ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 2

КАК СДЕЛАТЬ

СЛОНА ИЗ МУХИ

февраль 2019

СВЕЧА В ЗЕРКАЛЬНОЙ КОМНАТЕ

ЧТО ТАКОЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

№ 2 | февраль 2019
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

НАШИ НОВИНКИ

Второй выпуск «Библиотечки «Квантика» – книга С. Н. Федина «Перепутаница»

12-й выпуск **альманаха**, в котором собраны материалы журнала «Квантик» за второе полугодие 2017 года

Как приобрести новинки и другую продукцию «Квантика», смотрите в интернет-магазине kvantik.ru и на сайте kvantik.com/kupit.html

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, календари загадок, наборы плакатов и книги серии «Библиотечка журнала «Квантик».

Электронную версию журнала «Квантик» вы можете приобрести на сайте **litres.ru**
О том, как оформить подписку на журнал, читайте по ссылке **kvantik.com/podpiska**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 2, февраль 2019 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 22.01.2019
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ

Александр Бердников,
Георгий Челноков

ИГРУШКИ НА ЁЛКУ: РАЗГАДКИ

В прошлом номере игрушки на новогодней ёлке подсказали Квантику несколько интересных задач:

• *Нарисуйте многоугольник, у которого каждая сторона лежит на одной прямой ровно с одной другой стороной. Может ли каждая сторона лежать на одной прямой ровно с двумя другими сторонами? А ровно с 10 другими?*

• *Существует ли многогранник, у которого каждая грань лежит в одной плоскости ещё ровно с одной другой гранью? Бывает ли, что каждая грань лежит в одной плоскости с двумя другими гранями, или даже с 10 другими?*

Некоторые ответы и правда можно найти среди новогодних украшений. Например, плоская пятиугольная звёздочка на вершине ёлки – это многоугольник, каждая сторона которого содержит ровно одну другую в своём продолжении (рис. 1).

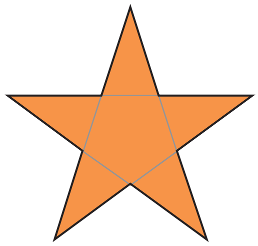


Рис. 1

Обычно эту звёздочку делают объёмной – как раз в виде многогранника, грани которого разбиваются на пары лежащих в одной плоскости. На рисунке 2 эти пары окрашены в один цвет (показана только «верхняя» половина объёмной звезды, обратная сторона устроена так же).

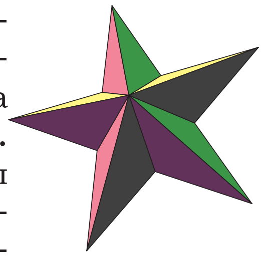


Рис. 2

А что насчёт трёх (и более) сторон на прямой? У звёздочек с бо́льшим числом лучей стороны (и грани) снова разбиваются лишь на пары (рис. 3 и 4).

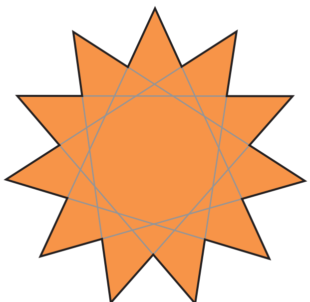


Рис. 3

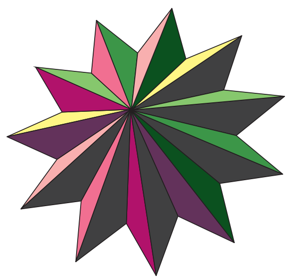


Рис. 4

Зато внутри многоугольника появилось много отрезков, лежащих на тех же прямых, что и стороны.

Вот бы часть из них сделать сторонами... Конечно – вырежем внутреннюю часть, как на следующих двух рисунках. Получим многоугольники, у которых стороны лежат на прямых по три (рис. 5) и по четыре (рис. 6).

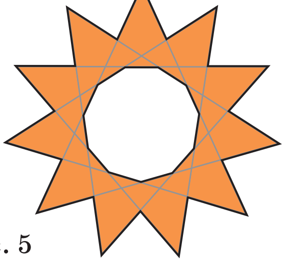


Рис. 5

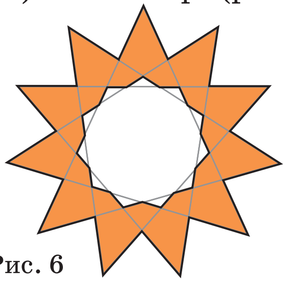


Рис. 6

Но это многоугольники с дырками, и неясно, как дальше увеличивать число сторон на одной прямой.

Обратим внимание на симметричный узор из множества частей, образованный проведёнными линиями. Идея: давайте наоборот, не вырезая центральную часть, уберём какие-то другие части узора, чтобы от центра к краям шли отростки, поворачивая то вправо, то влево. Так, на рисунке 7 стороны разбиваются на пятёрки лежащих на одной прямой.

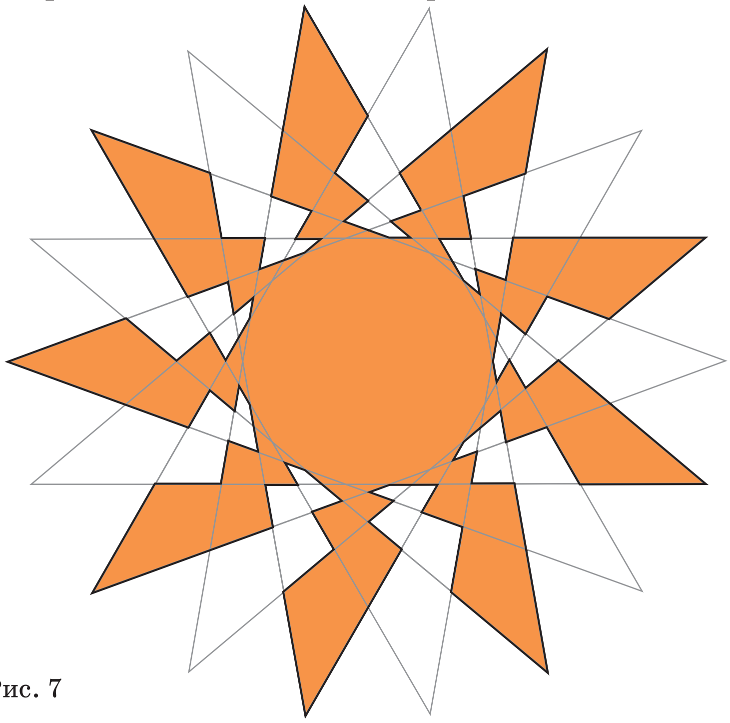
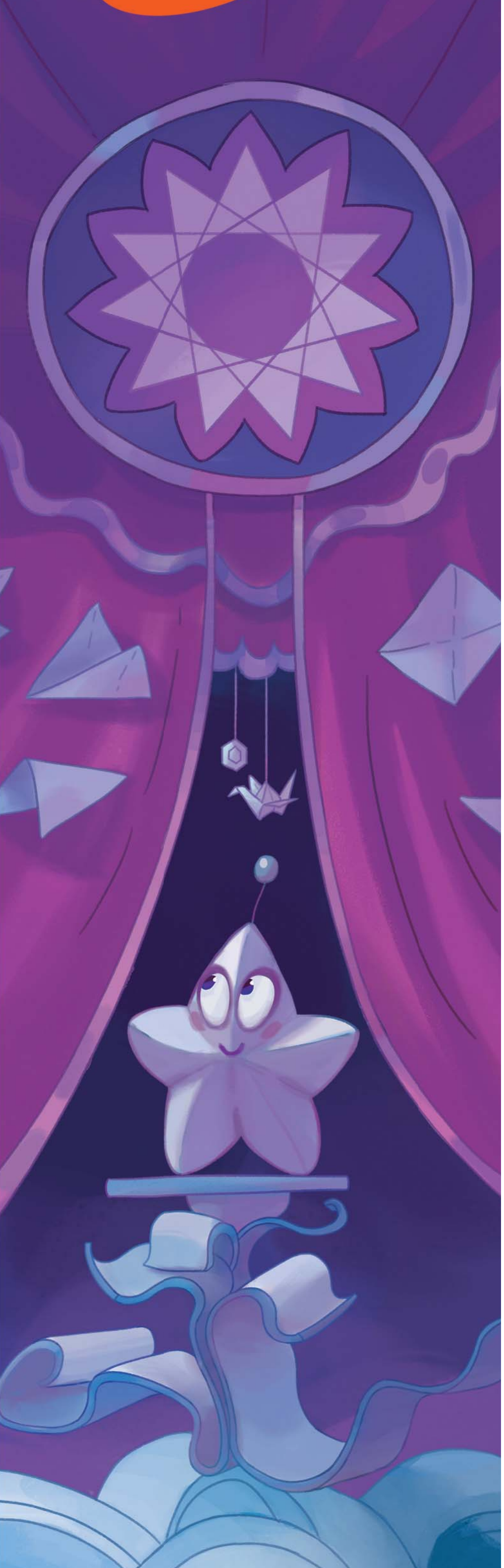


Рис. 7

Чем больше отростков и чем больше поворотов они сделают, тем больше сторон попадут на одну прямую.

Приведём ещё два хитрых примера, где наклон линий узора немного изменён, так что на одну прямую



попадают только стороны из двух соседних отростков (в первом случае) и из трёх соседних (во втором). В итоге в первом примере (рис. 8) стороны лежат на одной прямой по три, а во втором (рис. 10) – по четыре.

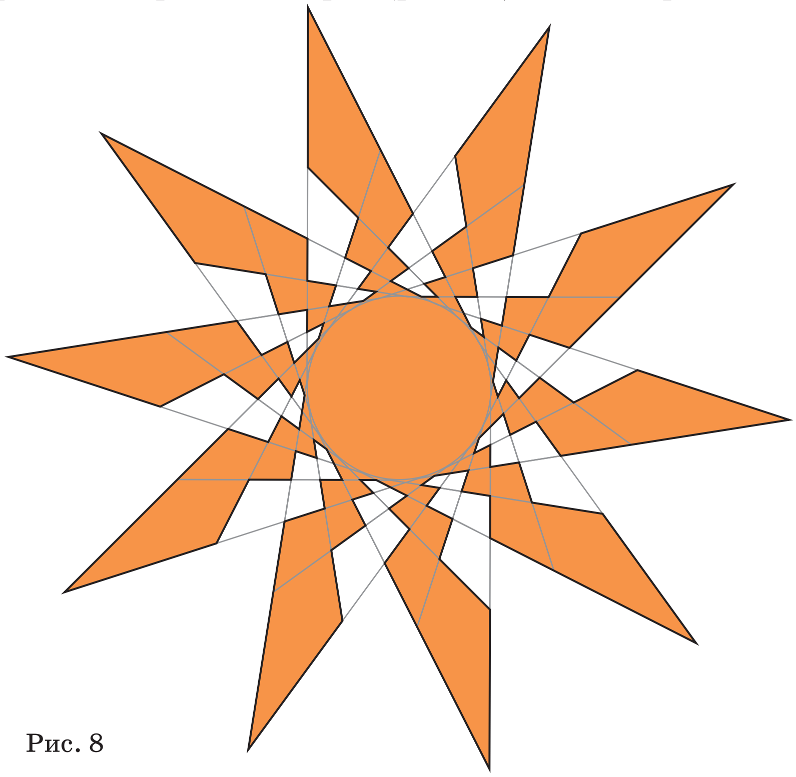


Рис. 8

Идея тут такая. Легко нарисовать по клеткам периодическую ломаную со сколь угодно большим числом сторон, у которой каждая сторона лежит на одной прямой ровно с n другими (рис. 9 – пример для $n = 3$).

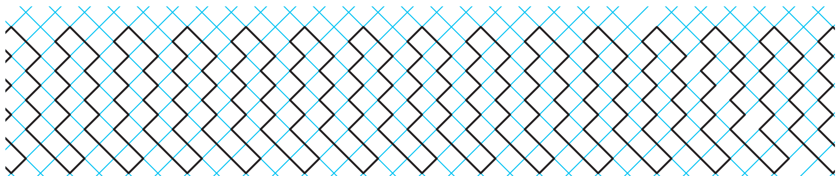


Рис. 9

Замкнём длинную полоску с этой ломаной в кольцо, растягивая в плоскости так, чтобы стороны меняли свою длину, но по-прежнему лежали на прямых. Загибая полоску, каждую очередную прямую (содержащую стороны) мы повернём совсем немного, и внутренность итоговой ломаной даст нужный многоугольник. Так, рисунок 10 получен из полоски с рисунка 9.

Попробуйте сами построить картинки для большего числа сторон на одной прямой. А может быть,

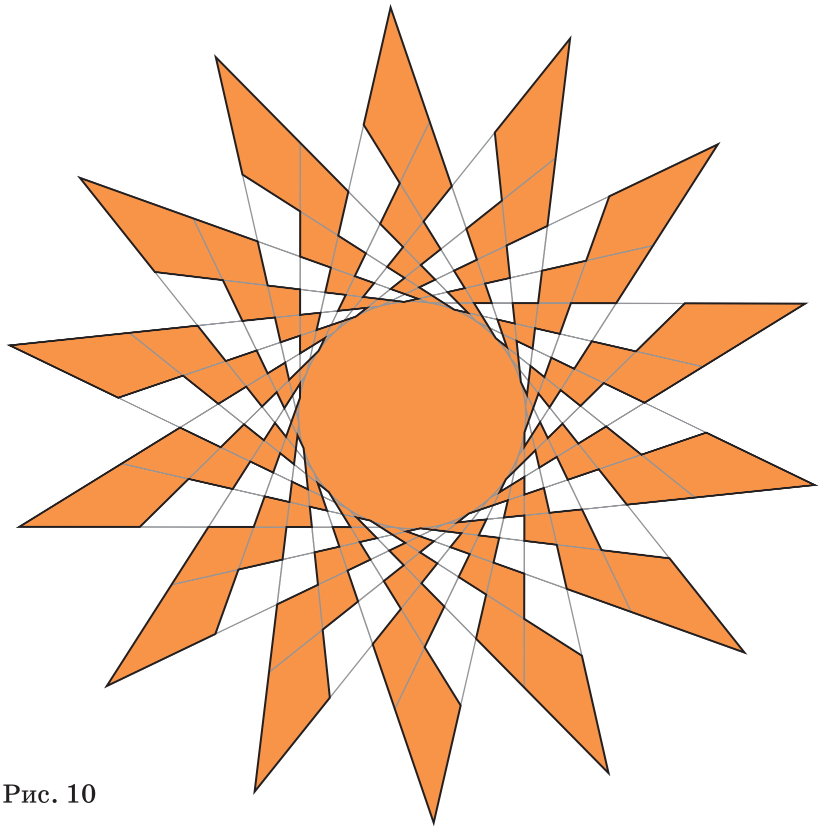


Рис. 10

вы придумаете совсем другие примеры – скажем, построите нужные многоугольники «по клеточкам»? Тогда обязательно пришлите их нам в редакцию!

Из решения на плоскости получается пространственное тем же способом, как из плоской звёздочки получается объёмная звезда: надо склеить две пирамиды, общее основание которых – наш многоугольник. К сожалению, такой многогранник с виду мало отличается от звезды, так как всё интересное у него запрятано глубоко внутри...

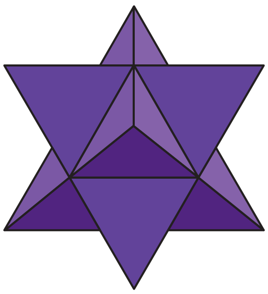


Рис. 11

А вот два многогранника попроще – звёздчатый октаэдр (рис. 11) и звёздчатый додекаэдр (рис. 12). Отчётливо видно, что у первого грани разбиваются на тройки лежащих в одной плоскости, а у второго – на пятёрки.

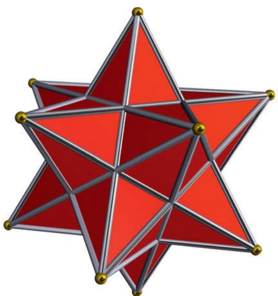
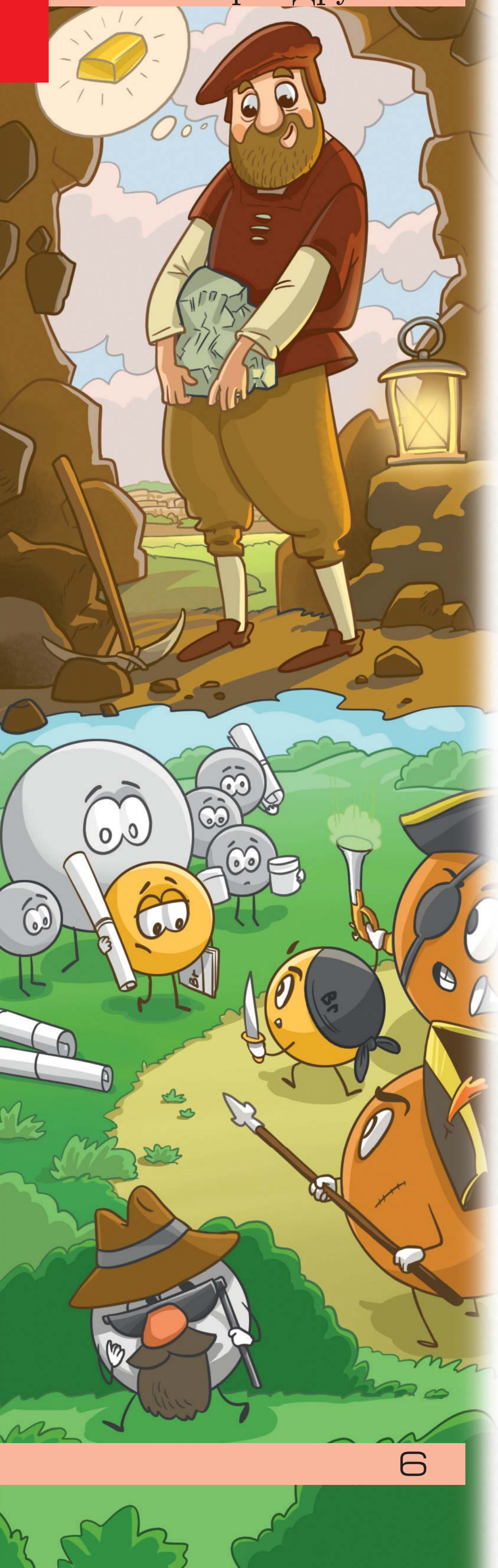


Рис. 12

Художник Анна Горлач

Борис Дружинин



ПУТЕШЕСТВИЕ №12 ПО ЗООПАРКУ ЭЛЕМЕНТОВ

БАРИЙ, ЛАНТАН, ЦЕРИЙ, ПРАЗЕОДИМ, НЕОДИМ

БАРИЙ Ba

Ba 56 137,327 БАРИЙ

Барий «живёт» в клетке № 56. Барит, он же тяжёлый шпат, он же сульфат бария $BaSO_4$, привлёк внимание болонского сапожника и алхимика Касциароло в начале XVII века своей необычной тяжестью – Касциароло даже заподозрил, что в нём содержится золото. Тяжёлый минерал, найденный Касциароло, назвали баритом, от греческого βαρύς – тяжёлый, а металл – барием (*barium*).

Барий – очень активный металл, на воздухе быстро окисляется и при незначительном нагревании воспламеняется. В земной коре барий из-за своей высокой активности присутствует только в соединениях, хотя его там больше, чем свинца, олова, меди или ртути. Металлический барий хранят в керосине или в парафине. Чистый металлический барий применяется довольно редко, разве что как газопоглотитель в вакуумной технике или как добавка в сплавы для теплоносителей. А вот соединения бария весьма популярны.

Все соли бария, кроме сульфата, ядовиты. Хорошо растворимые в воде, они быстро всасываются в стенки кишечника, и уже через несколько часов может наступить смерть от паралича сердца. А сульфат бария в воде не растворяется и применяется как рентгеноконтрастное вещество при медицинском обследовании желудочно-кишечного тракта. Это та самая «баритовая каша», которую нужно проглотить перед рентгеном желудка.

Нитрат бария $Ba(NO_3)_2$ и хлорат бария $Ba(ClO_3)_2$ используются в пиротехнике для получения огня зелёного цвета. Сульфат бария входит во все дорогие сорта бумаги, а также широко используется в производстве белой краски.

ЛАНТАН La

La 57 138,9055 ЛАНТАН

Клетка № 57 принадлежит *лантану*. Лантан долго не могли получить в виде простого вещества (а не в соединении), поэтому и назвали его *lanthanum* от греческого λανθάνω – *скрываюсь, таюсь*. Лантан долго считали двухвалентным, с атомным весом около 92. Но Менделеев на основании свойств своей системы предсказал, что лантан должен быть трёхвалентен и иметь атомный вес 138, и поместил его в клетку № 57. Дальнейшие исследования подтвердили правоту Менделеева.

Но почему сразу после клетки № 57 с лантаном в таблице следует клетка № 72 с гафнием? Куда делись 14 элементов? Оказывается, они имеют настолько схожие свойства, что их объединили в отдельное семейство под общим именем *лантаноиды*, или *лантаниды*. Это церий, празеодим, неодим, прометий, самарий, европий, гадолиний, тербий, диспрозий, гольмий, эрбий, тулий, иттербий и лютеций.

Лантаноиды выпадали из строгой последовательности периодической системы, что беспокоило Менделеева. Но профессор Пражского университета Богуслав Браунер предложил вынести лантаноиды за пределы основной части таблицы – и всё встало на свои места.

Лантаноиды, как и скандий, относятся к редкоземельным металлам – они рассеяны всюду, но в незначительных количествах. Их оксиды сложно отделить друг от друга в руде. Лантаноиды находят разнообразные применения в современной электронике, медицине и практически любом высокотехнологическом производстве. Лантан входит в состав аккумуляторных батареек.

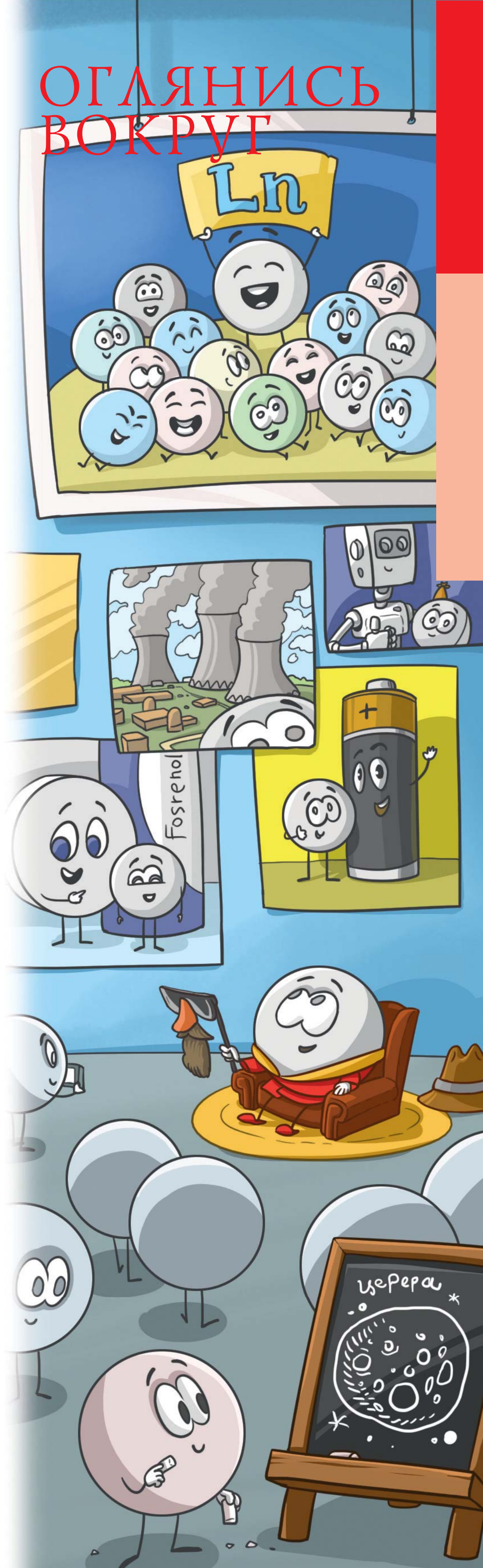
Изотоп ^{139}La образуется в атомных реакторах при делении урана и активно захватывает тепловые нейтроны, поэтому считается «реакторным ядом». Но зато жидким лантаном извлекают плутоний из расплавленного урана.

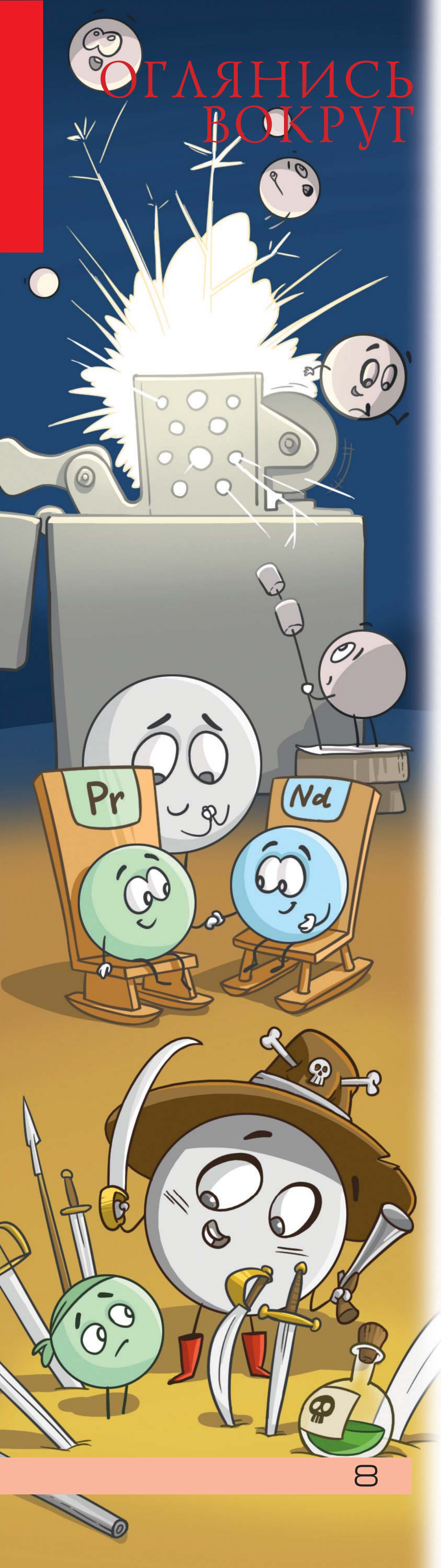
Карбонат лантана $La_2(CO_3)_3$ используется как лекарство (под названием *fosrenol*) для поглощения избытка фосфатов в организме.

ЦЕРИЙ Ce

Ce 58
140,116
ЦЕРИЙ

В клетке № 58 находится *церий*, первый в семействе лантаноидов. Своё имя *cerium* он получил в честь самой большой карликовой планеты из пояса астероидов в Солнечной системе – Цереры (*Ceres*).





Сплав с 1–2% церия делает многие металлы, даже традиционно хрупкий чугун, гораздо прочнее. Церий повышает электропроводность даже таких хороших проводников электричества, как медь и алюминий. На атомных станциях, где уровень радиации повышен и от этого обычные стёкла постепенно тускнеют, применяют стёкла, содержащие церий: они не теряют прозрачности и при достаточной толщине защищают от облучения.

А сплав церия (около 50%), лантана, железа, неодима и празеодима наверняка знаком каждому из вас! Это *ферроцерий*, из него делают «кремни» для зажигалок. К настоящему кремню – природному оксиду кремния – этот материал отношения не имеет. Ферроцерий относится к пирофорным сплавам, потому что при ударе из него высекаются искры, способные воспламенить находящееся в зажигалке горючее.

ПРАЗЕОДИМ Pr

Pr 59 140,9077 ПРАЗЕОДИМ

Клетку №59 занимает *празеодим*, второй в семействе лантаноидов. В 1839 году Карл Мосандер обнаружил новый элемент лантан и вскоре ещё один, названный им *дидим* от греческого δίδυμος – «близнец», так как его свойства удивительно напоминали свойства лантана. В первые варианты своей системы Менделеев включал его под символом «Di». Но в 1885 году Карл Ауэр фон Вельсбах установил, что дидим состоит из смеси двух элементов с близкими физическими и химическими свойствами. Он назвал их неодим (νέοςδίδυμος – новый близнец) и празеодим (πράσιοςδίδυμος – светло-зелёный близнец).

Празеодим, как и его «родитель» лантан, представляет из себя «реакторный яд». Правда, в отличие от лантана, он не такой вредный: в осколках деления урана его не так много, и он хуже поглощает тепловые нейтроны.

Наряду с другими редкоземельными металлами (неодимом, церием, лантаном, самарием) празеодим может входить в состав высокотемпературных сверхпроводников – тех, которые проявляют сверхпроводимость при относительно высоких температурах. Для материалов, содержащих празеодим, это 52 градуса Кельвина.

НЕОДИМ Nd

Nd 60 144,24 НЕОДИМ

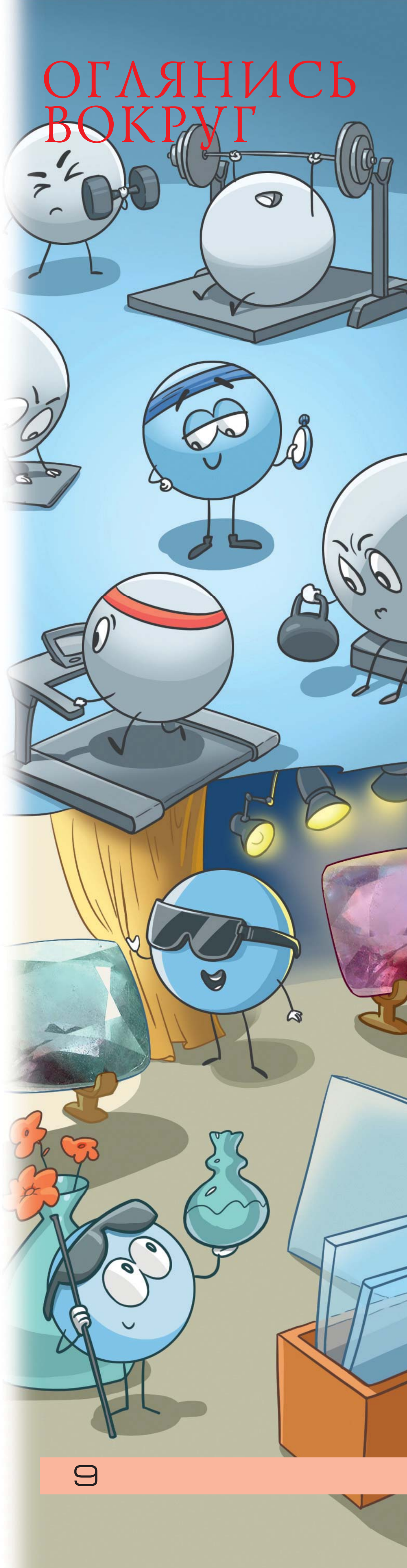
Неодим находится в клетке №60, он третий в семействе лантаноидов. Из всех лантаноидов неодим лучше всего влияет на свойства различных сплавов. Предел длительной прочности при повышенных температурах у таких сплавов намного больше, чем у сплавов с добавками других элементов. Так, пятипроцентная добавка неодима почти вдвое увеличивает предел прочности алюминия. Во много раз возрастает и твёрдость сплава. А добавка всего 1,2% неодима увеличивает предел прочности титана с 32 до 50 кг/мм^2. Неодим также применяется при изготовлении нового поколения мощных постоянных магнитов на основе его сплава с железом и бором. Например, в большинстве жёстких дисков используется неодимовый магнит.

Есть такой драгоценный камень – *александрит*, открытый в 1834 году Нильсом Норденшёльдом в день совершеннолетия будущего российского царя Александра II. Александрит меняет окраску от тёмной сине-зелёной при дневном свете до красно-фиолетовой при вечернем или искусственном свете. Стёкла, содержащие не менее 4,3% окиси неодима, обладают «александритовым эффектом» – меняют окраску в зависимости от освещения, из них делают декоративную посуду. Также неодимовые стёкла усиливают передачу некоторых цветов спектра в солнцезащитных очках и фотографических светофильтрах, снижают «засветку» ночного неба уличным освещением в светофильтрах для телескопов, поглощают некоторые части спектра излучения в защитных очках для стеклодувов и сварщиков, а в колбах ламп накаливания для аквариумов и террариумов отфильтровывают жёлтые лучи, приближая свет к белому дневному.

Стекло с добавками неодима используют не только для изготовления красивых ваз и художественных изделий. Применяется оно и в лазерах: окись неодима Nd_2O_3 даёт лазерное излучение в инфракрасной области спектра. Для этого используют окись неодима чрезвычайно высокой чистоты – 99,996%.

В сельском хозяйстве нитратом неодима обрабатывают семена для ускорения всхожести и повышения урожайности.

Художник Мария Усеинова



Игорь Акулич

КЛЕТЧАТОЕ ЗАНЯТИЕ

– Что у меня в руке?

– Девятый номер «Квантика» за 2017 год!

– Верно. И сегодняшний день мы посвятим разбору статьи Андрея Карпова «Почти правильные многоугольники на клетчатой бумаге»[1]. Поэтому занятие нашего кружка с полным правом можно назвать *клетчатым*. Недавно я попросил вас прочесть статью и продумать по ней свои соображения. Сегодня будем ими делиться. Кто первый?

– Можно я?

– Конечно.

– Меня смутило название. Что значит «Почти правильные»? По сути автор занимается поиском *выпуклых равносторонних* многоугольников с вершинами в узлах бесконечной квадратной сетки. И если многоугольники на рисунках 4, 8 и 10 ещё можно (чисто зрительно!) считать «почти правильными», то фигуру на рисунке 3 назвать так язык не повернётся!


Рис. 3

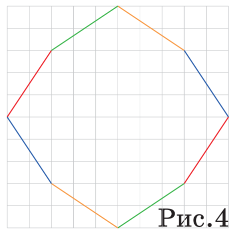


Рис.4

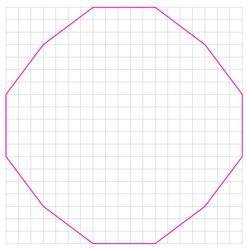


Рис. 8

– Не будем судить строго. Это лишь заголовок, да и что-то общее с правильными многоугольниками всё же есть – выпуклость и равенство сторон. И в тексте автор этот термин нигде не применяет. Поэтому претензия снимается. Ещё есть замечания?

– У меня есть! В статье написано: «Перебором на компьютере можно показать, что 65 – наименьшее из чисел, нетривиальным образом раскладывающееся в сумму двух квадратов двумя различными способами». Там указаны и эти разложения:

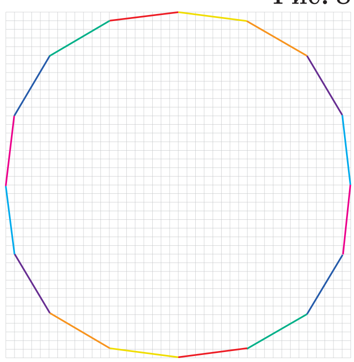
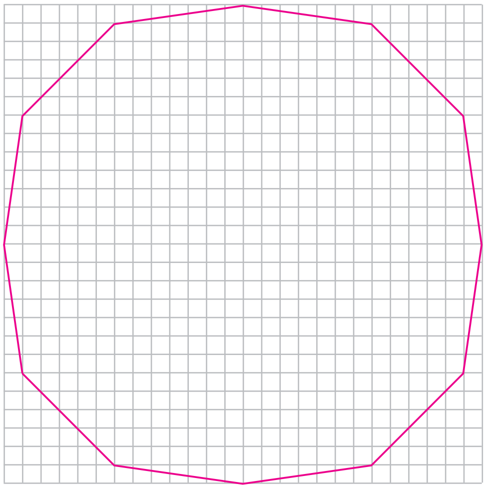


Рис. 10

[1] Чтобы было легче понять, о чём идёт речь, рекомендуем найти журнал со статьёй и держать под рукой. Номера рисунков даны по этой статье.

$65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$. Не знаю, как насчёт компьютера[2], но я и без него нашёл меньшее значение: $50 = 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$. И оно позволяет построить равносторонний 12-угольник со стороной $5\sqrt{2}$ – вот посмотрите:



Кстати, эта картинка чем-то похожа на рисунок 8 в статье, только повёрнутый на 45°.

– Да, стоило написать аккуратней: «...в сумму двух квадратов *различных* натуральных чисел...». Но и здесь автора можно понять: он ведь искал эти разложения, чтобы построить *шестнадцатиугольник* (который с числом 50 не построишь). Ещё вопросы?

– У меня есть. Автор в итоге доказал, что можно построить равносторонний выпуклый многоугольник с любым *чётным* числом сторон. А про нечётное число сторон ничего не говорит. Только в начале упоминает, что равносторонний треугольник построить нельзя. А пятиугольник? Семиугольник? Там ведь «степеней свободы» довольно много...

– Справедливо. Без такой информации статья выглядит незавершённой. Однако все точки над «i» ставит *теорема Болла*: **на бесконечной квадратной сетке невозможно расположить равносторонний (пусть даже и невыпуклый) многоугольник с нечётным числом сторон, вершины которого лежат в узлах сетки.** И что интересно, доказательство её вполне элементарно. Сейчас мы с ним ознакомимся.

[2] Отвечать на такие вопросы без компьютера поможет книга Л.А.Калужнина «Основная теорема арифметики» (М.: Наука, 1969).

Предположим противное – что всё-таки *можно* построить равносторонний n-угольник с вершинами в узлах сетки, где n – нечётное число. Из всех таких возможных многоугольников выберем тот, у которого длина стороны *наименьшая*, и дальше возиться будем с ним. Введём систему прямоугольных координат, оси которых (Ox и Oy) направлены по линиям сетки (например, Ox – вправо, Oy – вверх), а начало находится в одной из вершин многоугольника. За единицу измерения примем сторону одной клетки. Теперь, стартовав от начала координат, обойдём наш многоугольник в одном из двух возможных направлений, пока не вернёмся обратно. В этом случае каждая пройденная сторона (их, разумеется, тоже n штук) представляет собой направленный отрезок – *вектор*.

Каждый вектор описывается парой чисел, представляющих собой его проекции (со знаком) на оси координат, и эти числа суть разности между координатами конца и начала вектора. Так как начала и концы всех векторов – это вершины n-угольника, лежащие в узлах, то их координаты – целые числа, а значит, и проекции каждого вектора на оси координат – целые числа (они могут быть и отрицательными). Например, если взять последний продемонстрированный нам 12-угольник (см. выше) и начать обход с самой нижней вершины по часовой стрелке, то первый вектор определяется парой чисел (–7; 1), второй – парой (–5; 5) и т.д. Пронумеруем векторы в произвольном порядке (например, по очерёдности обхода) числами от 1 до n. Обозначим проекции n-го вектора так: $(x_n; y_n)$. Подумайте – связывает ли что-то между собой проекции различных векторов?

– Конечно, связывает! Ведь по той же теореме Пифагора квадрат длины каждой стороны равен $x_n^2+y_n^2$. И эти числа все равны между собой – многоугольник-то равносторонний!

– Верно. Тогда можно записать цепочку равенств:

$$x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2=\ldots=x_n^2+y_n^2=a,$$

где a – некоторое *натуральное* число (ибо оно является суммой квадратов двух целых чисел). А можно ли ещё как-то связать между собой эти координаты?

– Можно! Мы же обходим многоугольник «по кругу», возвратившись в исходную вершину. Поэтому суммарный сдвиг по каждой оси будет *нулевой*.

– Молодец! Отсюда получаем ещё два равенства:

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=0 \quad \text{и} \quad y_1+y_2+\ldots+y_n=0.$$

Прекрасно! И что дальше? Есть идеи?

< *Молчание*>

– Ладно, подскажу. Пусть a нечётно. Что тогда можно сказать о чётности x_1 и y_1?

– Одно чётно, а другое нечётно.

– Правильно, и то же верно для остальных пар: x_2 и y_2, x_3 и y_3, и т. д. А теперь сложим все иксы и игреки, получим 0. Но в этой сумме ровно n нечётных чисел (по одному из каждой пары). А так как n нечётно, то суммой не может быть *чётное* число 0.

– А если a чётно?

– Рассмотрим два случая. Первый: a не делится на 4. Что тогда можно сказать о чётности x_1 и y_1?

– Оба чётные или оба нечётные!

– Да, но они не могут быть оба чётными.

– Почему?

– Тогда их квадраты делятся на 4 и сумма тоже, противоречие с предположением нашего случая. Получается, что все иксы нечётные. Значит, их сумма не может равняться 0, ведь их количество n нечётно!

– А что делать в случае, когда a делится на 4?

– Тогда оба числа x_1 и y_1 должны быть чётными. Иначе $x_1=2p+1$ и $y_1=2q+1$ (где p и q – целые). Сумма их квадратов равна $x_1^2+y_1^2=4p^2+4p+1+4q^2+4q+1=$ $=4(p^2+p+q^2+q)+2$, что не делится на 4.

– И что дальше?

– Аналогичными рассуждениями получаем, что x_2 и y_2 – тоже чётные, а также x_3 и y_3 – чётные, и так далее вплоть до x_n и y_n. Итак, проекции *всех* сторон-векторов на обе координатные оси есть *чётные числа*. Следовательно, мы можем уменьшить наш n-угольник *вдвое*, и его вершины при этом попадут в узлы сетки, а длина стороны уменьшится в 2 раза! Но наш многоугольник *уже наименьший возможный*, и сделать его ещё меньше нельзя! Противоречие.

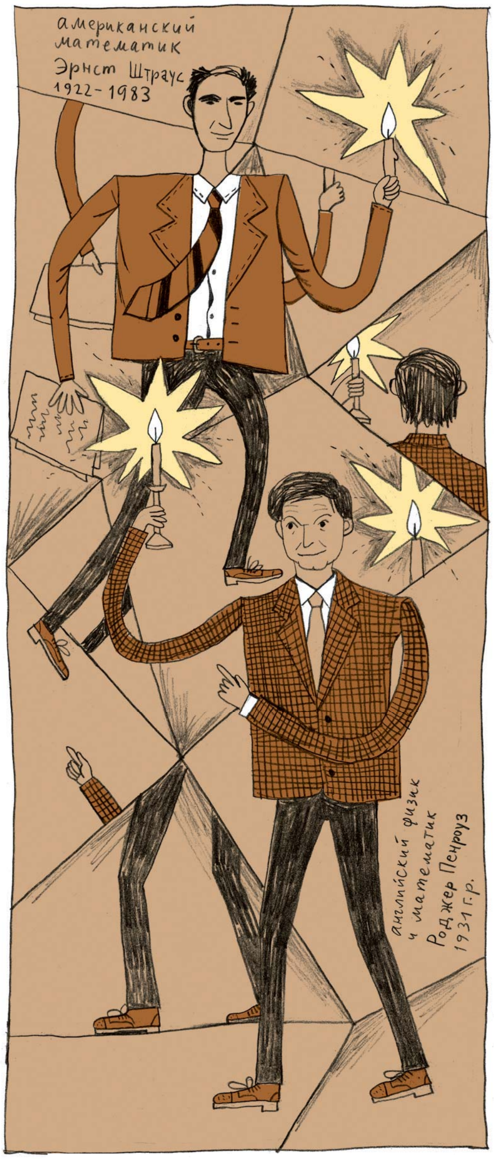
– Здорово получилось!

– Что же, поздравляю с отличным результатом – теорема Болла доказана. До следующей встречи!

Художник Алексей Вайнер

Юрий Маркелов

СВЕЧА в зеркальной комнате



В 1950 году Эрнст Штраус сформулировал такую задачу: «Всегда ли в комнате с зеркальными стенами можно поставить свечу так, чтобы вся комната была освещена, то есть через любую точку проходил луч света? (Лучи света, попадающие в углы, исчезают.)»

Целых 8 лет задача была открытой проблемой, но в 1958 году английский физик и математик Роджер Пенроуз придумал комнату, в которой так поставить свечу невозможно (рис. 1). Стены комнаты состоят из отрезков и половин эллипсов. Правда, доказательство того, что эта комната никогда не освещена вся, не простое.

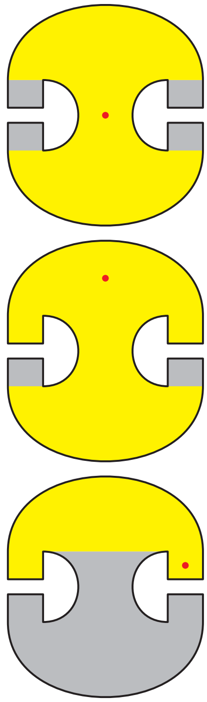


Рис. 1

На рисунке 2 вы видите пример, придуманный Игорем Маркеловым и Алексеем Кристевым, который был также упрощён мной. Если через центр окружности проходит луч, то после отражения он вернётся туда же, так как отразится от одной из дуг окружностей. То есть если луч света до первого отражения от зеркала не попал в центр, он туда никогда и не попадёт. Значит, чтобы левый центр был освещён, свечка должна быть в красной зоне, а чтобы правый – в зелёной зоне; так как эти две зоны не пересекаются, оба центра одной свечкой освещены быть не могут.

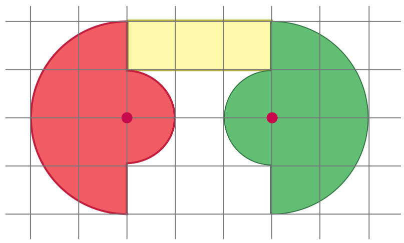
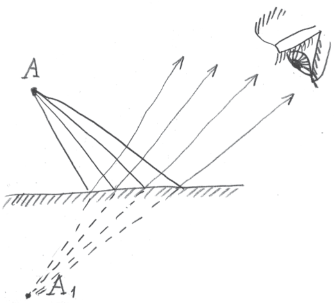


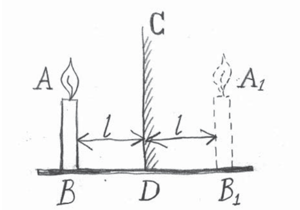
Рис. 2

Правда, в решении на рисунке 1 остаются неосвещёнными целые области, а на рисунке 2 – лишь точка.



Аналогичная проблема, но с тем условием, что стены комнаты должны образовывать многоугольник, до сих пор не решена. Может быть, именно тебе, дорогой читатель, удастся её осилить.

Удачи!

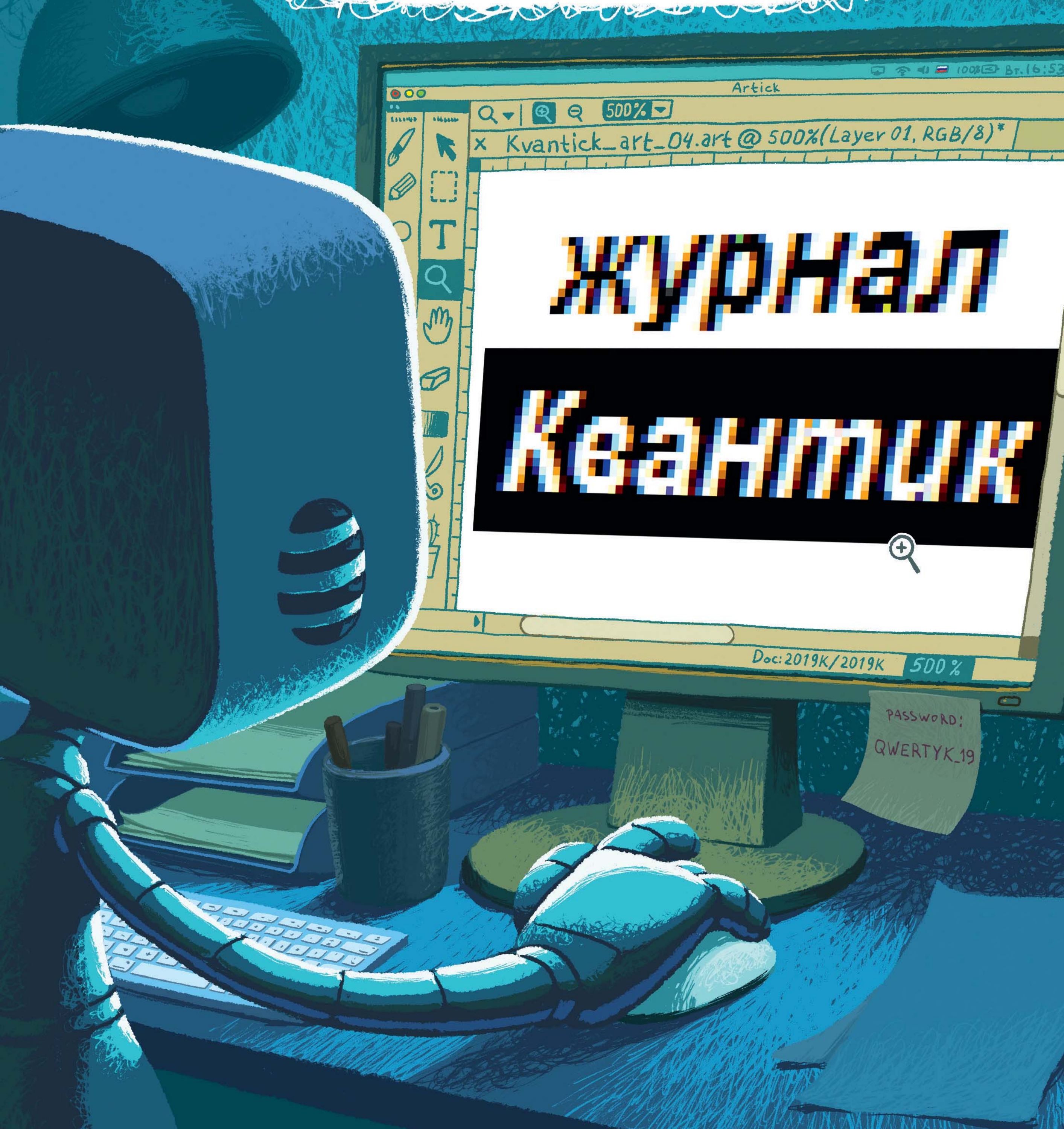


Художник Артём Костюкевич

ЦВЕТНЫЕ КРАЯ

Некоторые компьютеры могут вести себя необычно: если на них увеличить чёрно-белый текст (например, со снимка веб-страницы) в редакторе изображений, то края букв будут цветными, а не чёрно-белыми – вопреки ожиданиям. Объясните причины такого странного явления.

Автор Александр Бердников



Художник Евгений Паненко

Сергей Дворянинов

ЧТО ТАКОЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Отчего, когда в оттепель идёт снег, он тает на руке, а на шубе остаётся?

Л.Н. Толстой,
«Тепло» (Рассуждение)

ТРЕТИЙ ЛИШНИЙ

Вспомним одну старую задачку. Есть автобус, трамвай, троллейбус. Что здесь лишнее?

Лишний автобус, так как он работает на бензине, а не на электричестве, как трамвай и троллейбус. А можно считать лишним трамвай, потому что его колёса не «обуты» в резиновые шины.

А теперь новая задача. Из трёх словосочетаний: *тёплый осенний день*, *тёплое море*, *тёплая одежда* – какое лишнее?

Мы называем день или море тёплыми, если у них соответствующая температура. Называя пальто или куртку тёплой, мы никак не связываем это качество одежды с её температурой как материального предмета. Следовательно, лишняя здесь *тёплая одежда*.

Называть одежду тёплой позволяет некоторая её физическая характеристика, о которой и расскажем.

КОЭФФИЦИЕНТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Наступила зима. В квартире батареи центрального отопления нагревают воздух. Почему же температура в комнатах повышается не до температуры батареи, а до меньшего уровня? Да потому, что тепло через стены уходит наружу, на улицу. Что это значит? Тепло – не какой-то физический объект. Но из жизненного опыта вы знаете, что горячее тело нагревает окружающие его холодные тела (а холодное – остужает горячие), и удобно считать, что при этом от горячих тел к холодным передаётся тепло.

Как тепло распространяется в одном теле, от уже нагретых частей к более холодным? Разные материалы проводят тепло по-разному – одни хуже, другие лучше. Поэтому у каждого материала есть свой *коэффициент теплопроводности* k, равный количеству тепла, которое за 1 секунду проходит через стену из этого материала площадью 1 кв. метр и толщиной 1 метр при разности температур 1 градус.

Понятно, что через стену в два раза большей площади проходит в два раза большее количество тепла, а через стену удвоенной толщины – вдвое меньшее (подумайте, почему?). А ещё оказывается, что чем больше разность температур, тем быстрее передаётся тепло.

Количество тепла, как и любой энергии, измеряют в джоулях (Дж). Например, чтобы вскипятить 1 литр воды комнатной температуры, необходимо «передать воде» 350 000 Дж = 350 кДж. А скорость передачи тепла измеряют в ваттах (Вт). Передача 1 Дж тепла за 1 с соответствует 1 Вт. Например, мощность чайника примерно равна 2 кВт = 2000 Вт.

У силикатного (или белого) кирпича $k = 0{,}81\ \frac{Вт}{м \cdot {}^\circ C}$ (далее эту размерность будем опускать), то есть, например, для квадратного метра кирпичной стены толщиной 50 см потери тепла на 1 градус разницы температур составят 1,62 джоуля в секунду (или 1,62 ватта). У дерева $k = 0{,}2$, и потому при той же толщине стен деревянный дом теплее кирпичного в 4 раза. В частности, поэтому кирпичные стены делают толще деревянных. А у бетона $k = 1{,}75$, и панельный дом, построенный из бетонных плит, получается вдвое холоднее кирпичного с той же толщиной стен. Стены можно утеплять пенопластом – его коэффициент 0,04.

Вспомним детский стишок:

Ох, беда, беда, беда,
Наступили холода.
На стекле горюет муха:
«Выпал снег белее пуха!
Если бы мне валенки,
Пусть подшиты, стареньки,
Да суконные штаны –
Дожила бы до весны!»

Дело в том, что у шерстяного войлока (то есть у тех же валенок) $k = 0{,}045$. Зимой в валенках намного теплее, чем в кожаных ботинках. Конечно, валенки ноги не греют, а лишь препятствуют бóльшим потерям тепла.

У хлопковой ваты $k = 0{,}055$. Потому испокон веков ватные халаты защищали жителей Средней Азии от нестерпимой летней жары. Температура тела человека 36,7°С, температура воздуха 40 – 45°С. В этом случае ватный халат в минимальной степени способствует подводу тепла к телу, предохраняя человека от перегрева. Точно так же меховые рукавицы защищают руки кузнеца, держащего раскалённую заготовку.

Художник Максим Калякин

У минеральной ваты $k = 0{,}045 - 0{,}055$. Её используют для термоизоляции труб отопления.

Газы – плохие проводники тепла, у них коэффициент теплопроводности мал, например у воздуха $k = 0{,}022$. Поэтому оконные рамы делали двойными, и в современных стеклопакетах тоже есть воздух между стёклами: можно сказать, что тепло в доме сохраняет не стекло, а воздух внутри рамы. Но газы могут передавать тепло *конвекцией*, то есть перемешиваться. По этой причине особенно хорошими теплоизоляционными свойствами обладают пористые материалы – поры в них препятствуют конвекции.

Многие птицы зимой во время сильных морозов зарываются в снег. Рыхлый снег почти не проводит тепло и сохраняет примерно одинаковую температуру даже при сильных ночных заморозках. Так спасаться от морозов, да и от хищников, научились глухари, тетерева, куропатки, рябчики. Птицы способны проводить под снегом без движения несколько дней, при этом их потери энергии минимальны. Да и медведи спят в берлогах, занесённых снегом, словно тёплым одеялом.

Среди металлов рекордсменом по теплопроводности можно считать серебро – у него $k = 430$. У железа $k = 92$. Если серебряную ложку опустить в кипяток, то удержать её в руках, пожалуй, не удастся: она очень быстро станет нестерпимо горячей. Металлы очень хорошо проводят тепло (гораздо лучше неметаллов), потому что в них есть свободные электроны, которые быстро перемещаются и переносят тепло.

Возвращаясь к тёплой одежде, скажем, что она не греет, а препятствует потерям тепла. Теперь вы легко объясните, какую одежду мы называем холодной.

Напоследок – две задачи.

1. В некоторых современных квартирах делают тёплые полы. Для этого вдоль всего пола прокладывают нагревательные элементы, питающиеся электричеством. А в новых вагонах московского метро появились «тёплые поручни», которые не требуют электропитания. Можете догадаться, как они устроены?

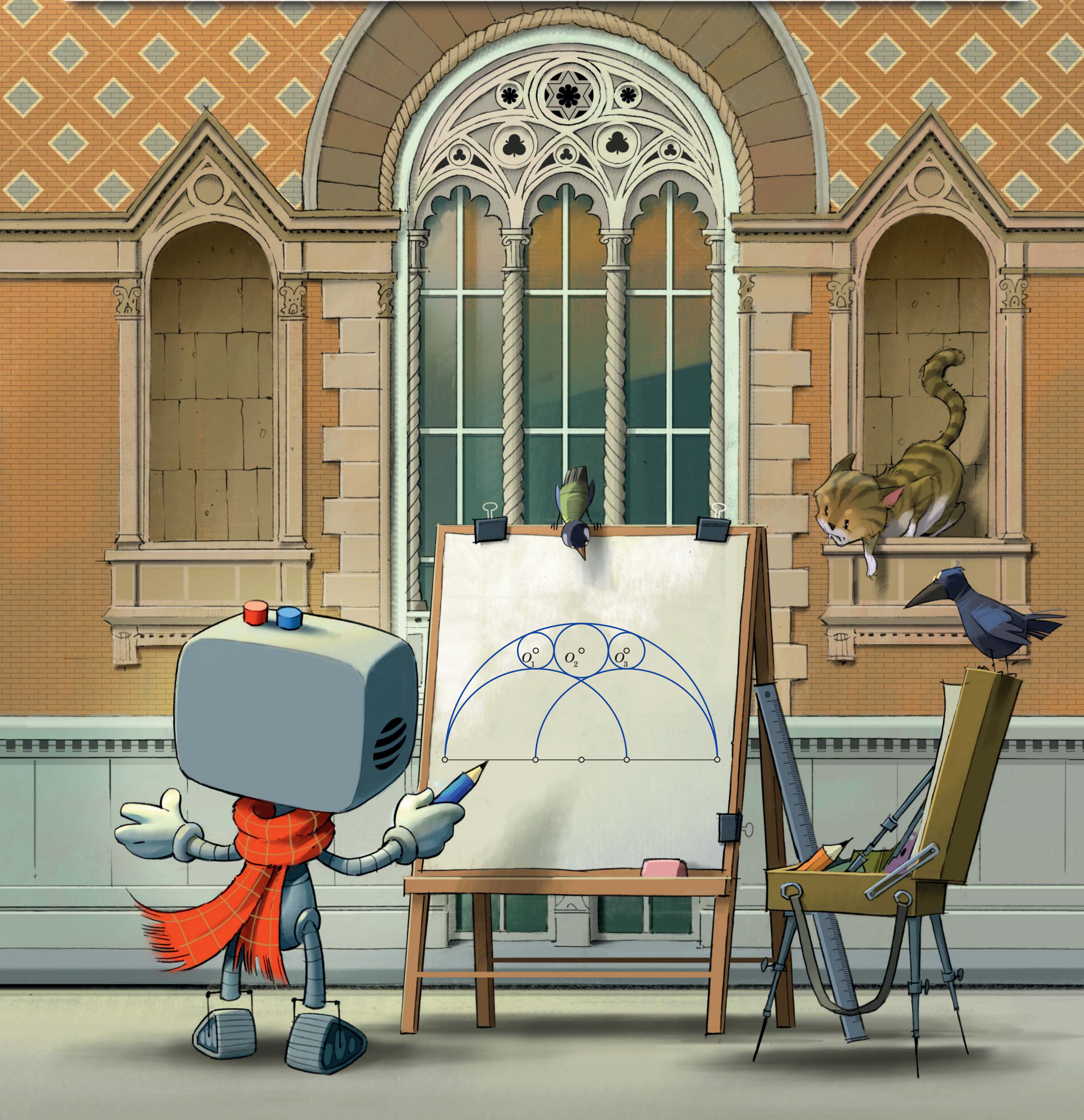
2. Эта задача очень старая. Два полярника вышли из палатки на лёд. Падающий сверху снег на комбинезоне одного потихоньку таял, а у другого – нет, делая человека похожим на снеговика. У кого одежда теплее?

ОКРУЖНОСТИ В ОКНЕ

Окна Одесской государственной филармонии (архитектор – А. И. Бернардацци) украшены узором из окружностей и дуг. А ещё это прекрасная геометрическая задача: *если три отмеченные точки внутри нижнего отрезка на чертеже Квантика – это центры полукругов, то центры* O_1, O_2, O_3 *маленьких окружностей лежат на одной прямой.*

Докажите!

Автор Юрий Белецкий Художник Алексей Вайнер



Александр Пиперски

Из мухи – СЛОНА

В повести известного писателя Юрия Трифонова (1925–1981) «Долгое прощание» рассказывается, как герой проводит время в поезде: «Третьи сутки Ребров, лёжа на верхней полке, мучил себя – делал из мухи слона. На листке бумаги писал: муха – мура – кура – кора – корт – торт – торс...».

Правила игры очень просты: надо построить цепочку слов от начального (МУХА) до конечного (СЛОН), на каждом шаге меняя только одну букву. При этом могут использоваться только русские 4-буквенные нарицательные существительные в начальной форме: например, слова БАЗА, НОЧЬ, САНИ допускаются, а слова ЛИТЬ, ХОТЯ, РУКУ, НОЧИ, САНЯ, ОСЛО, АБВГ, ФЦНМ – нет (первые два – не существительные, следующие два – не в начальной форме, следующие два – собственные, а не нарицательные, а два последних вовсе не существуют в языке).

Эта игра под названием «Дублеты» приобрела известность благодаря Льюису Кэрроллу – не только автору книг про Алису, но ещё и замечательному математику. В марте 1879 года он начал раз в неделю публиковать в журнале «Ярмарка тщеславия» по три задания в форме броских фраз: «Turn POOR into RICH» – «Преврати бедного в богатого», «Evolve MAN from APE» – «Выведи человека из обезьяны», «Make TEA HOT» – «Сделай чай горячим». В том же году он выпустил брошюру «Дублеты», подробно описал в ней правила и предложил читателям попрактиковаться на нескольких десятках примеров.

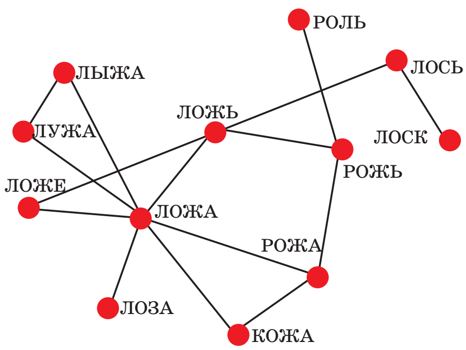
Вот и вам пять пар для тренировки – попробуйте построить для них цепочки. Сразу предупреждаю, что в одном случае, скорее всего, не получится: БОРЩ → → ПОСТ; ЛИПА → ЖАРА; КИНО → ВАТА; КЛЕН → → ЕЛКА; ПАУК → ЛОСЬ (ответы см. в конце номера).

Вы наверняка нашли четыре из пяти цепочек, а не смогли построить только одну. Но как доказать, что это действительно невозможно? Может быть, мы просто не придумали способ, а вообще-то он есть. Разобраться нам поможет теория графов.

Первым делом договоримся о том, что́ именно мы считаем словами, а то может получиться, что я дам

вам задание МУХА → СЛОН и вы скажете: «4 хода! МУХА → МУХН → МУОН → МЛОН → СЛОН». Тогда мне придётся со словарями в руках доказывать, что это жульничество, потому что слов МУХН, МУОН и МЛОН не существует. Чтобы избежать этого, мы обратимся к словарю с самого начала и постановим, что будем пользоваться только теми 4-буквенными существительными, которые есть в заранее выбранном источнике. Для этой статьи я взял «Грамматический словарь русского языка» Андрея Зализняка – этот словарь чаще всего применяют в компьютерной лингвистике. Кстати, мысль о том, что очень важно заранее договориться о словаре, пришла в голову ещё Льюису Кэрроллу: 28 из 39 страниц его книги как раз и занимает перечень английских слов, которые можно использовать в игре. Кроме того, условимся, что мы не используем в игре букву Ё и заменяем её на Е.

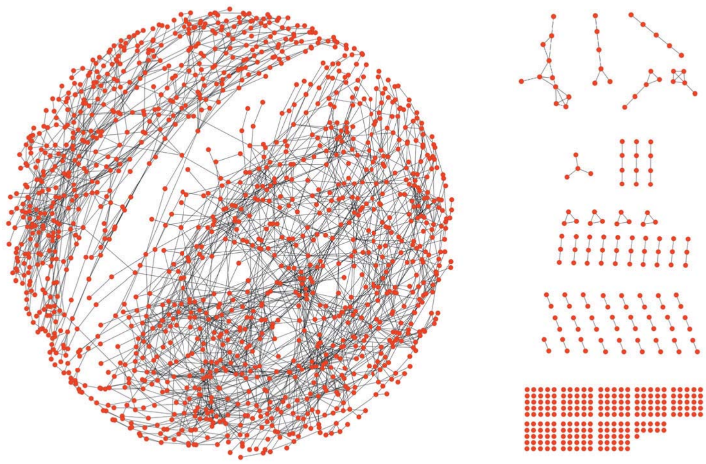
Всего в «Грамматическом словаре» 1712 четырёхбуквенных существительных. Возьмём, к примеру, существительное ЛОЖЬ и изобразим его точкой. Найдём в словаре все слова, которые отличаются от него на одну букву; их ровно четыре: ЛОЖА, ЛОЖЕ, ЛОСЬ и РОЖЬ. Изобразим их точками, соединёнными со словом ЛОЖЬ; наличие связи означает, что между словами можно перейти за один ход. (Кстати, какую ещё пару слов надо не забыть соединить?) Затем добавим слова, которые за один ход получаются из этих четырёх слов: КОЖА, ЛОЗА, ЛУЖА, ЛЫЖА, РОЖА, РОЛЬ, ЛОСК, – и нарисуем нужные связи.



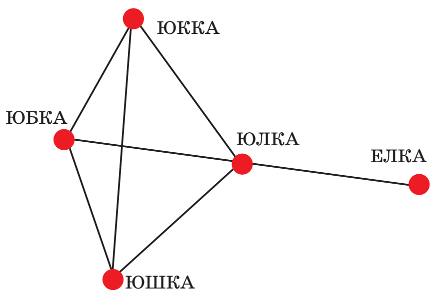
В итоге у нас получился граф, в котором некоторые из 12 точек (вершин) соединены отрезками (рёбрами). Если нам нужно превратить одно слово в другое, на математическом языке это формулируется так: найти путь между соответствующими вершинами, желательно кратчайший. Так, если нам надо пройти от ЛЫЖА до РОЛЬ, это займёт четыре шага,

и пути могут быть разными: ЛЫЖА → ЛОЖА → → РОЖА → РОЖЬ → РОЛЬ или ЛЫЖА → ЛОЖА → → ЛОЖЬ → РОЖЬ → РОЛЬ. (Докажите, что более короткого пути между словами ЛЫЖА и РОЛЬ нет.)

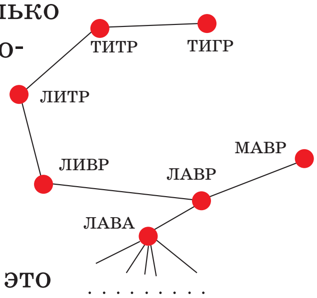
А теперь изобразим так не 12 слов, а все 1712, и посмотрим, как устроен этот граф. Вручную это сделать едва ли возможно, так что понадобится компьютер. Видно, что на графе выделяется большой кусок, где от любого слова можно дойти до любого другого; в теории графов такой подграф называют *компонентой связности*. Есть ещё несколько таких кусков поменьше и много точек, которые не связаны вообще ни с чем (такие отдельно стоящие точки тоже можно считать компонентами связности). Ясно, что от одного слова можно дойти до другого тогда и только тогда, когда они входят в одну и ту же компоненту связности.



Самая большая компонента связности включает в себя 1361 слово (то есть 79,5% всех слов). Кроме неё есть компонента размером 11 слов, ещё одна – размером 6 слов, 3 – размером 5 слов, 4 – размером 4 слова, 14 – размером 3 слова, 25 – размером 2 слова и ещё 211 отдельно стоящих слов (АЛОЭ, ВДОХ, ДЖАЗ, НЕБО, ОПЫТ, СОЮЗ, ТАЙМ и другие). Слово КЛЕН входит в большую компоненту связности, а слово ЕЛКА – в маленькую, 5-словную; этим и объясняется тот факт, что из слова КЛЕН не получится ЕЛКА.



Всего в нашем графе 3172 ребра, а значит, у слова в среднем $\frac{3172}{1712} \cdot 2 = 3{,}7$ соседей. Возвращаясь к самой большой компоненте связности, обратим внимание на то, что из неё торчат «хвосты». Дело в том, что даже в ней у некоторых слов совсем мало соседей. Скажем, от слова ТИГР можно перейти только к слову ТИТР, от него – только к слову ЛИТР, дальше – только к слову ЛИВР (это старинная французская монета, вспомните «Трёх мушкетёров»), дальше – только к слову ЛАВР, а уже от него – к словам МАВР и ЛАВА, после чего возможностей становится резко больше: от слова ЛАВА отходит ещё 5 слов, и мы попадаем в основую гущу вершин.



Таким образом, слово ТИГР – это конец хвоста, и если понадобится пройти из одного такого хвоста в другой, путь может получиться очень длинным, даже если это кратчайший путь между этими двумя вершинами. Самые длинные пути имеют длину 23 – например, от слова ДЖИП до слова ТУЕС (берестяная коробочка) всего 22 шага: ДЖИП → ДЖИН → УЖИН → УДИН → → ОДИН → ОВИН → ОВЕН → ОВЕС → СВЕС → → СВЕТ → СВАТ → СВАН → СТАН → СТЕН → → СТЕК → САЕК → РАЕК → РОЕК → БОЕК → → БУЕК → БУЕР → ТУЕР → ТУЕС. Глядя на эту цепочку, вам наверняка хочется пожаловаться: «Я же не знаю половины этих слов!» (признаюсь честно: я тоже не знаю). Но раз мы договорились использовать «Грамматический словарь», то и будем на него опираться, а к борьбе с незнакомыми словами вернёмся чуть позже.

Для 5-буквенных слов английского языка такой граф впервые построил знаменитый американский учёный и автор классических пособий по программированию Дональд Кнут. А почему, кстати, у него 5 букв, а у нас – 4? Есть ли какое-то объяснение тому, что в игру «Из мухи – слона» по-русски обычно играют 4-буквенными словами? Интуитивно кажется, что так интереснее всего. Но попробуем оценить этот интерес и количественно.

Окончание следует

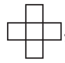
Художник Мария Усеинова

LXXXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Материал подготовил Константин Кохась

Санкт-Петербургская олимпиада по математике проводится для школьников с 6 по 11 класс, приглашаются все желающие. Первый (письменный) тур очередной олимпиады прошёл 17 ноября 2018 года. Мы приводим несколько задач этого тура для 6, 7 и 8 классов, попробуйте с ними справиться. В 6 и 7 классах предлагалось по 4 задачи, а в 8 классе – 5, на решение отводилось 3 часа.

Избранные задачи I тура

1 (7 класс). Таблица 70×70 заполнена числами от 1 до 4900: в первой строке слева направо выписаны числа от 1 до 70 в порядке возрастания; во второй строке точно так же выписаны числа от 71 до 140 и т.д.; в последней строке слева направо выписаны числа от 4831 до 4900. Можно ли в этой таблице найти крест из 5 клеточек вида , сумма чисел в котором равна 2018?

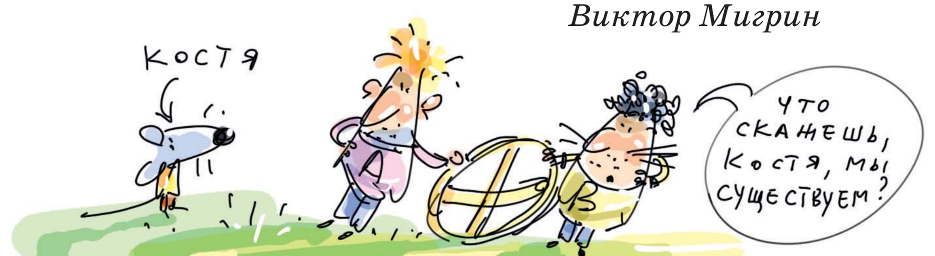
Андрей Солынин

2 (6 класс). Костю в детстве неправильно научили складывать натуральные числа: он полагает, что после привычного всем сложения следует переставить цифры суммы в убывающем порядке. Обозначим сложение по Костиному правилу знаком $\oplus$ (например, $99 \oplus 2 = 110$). Существуют ли такие натуральные числа a и b, для которых $a \oplus b = a$?

Константин Кохась

3 (6 класс). За большим круглым столом сидят 100 человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец, либо чудак. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда лжёт. Чудак говорит правду, если слева от него сидит лжец; ложь, если слева от него сидит рыцарь; все что угодно, если слева от него чудак. Каждый сказал: «Справа от меня сидит лжец». Сколько всего лжецов? Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Виктор Мигрин



4 (6 класс). Учительница считает некоторых учеников 6«А» класса отличниками, а остальных – двоечниками. В течение четверти в классе прошло 6 контрольных по математике (на них ставились оценки от 2 до 5). На каждой контрольной присутствовали все ученики, и на каждой контрольной они рассаживались по двое за парту (возможно, на разных контрольных по-разному). Двоечник чудесным образом получал тройку, если сидел за одной партой с отличником, и двойку, если сидел с другим двоечником. Всего за эти контрольные пятёрок было получено в 3 раза больше, чем четвёрок, а троек – на 10 меньше, чем двоек. Докажите, что найдётся отличник, получивший хотя бы одну оценку не выше тройки.

Александр Кузнецов

5 (8 класс). У Оли есть прямоугольная шоколадка с целыми сторонами, разбитая на единичные квадратики. Площадь шоколадки делится на 1000. Докажите, что Оля может съесть несколько квадратиков так, чтобы оставшаяся часть шоколадки оказалась прямоугольником, а площадь съеденной части составляла бы ровно 73% от исходной.

Ольга Иванова

6 (8 класс). Кузнечик начинает движение в левой верхней клетке квадрата 10×10. Он может прыгать на одну клетку вниз или вправо. Кроме того, кузнечик может из самой нижней клетки любого столбца перелететь в самую верхнюю клетку того же столбца, а из самой правой клетки любой строки перелететь в самую левую клетку той же строки. Докажите, что кузнечику понадобится хотя бы 9 перелётов, чтобы побывать на каждой клетке квадрата хотя бы по одному разу.

Надежда Власова

Художник Сергей Чуб

ОЛИМПИАДЫ

Русский медвежонок

Материал подготовил
Илья Иткин

1. Даны примеры из таблицы умножения на итальянском языке: tre × tre = nove
cinque × cinque = venticinque
sette × sette = quarantanove
На сколько дней власти задерживали в портах Италии в XIV веке иностранные суда, прибывшие из мест, где свирепствовала чума?
(А) на 9; (Б) на 20; (В) на 25; (Г) на 40; (Д) на 49.

Б.Л.Иомдин

2. В фантастическом романе Евгения Замятина «Мы» персонажи носят имена, состоящие из одной буквы и нескольких цифр. Герой, от лица которого ведётся повествование, воспринимает своего приятеля как «своё другое я». А как зовут этого приятеля?
(А) Р-13; (Б) Q-13; (В) R-13; (Г) S-13; (Д) Т-13.

И.Б.Иткин, С.И.Переверзева

3. Перед вами первая строфа стихотворения Владислава Ходасевича «Вечер» и ещё пять строк того же автора:

Под ногами скользь и хруст.
Ветер дунул, снег пошёл.
Боже мой, какая грусть!
Господи, какая боль!

1) *Верить, коченеть и петь*; 2) *И к чему такая ширь*; 3) *А когда настанет срок*; 4) *Не смутят моих детей*; 5) *Да и Ты немилосерд*.
Какие из приведённых выше строк взяты из другого стихотворения?
(А) 1 и 3; (Б) 2 и 4; (В) 3 и 4; (Г) 3 и 5; (Д) 4 и 5.

М.Б.Коношенко

Художник Николай Крутиков

4. «Скажешь “кел, кел” (‘приходи, приходи’) – не приходят; скажешь “келме, келме” (‘не приходи, не приходи’) – приходят». Это загадка ногайцев, одного из народов Северного Кавказа. А её отгадка – ... .
(А) глаза; (Б) губы; (В) руки; (Г) ноги; (Д) волосы.

М.Л.Рубинштейн

НАШ КОНКУРС (Квантик № 12, 2018)

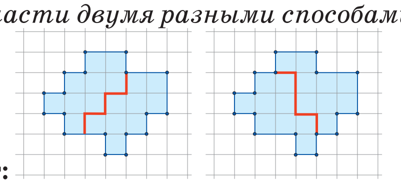
16. *У Андрея в ящике вперемешку лежат носки: целые – их 60%, и с дырками – их 40%. Когда Андрей достал 4 носка, процент оставшихся носков с дырками в ящике возрос до 50%. Сколько носков в ящике могло быть первоначально? Найдите все ответы и докажите, что других нет.*

Ответ: 10 или 20. Изначально носков с дырками было меньше половины, а стало ровно половина. Значит, Андрей достал больше целых носков, чем с дырками. Возможны два варианта: либо он достал 4 целых носка, либо 3 целых носка и 1 с дыркой. В первом случае вначале было на 4 целых носка больше, и они составляют 20% исходного количества – всего носков было $4 \cdot 5 = 20$. Во втором случае было на 2 целых носка больше, и всего носков было $2 \cdot 5 = 10$.

17. *Можно ли рассадить за круглым столом через равные промежутки между людьми 20 молчунов и несколько болтунов так, чтобы напротив каждого молчуна сидел болтун и чтобы никакие два болтуна не сидели рядом?*

Ответ: нет. Два молчуна не могут сидеть рядом, иначе противоположные им болтуны будут соседями. Значит, болтуны и молчуны чередуются, и всего их 40. Но тогда напротив молчуна окажется молчун – противоречие.

18. *Разделите фигуру на рисунке на две равные части двумя разными способами.*

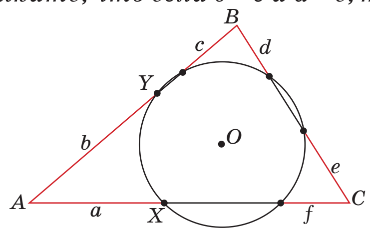
Ответ: 

19. *Можно ли представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных нечётных натуральных чисел: а) 2017; б) 2018; в) 2019?*

Ответ: а) нет; б) нет; в) да. Пусть в сумме k последовательных нечётных чисел, $k \geqslant 2$. Если k нечётно, сумма равна среднему числу, умноженному на k – так можно выразить лишь нечётное составное число. Например, $2019 = 673 \cdot 3 = 671 + 673 + 675$. Если k чётно, средних чисел два, и сумма равна чётному числу между ними (отсутствующему в сумме), умноженному на k, то есть сумма делится на 4. Таким образом, ни 2017, являющееся простым, ни $2018 = 2 \cdot 1009$ не представимы в виде требуемой суммы.

20. *Окружность пересекает стороны треугольника в шести точках (см. рисунок).*

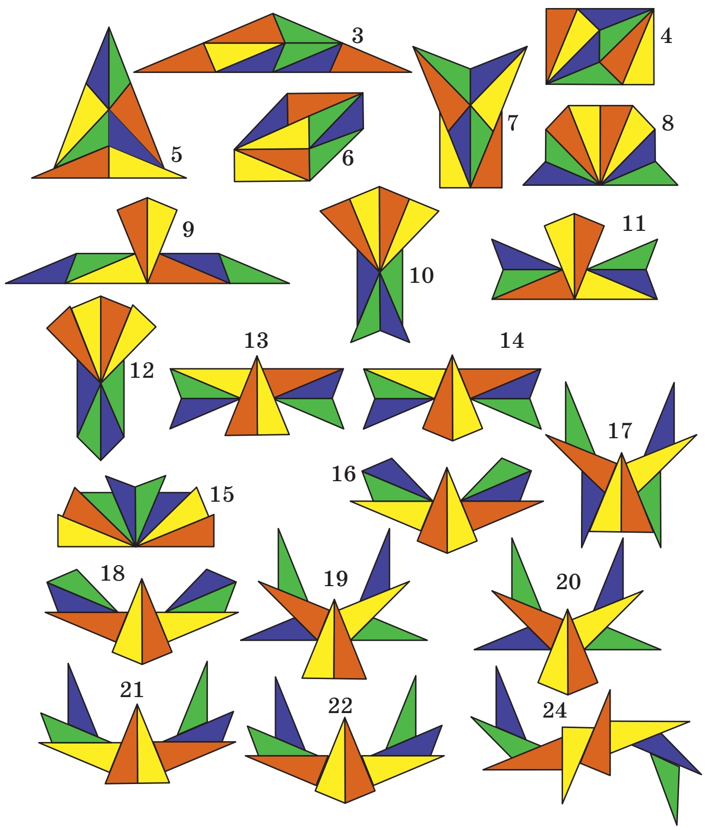
а) Докажите, что если $a = b$ и $c = d$, то $e = f$.
б) Докажите, что если $b = c$ и $d = e$, то $f = a$.



а) Пусть O – центр окружности. Если $a = b$, то треугольники AXO и AYO равны (по трём сторонам), откуда прямая AO – биссектриса угла A. Аналогично BO – биссектриса угла B. Тогда CO – также биссектриса угла C. При симметрии относительно CO окружность перейдёт в себя, и при этом отрезки e и f перейдут друг в друга, то есть $e = f$.

б) Заметим, что O лежит на серединном перпендикуляре к любой хорде окружности. Если $b = c$, то O лежит и на серединном перпендикуляре к AB. Аналогично, O лежит на серединном перпендикуляре к BC, то есть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC. Тогда O также лежит на серединном перпендикуляре к CA, откуда $f = a$.

УПРЯМОУГОЛЬНИК-8 (Квантик № 1, 2019)



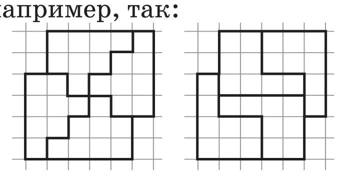
КАЗАРКИ И ГРАД (Квантик № 1, 2019)

По-видимому, так казарки стараются спрятать от прямых ударов чувствительный клюв и голову (с глазами и мозгом), подставляя шею и грудь. Участков на клюве и голове, открытых для градин, становится меньше, и удары по ним идут вскользь. А прятаться в укрытие этим птицам не свойственно. Более подробно об этом интересном поведении казарок можно прочитать в статье Иры Деминой «Канадские казарки в град» на сайте **elementy.ru**

XLI ТУРНИР ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА (Квантик № 1, 2019)

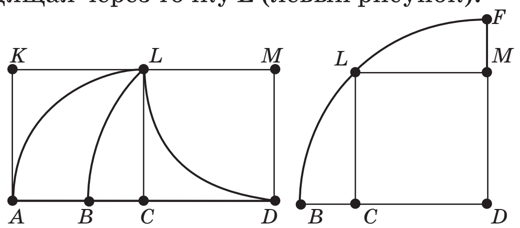
Математика

1. Да, например, так:



2. Да, может. Пусть в первый год количество деревьев увеличилось на 80%, а во второй – уменьшилось на 50%. Тогда за два года, количество деревьев изменилось в $1{,}80 \cdot 0{,}50 = 0{,}90$ раз, то есть как раз уменьшилось на 10%. При этом средний прирост действительно составил $(80\% + (-50\%))/2 = 15\%$.

3. Подойдёт дуга с центром в точке D, проходящая через точку L (левый рисунок):



Пусть сторона квадрата равна 1. Исходный криволинейный треугольник состоит из двух частей, из которых можно сложить квадрат со стороной 1. Поэтому достаточно доказать, что площадь любой из двух частей на левом рисунке равна 1/2. Самое сложное — посчитать площадь криволинейного треугольника BLC. Из правого рисунка видно, что площадь BLC равна $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{2}^2}{4}-1\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ Но тогда площадь ALB равняется $\frac{\pi\cdot 1^2}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, что и требовалось.

Лингвистика

Все шесть предложений состоят из подлежащего, после которого следует придаточное предложение, сказуемого и, возможно, дополнения. В переводах на сингальский язык придаточное предложение стоит перед определяемым существительным. После подлежащего следует дополнение, а потом сказуемое. На конце сказуемого стоит *kara*, если к нему относится дополнение в винительном падеже без предлога, *ve* – если на конце стоит *-ся*, *y* – если предложение главное, *na* – если предложение придаточное. Дополнение и подлежащее придаточного предложения оканчиваются на *-u*.

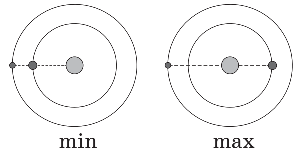
Ответ: Miniheku biyakarana ballek mahalleku vehesaṭapatkaray. Pramādavena taruṇayek daruveku avadikaray.

Физика

1. Вода может заполнять промежутки между кусочками льда, не повышая уровень льда. Кроме того, так как её температура больше 0°C, то лёд мог частично растаять и перераспределиться в стакане, если кусочки были между собой как-то зацеплены. Также при таянии льда общий объём уменьшается, так как плотность воды выше плотности льда.

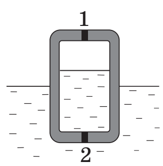
2. Когда Петя резко затормозил, то, чтобы не улететь по инерции с велосипеда, он опирался на велосипед. Так как вес Пети был сосредоточен на одной стороне руля, то Петя, надавив на руль, повернул его, и велосипед совершил крутой поворот на большой скорости, почему Петя и упал. Вася давил на руль двумя руками, а Гриша не давил вовсе, поэтому руль не повернулся.

3. Минимально возможное расстояние между планетами достигается тогда, когда обе они находятся на одной прямой со звездой с одной стороны от неё, а максимально возможное – когда планеты на одной прямой со звездой по разные стороны от неё (см. рисунок).



В следующий раз максимальное расстояние между планетами будет тогда, когда более быстрая планета совершит на пол-оборота больше, чем медленная. За один земной год быстрая планета совершает на $1/0{,}8 - 1/1 = 0{,}25$ оборота больше, значит, нужное время – 2 года.

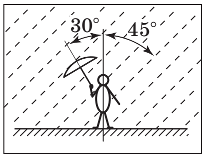
4. а) Так как давление воздуха внутри сосуда такое же, как снаружи, то удаление пробки 1 ничего не меняет. Если вынуть пробку 2, то уровень воды внутри и



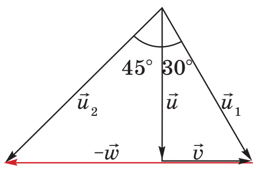
снаружи сравняется – вода из сосуда вытечет. Образованный излишек подъёмной силы, который держал эту воду, поднимет сосуд выше. Кстати, это означает, что материал, из которого сделаны стенки сосуда, легче воды.

б) Если вынуть пробку 2, то, как и в пункте а), вода начнёт вытекать из сосуда, но воздух внутри сосуда будет растягиваться, и равновесие наступит, когда тяжесть воды в сосуде над уровнем воды вне сосуда компенсируется падением давления воздуха в сосуде. Как и в пункте а), сосуд при этом поднимется. Если теперь вынуть пробку 1, то давление воздуха в сосуде поднимется до атмосферного, вода в сосуде опустится до уровня воды вне сосуда, а сам сосуд ещё немного поднимется. Правда, заметными эти перемещения будут только в случае очень большого сосуда (в несколько метров высотой), потому что атмосферному давлению соответствует высота столба воды приблизительно 10 м.

5. а) Поскольку все люди на платформе наклонили свои зонты влево (а мы верим в их адекватность), ветер относительно земли дует вправо. Картина, которую видит пассажир поезда, будет наблюдаться в том случае, если поезд тоже едет вправо по рисунку, но со скоростью, превышающей скорость ветра. Тогда относительно него воздух будет двигаться влево, и струи дождя будут отклонены от вертикали именно в эту сторону.



б) Пусть $\vec{u}$ – вектор скорости капель относительно воздуха (эта скорость направлена вертикально вниз), $\vec{v}$ – вектор скорости ветра относительно земли, $\vec{w}$ – вектор скорости поезда относительно земли. Тогда скорость капель относительно земли $\vec{u}_1 = \vec{u} + \vec{v}$, и мы знаем, что этот вектор образует с вертикалью угол 30° (см. рисунок) – именно навстречу ему люди поворачивают зонты, чтобы как можно большую часть своего тела защитить от дождя. В системе отсчёта поезда скорость капель $\vec{u}_2 = \vec{u}_1 - \vec{w}$, направлена она под углом 45° к вертикали. Тогда, как видно из рисунка, $u = w - v$, $v = u \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}(w - v)$. Отсюда $w = (1+\sqrt{3})v \approx 27{,}3$ м/с $\approx 98{,}3$ км/ч



Астрономия

1. Созвездие – это участок на небе, и в нём могут находиться сколь угодно далёкие друг от друга объекты. Созвездие не имеет физических размеров, лишь угловые. Но все яркие звёзды, образующие контуры созвездий, находятся в нашей галактике – Млечном пути. Другие же галактики расположены далеко от нас и занимают совсем небольшие участки звёздного неба. Галактика Туманность Андромеды названа в честь созвездия, в котором была обнаружена. Хотя Туманность Андромеды содержит около триллиона звёзд, она настолько удалена, что выглядит как небольшое облачко – поэтому её назвали Туманностью. Сейчас же к туманностям относят только видимые участки межзвёздной среды, состоящие из пыли, газа или плазмы.

2. На Солнце протекает термоядерная реакция, в которой под гигантским давлением, созданным притяжением массы вещества, ядра водорода сливаются и выделяют тепло. Поэтому поливать Солнце водой – значит снабжать его топливом. А чтобы потушить Солнце, можно либо во много раз уменьшить его массу, либо заполнить ядро тяжёлыми элементами, например железом – они не будут участвовать в термоядерных реакциях. Однако водой также можно потушить Солнце: нужно добавить столько вещества, что под его тяжестью Солнце превратится в чёрную дыру.

Биология

1. У многих видов самцы и самки неразличимы для человека, но хорошо различимы для самих животных за счёт запаха, издаваемых звуков, особенностей зрения, и т.д. Разные размер и/или окраска могут возникать, если вклад в заботу о потомстве не одинаков: заботящийся обычно менее заметен, самки могут быть крупнее, поскольку вынашивают и/или питают потомство. Заметная внешность помогает при демонстративном поведении (для привлечения партнёра, установления иерархии или борьбы за территорию). Она часто свойственна полигамному виду (важнее оставить много потомства, чем защититься от хищников). Полы могут сильно отличаться, если ведут разный образ жизни (крылатые и бескрылые, паразиты и свободно живущие). Различия во внешности помогают избежать конкуренции полов. Часто самцы и самки различимы только в определённый сезон.

2. Растения могут для защиты от перегрева понижать свою температуру, испаряя влагу, отражая и рассеивая солнечные лучи слоем специальных веществ или волосков, поворачивая листья перпендикулярно солнечным лучам. Некоторые растения повышают температуру цветков и соцветий для распространения запаха и привлечения опылителей, особенно в темноте или в холодную погоду. Растения могут повышать температуру для прорастания в холодных условиях (например под снегом), перестраивая биохимические процессы, в первую очередь – дыхание. Растения могут защищаться от резких перепадов температуры (заморозки и т.п.) опушением частей растения, толстым слоем пробки на стволе, особой формой роста (подушковидная и т.п.).

3. Плавучесть может меняться за счёт накопления газов в специальных камерах или удаления этих газов; путём обмена тяжёлых ионов на лёгкие и наоборот. Можно улучшить плавучесть, увеличив общую поверхность тела (например выбрасывая вещества, образующие слизь). Организмы могут погружаться, втягивая или прижимая к себе выросты тела. Можно улучшать плавучесть медленно – увеличивая выросты на теле; накапливая жир.

4. Изменение формы: более обтекаемая форма тела, уменьшение выступающих частей, преобразование конечностей и хвоста в плавательные, уменьшение волосяного покрова или смазка волос водоотталкивающим жиром.

Изменение дыхания: перемещение дыхательных отверстий и возможность их закрывать, более полное разделение дыхательного и пищеварительного трактов, формирование вторичных жабр, возвращение к дыханию поверхностью тела и формирование дыхательных трубочек.

Борьба за кислород: повышение кислородной ёмкости крови, запасание кислорода в мышцах, повышение эффективности кислородного обмена в лёгких, перераспределение крови при нахождении под водой к чувствительным к гипоксии органам, частичный переход на анаэробный метаболизм при глубоком погружении.

Прочее: накопление подкожного жира для защиты от переохлаждения. Развитие органов чувств, наиболее приспособленных к использованию под водой.

Следующие отряды и семейства животных перешли на водный образ жизни: утконосы, китообразные, ластоногие (по традиционной систематике), сирены (ламантины, дюгони), хищные (моржи, тюлени, каланы), пингвины, морские и пресноводные змеи, черепахи, крокодилы, пауки (паук серебрянка), водяные клещи, жуки (плавунцы, плавунчики, водолюбы, вертячки); личинки стрекоз, подёнок, веснянок, ручейников, некоторых комаров и мух; моллюск прудовик. Попробуйте определить, какие адаптации присутствуют у каких животных.

История

1. Гипотезу о том, что все звёзды суть очень далёкие от нас аналоги Солнца, тоже окружённые планетами, опубликовал в 1440 году Никлас Кребс – германский церковник, епископ и к этому моменту уже кардинал Римской курии (по месту работы его чаще называли Николай Кузанский).

Николай Кузанский был одним из лидеров новой европейской науки. Большие заслуги перед Церковью давали ему гарантию от любых обвинений в ереси или безбожии. Вдобавок, его книга была ещё рукописной (книгопечатание в Европе началось только в 1450-е годы), так что эта рукопись «для служебного пользования» имела мало читателей. Напротив, Джордано Бруно действовал в конце XVI века, в эпоху массового книгопечатания, засилья вольнодумной литературы и острой борьбы церковников между собой и со светскими диссидентами.

2. • Да, Николай I мог сфотографироваться. Существует прижизненная фотография (вернее, дагерротип) императора, сделанная в мастерской Сергея Левицкого. Официальной датой изобретения дагерротипа считается 1839 год.

• Нет, Александр III не мог прокатиться по Петербургу на трамвае. Однако те, кто отвечали, что трамвай к тому времени не был изобретён, ошиблись. При жизни Александра III трамвай был запущен в Киеве (1892 год). Однако в Петербурге трамвайное движение было запущено только в 1907 году.

• Да, Николай II мог отправить своему кузену (Георгу V, например) телеграмму. Телеграфные станции в Москве и Петербурге были открыты уже в 1852 году.

ЧТО ТАКОЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

1. «Тёплые поручни» – это обычные никелированные поручни, покрытые тонким слоем пластика. Пластик плохо проводит тепло, и поэтому тепло от человеческих рук не распространяется вдоль такого поручня. Это создаёт ощущение, что поручень тёплый.

2. Если снежинки на комбинезоне тают, то температура на его поверхности плюсовая. Стало быть, такой комбинезон плохо сохраняет тепло человеческого тела и отводит его в окружающую среду. Теплее одежда у того полярника, который похож на снеговика.

ИЗ МУХИ – СЛОНА

БОРЩ → БОРТ → ПОРТ → ПОСТ; ЛИПА → → ЛАПА → ПАПА → ПАРА → ЖАРА; КИНО → → ВИНО → ВИНА → ВИЗА → ВАЗА → ВАТА; ПАУК → ПАРК → ПАРА → КАРА → КОРА → → КОЖА → ЛОЖА → ЛОЖЬ → ЛОСЬ; из КЛЕН получить ЕЛКА нельзя.

LXXXV САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Ответ: нет. Если в центре фрагмента стоит x, то сумма чисел в кресте равна $5x$ и тогда $5x = 2018$, что невозможно при целом x.

2. Ответ: нет. При обычном сложении число увеличится, а при перестановке цифр ещё больше увеличится.

3. Ответ: 50 или 0. Если за столом есть лжец, то справа от лжеца – чудак или рыцарь, в такой ситуации оба говорят правду, значит, следующий после них – снова лжец. Получаем, что лжецы и не лжецы чередуются, и лжецов ровно половина. Любая рассадка такого вида удовлетворяет условию. Если же лжецов за столом нет, то рыцарей тоже нет (потому что справа от рыцаря должен быть лжец) и за столом одни чудаки.

4. Допустим, что такого отличника нет. Тогда все оценки не выше трёх получены двоечниками и суммарное число двоек за все шесть контрольных чётно, потому что их получали двоечники, сидящие за одной партой. Так как суммарное число троек на 10 меньше, общее количество двоек и троек – чётное число, не делящееся на 4. По условию пятёрок в три раза больше четвёрок, то есть суммарное число четвёрок и пятёрок делится на 4. Таким образом, суммарное количество всех оценок не делится на 4. Но это невозможно, так как на каждой из шести контрольных ставилось одно и то же чётное число оценок, поскольку все сидели парами.

5. Поскольку $1000 = 5^3 \cdot 2^3$, длина одной из сторон шоколадки делится на 5^2 и одной из сторон – на 2^2. Если это одна и та же сторона, то она делится на 100; отрежем поперёк этой стороны 27/100 шоколадки и остальное съедим. Если же это разные стороны, отрежем 9/25 по одной стороне, а потом 3/4 по другой, опять получится шоколадка площади 27/100.

6. На диагонали, идущей слева снизу вправо вверх, находится 10 клеток. После того как кузнечик добрался до одной из них, чтобы посетить следующую, ему потребуется добраться до края и сделать перелёт.

РУССКИЙ МЕДВЕЖОНОК

1. Достаточно просто догадаться, что tre значит «3», отсюда nove – «9». Квадрат числа меньше десяти, начинающийся или заканчивающийся той же цифрой, – либо 25, либо 36 (на самом деле cinque – это «5», а venti – «20»); в любом случае получается, что в составных числительных по-итальянски, как и по-русски, идут сначала десятки, а потом единицы. Значит, quarantanove – квадрат числа меньше десяти, заканчивающийся на 9, то есть 49; отсюда sette – «7», а quaranta – «40». Связав полученные знания с условием задачи, догадываемся, что речь идёт о *карантине*. Действительно, это русское слово произошло от итальянского, означающего «сорок». **Ответ:** (Г).

2. Имя приятеля, которого герой воспринимает как «своё другое я», по всей видимости, выбрано автором не случайно: оно содержит зеркально отражённую букву «Я» («другое я»), то есть латинское R. **Ответ:** (В).

3. Характерная особенность этого стихотворения – необычные рифмы: во всех строках находим мужские рифмы (то есть с последним ударным слогом), в которых согласные после ударного гласного различаются по твёрдости / мягкости: ***хруст – грусть***, ***пошёл – боль***. Такую рифму не могут образовывать строки *А когда настанет срок* и *Не смутят моих детей*: на *-окь* русские слова оканчиваться не могут, а согласного, парного по твёрдости/мягкости к [й], и вовсе не существует. **Ответ:** (В).

* Вот окончание этого стихотворения:

Тяжек Твой подлунный мир,
Да и Ты немилосерд,
И к чему такая ширь,
Если есть на свете смерть?
И никто не объяснит,
Отчего на склоне лет
Хочется ещё бродить,
Верить, коченеть и петь.

4. При произнесении слова «кел» губы не смыкаются («не приходят»), а в слове «келме» есть губной согласный [м], и губы смыкаются («приходят»). **Ответ:** (Б).

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач VI тура, с которыми справитесь, не позднее 1 марта в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: v.ht/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VI ТУР

26. Среди 12 человек нет людей одного роста. Они выстроились в круг, после чего те, кто выше обоих своих соседей, подняли левую руку, а кто ниже обоих своих соседей – правую. Могло ли случиться, что а) никто не поднял руки; б) все подняли руку?

27. Можно ли на некоторые клетки шахматной доски 8×8 поставить по фишке так, чтобы количества фишек в любых двух соседних вертикалях и в любых двух соседних горизонталях были ненулевыми и отличались а) в 5 раз; б) в 6 раз?

Авторы: Игорь Акулич (27), Григорий Гальперин (28), Николай Авилов (29), Егор Бакаев (30)

28. 31 декабря 19 человек справляли Новый год. Каждому гостю дали две карточки, маленькую и большую, и попросили написать на маленькой карточке свой возраст (число полных лет), а на большой – свой год рождения. После этого все карточки смешали и произвольно разделили на две группы. В первой группе сумма чисел поделилась на 19. Обязательно ли тогда и во второй группе сумма чисел поделилась на 19?

29. Ёлочка украшена тремя горизонтальными гирляндами и четырьмя гирляндами, спускающимися с вершины вниз. Во всех гирляндах по четыре шарика. Впишите в шарики все целые числа от 1 до 13 (в каждый шарик по одному числу) так, чтобы сумма четырёх чисел в каждой из семи гирлянд была одной и той же.

30. Можно ли раскрасить все точки бесконечной плоскости в а) 3; б) 4 цвета так, чтобы все цвета присутствовали, но нельзя было провести окружность, на которой есть точки всех цветов? (Кисточка, которой красится плоскость, настолько тонкая, что можно любую точку покрасить в любой цвет, не запачкав никакие другие точки.)

Художник Николай Крутиков

ДВЕ ВЕРЁВКИ

На пустой сцене вы видите Квантика и Ноутика, которые хотят связать порвавшуюся верёвку. Квантик сможет сделать это, если оба конца верёвки будут у него в руках. Но взявшись за один конец, он не дотягивается до другого. Помогите им справиться с задачей без помощи посторонних.

По задаче Мартина Гарднера

Художник Yustas

ISSN 2227-7986