковой или глиняной дощечке: часть воска или глины удаляется при письме. Очень сильно вес уменьшится, если выбивать текст на каменной плите большими буквами – изымается много каменной крошки. Стены храмов Древнего Египта испещрены иероглифами, из-за чего эти стены стали легче, возможно, на тонны камня.

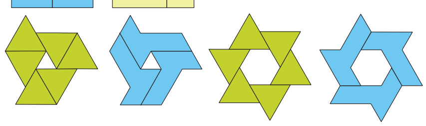
Бывает, что вес не меняется. Например, древние инки и древние китайцы фиксировали информацию, завязывая узелки на цветных шнурах. А ещё не меняется вес современной электроники – компьютеров, планшетов, смартфонов. При внесении информации изменяются значения некоторых битовых ячеек с 0 на 1 и наоборот в памяти устройства. В магнитных носителях и магнитных лентах (жёстких дисках) ячейкой служит намагниченная область, и меняется её магнитная ориентация, а в оперативной, флэш- и твердотельной памяти – транзистор, и меняется его электрический заряд.

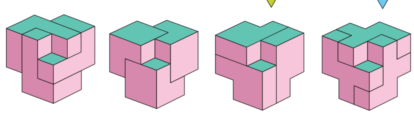
ДРЕВНЕРУССКИЕ ЛОВУШКИ

Конечно, ворон и жеребцы – это ловушки. «Воро́на» – краткое прилагательное, образованное от слова «вороной», чёрный (ср. «вороной конь»). То есть, герой попросил, чтобы ему дали выпить чёрного мёда. «Дати жеребей» – это назначить жеребьёвку, ср. «бросить жребий», речь идёт о разделе земли.

ДВУХСЛОЙНЫЕ ПИРОГИ

1. 

2. 

3. 

LXXXIV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ.

Избранные задачи I тура

1. В этой задаче мы сталкиваемся с «парадоксом следователя». При расследовании преступления следователь не может доверять показаниям ни одного из подозреваемых, поскольку каждый из них может оказаться преступником, который пытается обмануть следователя. Как же тогда вообще можно что-нибудь расследовать?

Пока мы сами не занялись расследованиями, выход кажется понятным: надо «перепроверять» поступающую информацию: если люди дают разные показания, то это «подозрительно», а если показания согласуются, то это «хорошо».

Приступим к решению задачи. Сделаем простое наблюдение: разность периметров двух прямоугольников из одного столбца равна удвоенной разности их высот. Значит, если мы возьмём две строки и для каждого столбца найдём разность периметров прямоугольников из этих двух строк, то все три разности совпадут.

Разности написанных чисел действительно совпадают, если мы возьмём 1-ю и 3-ю строку. Но, если брать 2-ю строку с 1-й или 3-й, то разность в первом столбце будет отличаться от двух других.

Итак, неверное число стоит в прямоугольничке на пересечении первого столбца и второй строки. А теперь ещё задача: исправьте ошибку!

2. Допустим, что все сидящие за столом ответили «да». Рассмотрим рыцаря и лжеца, сидящих рядом (такая пара всегда найдётся: за столом есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец, и мы будем идти вдоль стола от рыцаря к лжецу).

Назовём рыцаря Ричардом, а лжеца – Леонардом. Ричард видит вокруг как минимум 11 рыцарей. Леонард видит тех же самых рыцарей, кроме, возможно, одного: 11-го соседа Леонарда со стороны Ричарда. Но взамен он видит самого Ричарда, и значит, тоже видит хотя бы 11 рыцарей. В таком случае Леонард обязан ответить «Нет».

3. Пусть нам удалось расставить числа в вершинах семиугольника требуемым способом. Если числа a и b стоят в соседних вершинах и a делится на b, поставим на стороне семиугольника стрелку, ведущую от a к b (если $a=b$, поставим стрелку произвольно). Такую расстановку стрелок выполним на всех сторонах семиугольника.

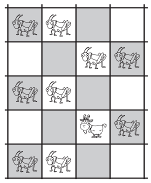
Заметим, что никакие две соседние стрелки не могут быть направлены одинаково. Действительно, пара стрелок $a \to b \to c$ означает, что a делится на b, b делится на c, и значит, a делится на c, что запрещено условием, поскольку числа a и c соединены диагональю. Тогда, двигаясь вдоль семиугольника, мы будем наблюдать, что направления стрелок чередуются. Но это невозможно, так как стрелок нечётное число – сделав круг, мы получим противоречие.

4. Эта задача относится к типу «оценка плюс пример». Для решения нужно привести ответ, доказать, что он реализуется, то есть предъявить пример расстановки заявленного числа кузнечиков, а также доказать, что ни в какой ситуации на доске невозможно расставить большее число кузнечиков – это и есть оценка.

Ответ: 4034.

Оценка. На каждой горизонтали может стоять не более двух кузнечиков: иначе какие-то два обязательно окажутся на клетках одинакового цвета и, значит, будут бить друг друга. Поскольку доска содержит 2017 горизонталей, число кузнечиков не может превышать $2 \cdot 2017$.

Пример. Достаточно занять кузнечиками 4 вертикальных ряда, как показано на рисунке. На каждой горизонтали стоит два кузнечика, поэтому суммарное число кузнечиков равно как раз $2 \cdot 2017$.



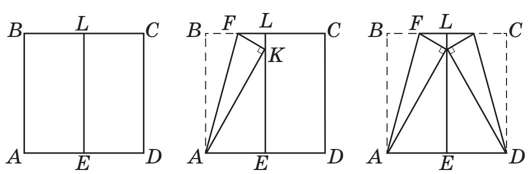
5. Последим за суммарным количеством зелёных и красных листьев. Вчера зелёные и красные листья составляли вместе $2/9$ от вчерашнего числа листьев на дереве, а сегодня – $8/9$ от сегодняшнего числа листьев на дереве.

За ночь суммарное число зелёных и красных листьев могло лишь уменьшиться, поскольку за ночь некоторые красные листья могли опасть, а некоторые зелёные могли перекраситься в жёлтые. Поэтому количество листьев, составлявшее $2/9$ от вчерашнего числа листьев на дереве, сегодня составило бы не менее $8/9$ от сегодняшнего числа листьев на дереве. Значит, за ночь число листьев уменьшилось не менее чем в 4 раза.

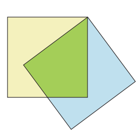
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАБАВЫ С БУМАЖНЫМ КВАДРАТОМ

1. Построим вертикальную ось симметрии EL. Новая операция такова: перегнём квадрат так, чтобы B попала на EL, а линия сгиба прошла через A. Получим точки K и F как на рисунке ниже. Точка K и будет пересечением EL с окружностью с центром в A, проходящей через B.

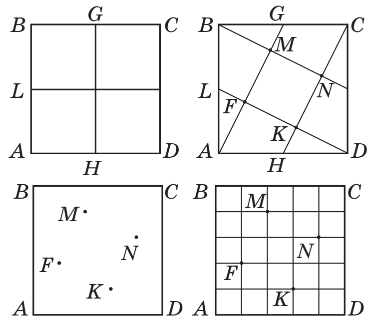
Получился угол $\angle FAK = 15°$. Почему? Отрезки AB и AK равны как радиусы окружности. Если мы повторим симметричное построение со второй стороны квадрата, то получим $CD = KD$. Значит, треугольник AKD – равносторонний, $\angle KAD = 60°$. Значит, $\angle KAB = 30°$, и $\angle FAK = 15°$.



2. Найдём середину стороны у каждого квадрата и наложим их, совместим между собой середины сторон и вершины как на рисунке.

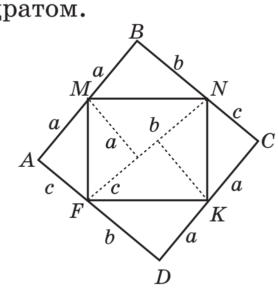


3. (А. М. Домашенко). Из каждой вершины бумажного квадрата $ABCD$ проведём отрезки к серединам соответствующих сторон. Пересекаясь, эти отрезки образуют внутренний квадрат $MNKF$. Отметим его вершины и через каждую из них проведём по два взаимно перпендикулярных отрезка, параллельных сторонам квадрата. Бумажный квадрат окажется разделён на 25 равных квадратиков. Как обосновать? С помощью теоремы Фалеса.

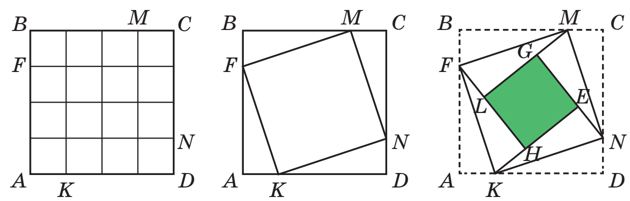


Любознательные могут попробовать решить не менее интересную задачу: разделить бумажный квадрат на 49 равных квадратов.

4. Нельзя. Если развернуть конверт, то получится прямоугольник $ABCD$, а не квадрат. В самом деле, заметим, что $AB = 2a$, $BC = b + c = FN$, но $FN > AB$, так как $ABNF$ – прямоугольная трапеция, значит $BC > AB$, поэтому $ABCD$ не является квадратом.



5. Разделим бумажный квадрат $ABCD$ на 16 равных квадратов и отметим четыре точки M, N, K и F, которые являются вершинами квадрата. Перегибая по отрезкам FM, MN, NK и KF, отложим внутрь прямоугольные треугольники и получим квадратный конверт с квадратным «окном» $GEHL$. Нетрудно подсчитать, что его сторона равна $3 - 1 = 2$, значит, площадь равна 4, что составляет четверть площади исходного квадрата.



наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач VI тура, с которыми справитесь, не позднее 1 марта в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: goo.gl/HiaU6g), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VI ТУР

26. На гранях кубика написаны натуральные числа от 1 до 6 в каком-то порядке. Если на двух соседних гранях стоят соседние числа (то есть отличающиеся на 1), то покрасим ребро между ними в красный цвет, а в противном случае – в синий. Каково наименьшее возможное количество красных рёбер?

27. На кинопремию «Оскар» были выдвинуты пять режиссёров, но получил её только один. Когда у каждого из них спросили, кто получил премию, первый режиссёр назвал себя, второй режиссёр назвал себя и ещё одного режиссёра, третий – себя и ещё двоих, четвёртый – себя и трёх других, а пятый – всех пятерых. Впоследствии выяснилось, что ни у каких режиссёров не оказалось равного числа людей, названных ошибочно (которые не получили премию). Кто получил «Оскар»?

Авторы: Борис Френкин (26), Константин Кноп (27), Григорий Гальперин (28, 29), Игорь Акулич (30)

28. Выпишем по возрастанию все положительные несократимые дроби, меньшие 1, знаменатели которых меняются от 2 до 2018. Чему равно среднее арифметическое этих дробей?

29. Можно ли разрезать квадрат на конечное число а) правильных пятиугольников; б) выпуклых пятиугольников?

30. *Треугольным* называют число, равное сумме всех натуральных чисел от 1 до какого-то натурального числа включительно. Вот первые несколько треугольных чисел: 1, $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10$, и т.д. Петя, исследуя их свойства, сформулировал две теоремы:

I. *Если сумма двух треугольных чисел является степенью двойки, то и их разность является степенью двойки.*

II. *Если разность двух треугольных чисел является степенью двойки, то и их сумма является степенью двойки.*

Верна ли хотя бы одна из этих теорем? А может быть, обе?

Художник Николай Крутиков

ДИСКИ НА КОЛЁСАХ

У автобусов, грузовиков и прочих тяжеловозных машин очень часто диск на колёсах из передней пары довольно выпуклый, а на задних колёсах – глубоко утопленный внутрь. Объясните эту закономерность.

Автор Александр Бердников
Художник Николай Воронцов

ISSN 2227-7986 18002
9 772227 798183