ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 9 | сентябрь 2020

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№9
сентябрь
2020

ГИЙОМ ЛЕЖАНТИЛЬ

ТРАНСПОРТНЫЕ ДЕТАЛИ

ТАБЛЕТКА ОТ ЗАБЫВЧИВОСТИ

Enter

ОТКРЫЛАСЬ ПОДПИСКА на 2021 год!

Подписаться на журнал можно в отделениях Почты России и через интернет

ОБЪЕДИНЁННЫЙ КАТАЛОГ «ПРЕССА РОССИИ»

на I полугодие – индекс 11346

на год – индекс 11348

akc.ru/itm/kvantik

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

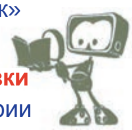
на I полугодие – индекс 84252

press.rosp.ru

Подробнее обо всех способах подписки на журнал «Квантик» читайте на сайте **kvantik.com/podpiska**

НАШИ НОВИНКИ

АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ «КВАНТИК», выпуск 16 включает в себя все материалы журналов «Квантик» за II полугодие 2019 года



КАК БУСЕНЬКА ЧТО-ТО-ТАМ. Математические сказки (автор – Константин Кохась) – это третья книга серии «Библиотечка журнала «Квантик», где собраны истории о приключениях Бусеньки и её друзей, публиковавшиеся в журнале в рубрике «Математические сказки»

Приобрести продукцию «Квантика» можно в магазине «Математическая книга» (Москва, Большой Власьевский пер., д.11), в интернет-магазине **kvantik.ru** и других магазинах (см. список на сайте **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 9, сентябрь 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. Н. Козакова, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, И. А. Маховая, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik/**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 07.08.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

Анастасия Челпанова

Гийом Лежантиль

В 1761 году Парижская академия наук разработала программу, позволявшую достаточно точно определить расстояние от Земли до Солнца. Идея была в том, чтобы наблюдать прохождение Венеры на фоне диска Солнца из разных уголков Земли, фиксируя точные координаты наблюдения и время появления (или ухода) Венеры с диска. Для этой цели выявили лучшие места для наблюдений и разослали письма учёным по всей Европе. В результате такого международного сотрудничества расстояние до Земли было рассчитано весьма точно.

Прохождение Венеры по диску Солнца – редкость. Оно происходит циклами: два раза с промежутком в 8 лет, затем через 105,5 лет, снова через 8 лет и, наконец, через 121,5 лет. Потом цикл повторяется.

Одним из астрономов, отплывших из Франции, чтобы наблюдать это явление, был Гийом Лежантиль (полное имя Guillaume Joseph Hyacinthe Jean-Baptiste Le Gentil de la Galaisière). Его путь лежал в индийский город Пондишери, тогда принадлежавший Франции. Однако в те времена Франция воевала с Англией, в том числе за индийские земли, и у путешественника возникли непредвиденные трудности.

Дойдя до острова Иль-де-Франс (сейчас Маврикий) на торговом судне, Лежантиль узнал, что Пондишери осаждён англичанами. Отправиться дальше он смог лишь через 8 месяцев, сев на военный фрегат, идущий на помощь городу. Но когда через два с половиной месяца корабль подошёл к берегам Индии, с индийской лодки капитану сказали, что городом Пондишери теперь владеют англичане. Кораблю пришлось поднять португальский флаг и пройти мимо порта. Через несколько дней корабль направился обратно на Иль-де-Франс. Наблюдать прохождение Венеры астроному

пришлось посреди моря, с палубы корабля. Он определил время появления и ухода Венеры с диска Солнца, но маятниковые часы на качающемся корабле были ненадёжными. Кроме того, корабль постоянно перемещался, поэтому точные координаты наблюдения Гийом Лежантиль определить не мог. В результате данные астронома оказались бесполезными.

Гийом не хотел возвращаться на родину, не выполнив задачу, а потому решил подождать следующего прохождения Венеры, в 1769 году. Восемь лет он изучал природу индийских островов: составлял карты, описывал погоду, животных и растения. Учёный вычислил, что самые точные данные при следующем прохождении Венеры можно будет получить восточнее Индии, поэтому в 1766 году отправился на Филиппинские острова, которые тогда принадлежали Испании, союзнице Франции. Прибыв в столицу Филиппин Манилу, астроном вычислил её точные координаты и стал изучать местную природу. Однако обнаружив, что в Маниле много облачных дней, решил вернуться в Пондишери, который был освобождён от англичан и снова принадлежал Франции.

В марте 1768-го Гийом Лежантиль наконец попал в Пондишери. До прохождения Венеры (4 июня 1769-го) оставалось больше года, поэтому астроном определил точные координаты места наблюдения и стал изучать местную флору и фауну.

Накануне дня наблюдения погода была ясной, однако ночью небо затянули тучи и разошлись они только через два часа после прохождения Венеры! После такой неудачи учёный две недели был подавлен и даже не вёл дневник. Переживания астронома усугубило письмо из Манилы: там наблюдения прошли с прекрасной видимостью.

Утомлённый неудачами и болезнями, учёный решил ехать домой. Он вернулся на остров Иль-де-Франс в апреле 1770 года, но из-за болезни был вынужден ждать следующее судно, идущее во Францию. Через несколько месяцев он отплыл на родину. Однако через пару недель плавания корабль попал в бурю и с большим трудом вернулся обратно на остров. Отправиться на следующем корабле Лежантиль не смог по неожиданной причине: новый комиссар острова недолюбливал астронома и запретил капитану корабля брать его на борт. Лишь 30 марта 1771 года астроном отплыл домой на испанском корабле. Однако за проезд на иностранном судне учёному пришлось заплатить, оставив на острове восемь ящиков с коллекциями редких раковин, кораллов и другими экспонатами. Через четыре месяца корабль прибыл в Испанию. Здесь учёный перегрузил свои книги и инструменты на французское судно, а сам отправился во Францию по суше. Оказался он на родине лишь 8 октября 1771 года.

Дома возвращению астронома удивились, так как считали, что он погиб. Его жена вышла замуж за другого, его место в Академии наук занял другой учёный, а бóльшая часть его состояния пропала.

Однако уже в 1772 году король восстановил Лежантиля в Академии наук. Через два года астроном женился, а ещё через восемь лет король назначил его академиком, одним из трёх среди астрономов в Академии.

Несмотря на неудачи своего одиннадцатилетнего путешествия, Гийом Лежантиль продолжил работу, опубликовал два тома своих наблюдений, куда вошли карты, описания сезонных ветров, координаты разных мест, описания флоры и фауны Индии, а также Индийских и Филиппинских островов.

Художник Мария Усеинова

Валерия Сирота

ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, или ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Продолжение. Начало в «Квантике» № 8

В прошлом номере «Квантика» мы обсудили, что значит «идти прямо» по кривой поверхности. Такие «прямые» линии называются геодезическими, и на каждом достаточно маленьком, почти плоском кусочке поверхности они должны не отличаться от обычной прямой линии. Главное – не смотреть куда-то вдаль, а идти прямо ближайшие пару шагов! А потом ещё пару... Мы также узнали, как просто и удобно изготовить две поверхности — цилиндр и конус. Теперь представим себе, что Очень Маленькое Существо идёт прямо, не сворачивая, по Очень Длинному Цилиндру – каков будет его путь?

Прогулка по цилиндру

Цилиндр делается из прямоугольного листа бумаги склеиванием двух противоположных сторон (рис. 6). А сам лист, до того как его склеили, называется *развёрткой цилиндра*.

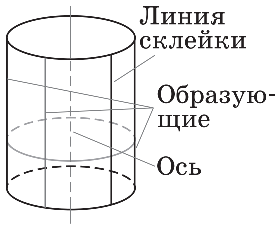


Рис. 6

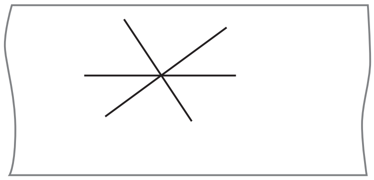
Выберем точку где-нибудь на цилиндре. Из неё можно идти в разные стороны, поэтому через неё проходит множество геодезических – например образующая[1] (если пойти параллельно оси цилиндра, то с образующей никуда не свернёшь). Другая геодезическая – окружность: по ней мы пройдём, если начнём двигаться перпендикулярно образующей. А если пойти куда-то ещё, между этими двумя направлениями?

Помните? – Важны только достаточно близкие точки, дальше двух шагов вперёд смотреть не надо! Поэтому можно спокойно развернуть обратно наш лист бумаги (если уже успели склеить, придётся разрезать по одной из образующих). Ведь маленький, почти плоский кусочек цилиндра – это то же самое, что маленький кусочек его развёртки. И чертить геодезическую на этом плоском листе гораздо удобнее, чем на цилиндре!

[1] Заметим, что на склеенном цилиндре линия склейки уже ничем не выделяется, не отличается от других образующих. И чтобы получить развёртку, можно разрезать цилиндр по любой образующей.

Итак, от выбранной нами точки где-нибудь в середине развёртки надо нарисовать маленький отрезок прямой, потом продлить его ещё чуть подальше... Да ведь просто прямая получается (рис. 7)!

Линия склейки



Линия склейки

Рис. 7. Развёртка цилиндра и кусочки нескольких геодезических, проходящих через одну точку. Образующие цилиндра – горизонтальные прямые.

Или нет?.. Когда мы добираемся до линии склейки, возникает небольшая проблема. *Куда дальше идти? Как продлить путь за линию склейки?*

Задача 1. Дорисуйте геодезическую на развёртке цилиндра на рисунке 8. Когда начертите, не забудьте сложить цилиндр и проверить, похожа ли геодезическая в районе склейки на прямую.

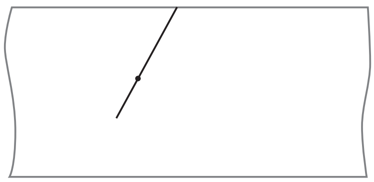


Рис. 8. Фрагмент геодезической на развёртке цилиндра

Решение на следующей странице, а пока вы думаете – вот ещё такая же задачка про конус.

А теперь – конус!

Если склеить конус из прямоугольного листа, основание будет неровным и даже с торчащими углами. Но можно обрезать развёртку заранее так, чтобы никаких углов не было, а основанием нашего конуса была красивая, аккуратная окружность.

Задача 2. а) По какой линии нужно обрезать развёртку, чтобы при склеивании бумажного конуса его основание оказалось окружностью?

б) (*чуть посложнее*) Какой угол раствора конуса получится из такой развёртки? [2]

Пора идти гулять! Однако не спешите склеивать ваш конус, потому что, как и в случае с цилиндром, геодезические гораздо удобнее рисовать на развёртке.

Задача 3. Выберите какую-нибудь точку на вашей развёртке (не на линии склейки) и проведите через неё карандашами разных цветов

[2] *Подсказка.* Для решения этой задачи полезно знать, что такое π. Решение – в конце журнала.

а) геодезическую, проходящую через вершину конуса (она называется *образующей* конуса);

б) геодезическую, которая на этой развёртке параллельна линии склейки;

в) геодезическую, которая на этой развёртке перпендикулярна линии склейки. Кусочки некоторых из этих линий уже есть на рисунке 9, нужно продолжить их. Постарайтесь нарисовать или хотя бы представить себе, как эти линии будут выглядеть на «собранном» конусе. Потом сложите из вашей развёртки конус и проверьте.

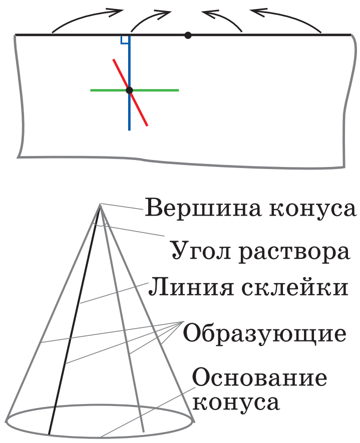


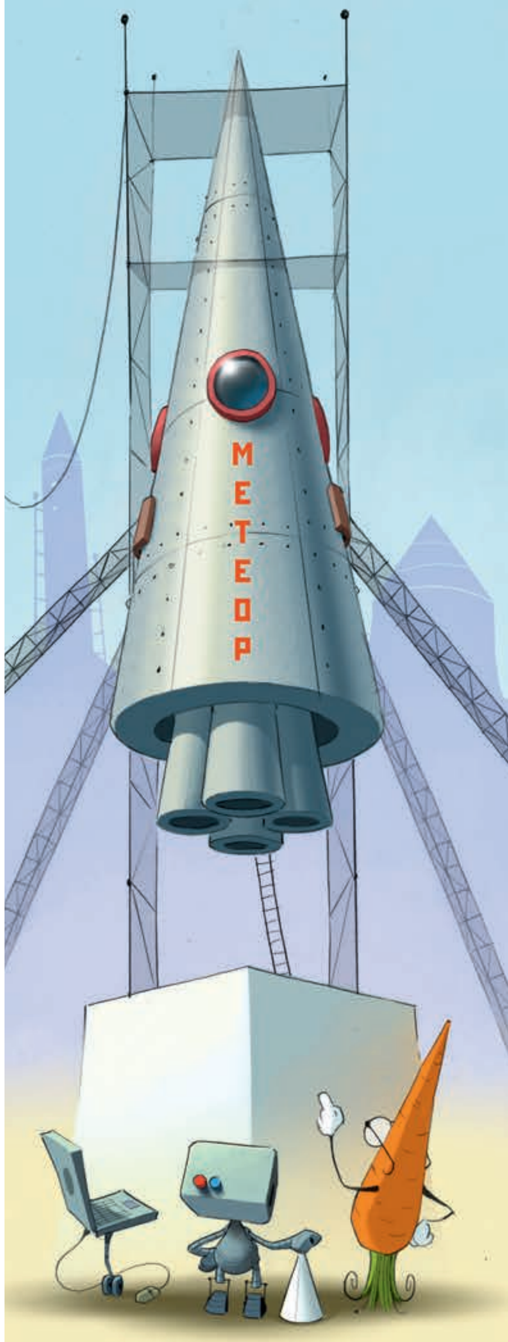
Рис. 9. Развёртка конуса и сам конус

Не забудьте, что идти прямо можно в обе стороны! Геодезическая не может взять да и закончиться «в чистом поле», посреди конуса... Исключение – особенная геодезическая, которая приводит в вершину конуса. Там сама поверхность негладкая – такой уж острый кончик, что совершенно непонятно, как можно его пересечь. В природе, конечно, таких совсем острых кончиков не бывает, они всегда скруглены как-нибудь – и тогда по ним пройти можно.

Задача 4. Рисуем (лучше на новом листе) самый общий случай – геодезическую, которая из выбранной нами точки на развёртке (и конусе) выходит в произвольном направлении (например, красная линия на рисунке 9). Опять важно понять, что делать при пересечении линии склейки. Помните – в окрестности каждой своей точки геодезическая похожа на прямую! А в конце сложите конус, убедитесь, что на получившейся линии нет изломов и углов.

***

Решение задачи 1. Перейдя линию склейки, мы окажемся на нижней границе развёртки, ровно под тем местом, где достигли верхней границы. Дальше нужно продолжать двигаться в том же направлении, значит, угол между линией дальнейшего пути и образующей цилиндра (линией склейки) останется



тем же, что и до перехода через линию склейки. Поэтому дальнейший путь пойдёт по отрезку прямой, параллельной отрезку на рисунке 10. Вскоре мы опять, уже второй раз, доберёмся до верхней линии склейки... Такие отрезки-продолжения нужно рисовать по обе стороны от начальной точки. В итоге на развёртке получится набор параллельных друг другу равноудалённых отрезков. А на цилиндре – винтовая линия.

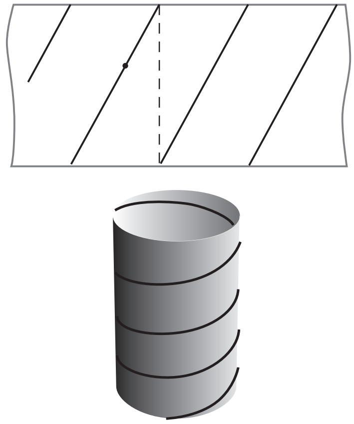


Рис. 10. Геодезическая на цилиндре

Решение задач 3 и 4. Опять, пока мы не дошли до линии склейки, все линии на развёртке – прямые (рис. 11). При переходе линии склейки на развёртке конуса мы попадём в точку на второй линии склейки, на том же расстоянии от вершины. Чтобы продолжать идти в ту же сторону, нужно, чтобы угол, образуемый новой прямой с линией склейки, остался прежним, причём если мы шли «от вершины» (вверх и влево), то и дальше надо идти «от вершины» (теперь уже вниз и вправо).

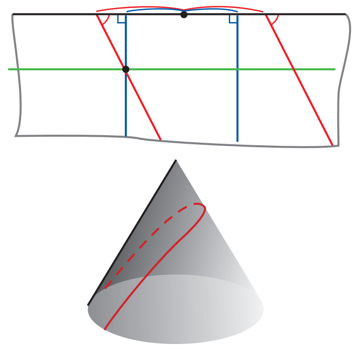


Рис. 11. Геодезические на конусе

***

Если вы справились с последними двумя задачами – или хотя бы посмотрели решение, – вы, наверно, заметили, что все геодезические, как их ни строй и куда ни направляй из выбранной точки, получаются очень похожими.[3] Отличаются они всего одним параметром: минимальным расстоянием до вершины.

Задача 5. На всех развёртках геодезических из задач 3 – 4 отметьте это минимальное расстояние, то

[3] Обратите внимание, что окружности, параллельные основанию конуса, – не геодезические! Чтобы обходить конус по кругу, «не теряя высоты», придётся всё время чуть-чуть поворачивать.

есть для каждой геодезической найдите точку, которая ближе всех к вершине конуса.

И ещё одно замечательное свойство этого конуса: «концы» любой геодезической параллельны друг другу и на выкройке, и на конусе. Забавно, да? «Прямая» параллельна самой себе... В самом деле – например, у геодезической, параллельной образующей (пункт *а* в задаче 4), это явно видно: на развёртке оба её «конца» параллельны линии склейки. При складывании развёртки в конус всё это искажается, и параллельность, вообще говоря, нарушается (прямая на развёртке вообще перестаёт быть настоящей прямой, хотя и остаётся геодезической на конусе). Но вдали от вершины конуса любой небольшой участок его поверхности всё меньше отличается от кусочка плоскости, а расстояние от этих «концов» до бывшей линии склейки остаётся тем же самым. Поэтому «концы» геодезической оказываются почти настоящими прямыми, при этом почти параллельными! И чем дальше от вершины конуса, тем они «параллельнее».[4]

Но почему же все геодезические одинаковы?

Оказывается, задачу 4 можно было бы и не решать – любую геодезическую, из любой точки и в любую сторону, можно построить так, как в задаче 3, если использовать один хитрый приём.

«Переклейка»

Идея этого приёма в том, что развёртку конуса можно получить, разрезая его по любой образующей. Например, надо провести геодезическую через точку A в заданном направлении (рис. 12). Вместо того чтобы разбираться, как она пересечёт линию склейки, можно эту линию склейки просто перенести! Проведём через точку O (будущую вершину конуса) на нашей развёртке прямую, параллельную этому самому заданному направлению будущей геодезиче-

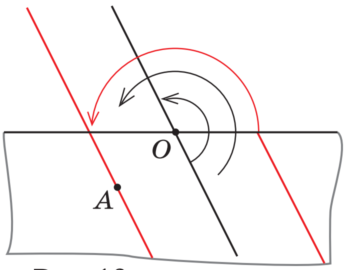


Рис. 12

[4] Это, кстати, показывает, что геодезическая линия на конусе не является плоской кривой, то есть не лежит ни в какой плоскости. Ведь иначе она получалась бы разрезанием конуса по этой плоскости. Но при любом разрезании конуса получаются или окружности, или эллипсы, или фигуры с «расходящимися краями» – параболы и гиперболы.

Художник Алексей Вайнер

ской. По этой линии разрежем нашу развёртку, потом повернём один из образовавшихся треугольных секторов вокруг точки O и склеим по старой линии склейки. Получилась новая развёртка, на которой искомая геодезическая – прямая, параллельная новой линии склейки. Заодно мы доказали, что все геодезические на конусе отличаются лишь одним параметром – минимальным расстоянием до вершины.

Конечно, «переклейка» помогает не всегда. Так что умение построить любую геодезическую на любой развёртке все равно пригодится. Но, даже не пользуясь ножницами и клеем, иногда полезно делать «переклейку» мысленно – представлять себе, какая картинка получилась бы при этой процедуре. Вот пример:

Задача 6. Возьмём развертку конуса с двумя точками A и B на ней. Постройте на ней *все* геодезические, по которым можно прийти из A в B. А как эти геодезические выглядят на конусе? Проверьте.

Решив эту задачу, вы научитесь не просто идти по «прямой» куда глаза глядят, а достигать намеченной цели, идя только прямо. Вот ещё одна такая задача.

Задача 7. На развёртке цилиндра заданы две точки A и B (рис. 13). Найдите *все* геодезические, проходящие через обе эти точки. Как выглядят эти геодезические на самом цилиндре? Как построить их на развёртке? [5]

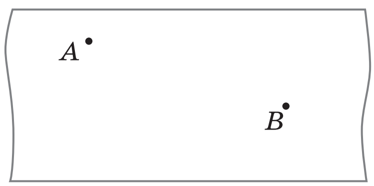


Рис. 13

Как строить путь из одной точки в другую на цилиндре и на конусе, мы подробно обсудим в следующем номере. Если вы уже в этом разобрались, подумайте ещё вот над чем. Конусы ведь можно делать и более широкими, и более узкими – для этого надо склеивать края не у полуплоскости, а у сектора с другим углом – например, 270° или 90°. Как выглядят геодезические на таких развёртках и на соответствующих конусах?

[5] *Подсказка.* Первую нарисовать легко, она соединяет точки A и B отрезком. Вторая геодезическая должна пересекать линию склейки цилиндра – в задаче 1 мы видели, как выглядят такие геодезические. Как добиться, чтобы она прошла через точку B? Нужно придумать способ, как по A и B найти на развёртке точку, где геодезическая пересекает линию склейки. А может, есть и ещё подходящие геодезические?..

Окончание следует

ТЕНИ
НА ПУПЫРЧАТОЙ СТЕНЕ

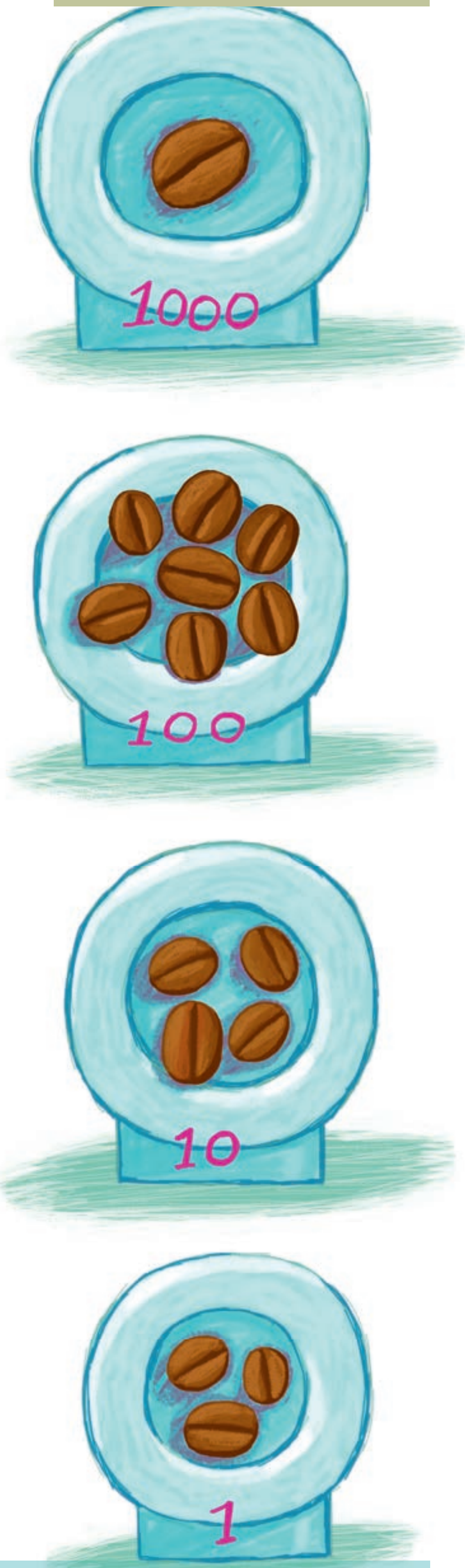
На фото изображена неровная пупырчатая стена, освещённая сверху лампой, и отражение стены в горизонтальном плоском «зеркале». Почему отражение более контрастно, чем сама стена? Иными словами, почему на отражении тени кажутся более тёмными, а освещённые участки – более светлыми, чем на самой стене?

Автор Александр Бердников
Художник Елена Цветаева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СКАЗКИ

Константин Кохась

КАК БУСЕНЬКА ПРОВЕРЯЛА ДЕЛИМОСТЬ НА **СЕМЬ**



Бусеньке снился *странный* сон: будто её стало очень много, и она не Бусенька, а гигантская сороконожка, точнее говоря, не одна сороконожка, а сразу семь. Тут к ней пришёл таракан Кузька и предложил:

– Хочешь, я угощу тебя арбузами?

– Хочу, – сказали семь сороконожек.

– Тогда пойдём. Тут близко.

И Кузька привёл её в какое-то помещение, на дверях которого горело табло: «Сегодня на нашем складе хранится 1743 арбуза!»

– Угощайся! – радушно сказал Кузька, – можешь съесть хоть все!

– Но я же – семь сороконожек, – возразила Бусенька, – очень важно, чтобы каждой мне досталось поровну. Ты не знаешь, 1743 делится на 7?

– Не знаю, – честно сказал Кузька, – но мы это сейчас проверим. Есть у меня один фирменный способ! – И Кузька, исчезнув на пару секунд, притащил откуда-то четыре блюдца и поставил их перед Бусенькой. На первом блюдце лежало 1 кофейное зёрнышко, на втором – 7, на третьем – 4, на четвёртом – 3, а рядом Кузька положил мешочек с яркой этикеткой «Кофе в зёрнах».

– Начинаем гадание на кофейной гуще! – торжественно объявил Кузька. – Что вы видите перед собой?

– Мы видим кофейные зёрнышки, – сказали семь сороконожек.

– Это не просто зёрнышки, – заявил Кузька, – с их помощью мы записали число 1743! А теперь смотрите внимательно: я беру три зёрнышка с последнего блюдца и добавляю к ним ещё 4 раза по 3 зёрнышка из мешка – всего, значит, получается 15 зёрнышек. И я их кладу на третье блюдце. Теперь у меня на первом блюдце 1 зёрнышко, на втором – 7, на третьем – 19, а четвёртое блюдце пустое! И я его у-би-ра-ю. Понятно?

– Нет! – хором сказали семь сороконожек, – совершенно непонятно. Раньше количество зёрнышек на блюдце обозначало цифру нашего числа, а теперь что? Ерунду какую-то.

– Погодите, погодите, сделаем вам цифры. Уберём в мешок с третьего блюдца 10 зёрнышек – вот так...

а взамен добавим одно зёрнышко на второе блюдо. Теперь на блюдах лежат 1, 8 и 9 зернышек. Понятно?

– Кузенька, – сказали семь сороконожек, – а ты не мог бы меня разбудить? Говорят, ум – хорошо, а два лучше. Но семь умов – это слишком много, мысль всё время убегает из одной головы в другую.

– Ладно, – сказал Кузька и тут же рявкнул, – рота, подъё-ё-ём!!!

***

От неожиданности все семь сороконожек вздрогнули и тут же проснулись, собравшись в одну Бусеньку. Бусенька осторожно посмотрела по сторонам и пошевелила сначала руками, а потом ногами.

– Да, теперь мир не настолько стереоскопический. Но и головы зато не кружатся. И двигаться проще. Ого, сколько конфет! Чем это мы тут занимаемся?

– Я отрезал у нашего числа последнюю цифру, то есть цифру 3, умножил её на 5 и прибавил к оставшемуся числу, – доложил Кузька, размахивая конфетным фантиком, как указкой.

– Да-да, припоминаю. И у нас осталось 1, 8 и 9 зёрнышек...

– Каких зёрнышек? – не понял Кузька. – Тебе, наверно, это приснилось.

174|3
15 ← × 5
18|9
45 ← × 5
63

– Наверно, – не стала спорить Бусенька. – Получилось число 189. А дальше что?

– Дальше мы этот процесс повторим. Отрежем последнюю цифру 9, умножим её на 5 и опять прибавим результат к оставшемуся числу. Получится 63.

– Как ты быстро считаешь, – похвалила Бусенька.

– Ну на 5 мы, насекомые, очень ловко умножаем, я тебе уже объяснял.[1] Вернёмся к нашим подсчётам. Теперь получилось совсем небольшое число – двузначное, про него можно в уме сообразить, делится оно на 7 или нет. Число 63 на 7 делится, значит, 1743 конфеты можно разложить на 7 равных куч!

– Кучу из 1743 арбузов – ты хотел сказать?

– Каких ещё арбузов?

Бусенька хотела было объяснить, что Кузька только что угощал её арбузами, и она собиралась съесть все 1743 арбуза, что не так уж и трудно сделать, если ты

[1] О том, как здорово Кузька умеет умножать числа на 5, читайте в сказке «Как Бусенька умножала на пять» в «Квантике» №8 за 2014 год.

на самом деле не Бусенька, а семь гигантских сороконожек. Но, подумав, она решила, что такое объяснение могло бы показаться Кузьке *очень странным*.

– Приснилось, – сказала Бусенька. – А можно, я тоже попробую что-нибудь поделить на 7? Например… 3456!

– Не поделить, а проверить делимость, – поправил её Кузька.

$$\begin{array}{rl} & 345|6 \\ + & \underline{\ \ 30} \quad \times 5 \\ & 37|5 \\ + & \underline{\ \ 25} \quad \times 5 \\ & 62 \end{array}$$

Тут за кучей конфет послышалось какое-то шуршание, а потом чавканье и раздался знакомый голос:

– Здравствуйте. Что это вы тут так оживлённо обсуждаете?

– Не мешай, Горгулий, мы проверяем, делится ли 3456 на 7. – И Бусенька стала проверять. – Получилось 62. Значит, число не делится на 7!

– Какой грубый способ, – сказал Горгулий, – мы, монстропитеки, в таких случаях действуем тоньше! На каждом шаге после прибавления очередной цифры, умноженной на 5, мы весь полученный результат умножаем на 3!

$$\begin{array}{rl} & 345|6 \\ + & \underline{\ \ 30} \quad \times 5 \\ & 375 \\ \times & \underline{\ \ \ 3} \\ & 112|5 \\ + & \underline{\ \ 25} \quad \times 5 \\ & 137 \\ \times & \underline{\ \ \ 3} \\ & 41|1 \\ + & \underline{\ \ 5} \quad \times 5 \\ & 46 \\ \times & \underline{\ \ 3} \\ & 138 \end{array}$$

– А чем это лучше? Зачем так усложнять?

– А вот посмотрите, – сказал Горгулий. – Получилось немного дольше, и остановиться пришлось не на двузначном числе, а на небольшом трёхзначном. Зато это число даёт при делении на 7 такой же остаток, что и исходное число! В нашем случае 138 даёт остаток 5 при делении на 7, значит, и 3456 тоже даёт остаток 5.

– Ты умножаешь на 3 такие огромные числа… в уме?? А-а-аааа… Я бедное маленькое насекомое, я не могу долго думать о таких больших числах! У меня и мозгов-то, как таковых, нет! Я от переутомления за-сы-па-ю… – и Кузька заснул прямо на куче фантиков.

***

К Кузьке подошли семь сороконожек и сказали:

– Всё очень просто. На первом блюдце каждое зёрнышко обозначает 1000 арбузов, на втором – 100 арбузов, а на третьем – 10, на четвёртом – один арбуз. У нас на четвёртом блюдце 3 арбуза, то есть мы хотели сказать, 3 зёрнышка. Чтобы не отвлекаться на частности, обозначим эту цифру – пусть $x = 3$. Допустим, что нам привезли ещё арбузов… Горгулий!

Распахнулась дверь, и Горгулий вкатил в помещение тележку с арбузами.

– Вот ещё $49x$ арбузов! – объявил он.

– Поскольку $49x$ делится на 7, новая порция арбузов не изменила делимость количества арбузов на 7: если раньше число арбузов делилось на 7, то и теперь оно делится, а если не делилось – то и теперь не делится. Займёмся тогда зёрнышками. Добавим на четвёртое блюдце $49x$ зёрнышек. Теперь на нём $50x = 10 \cdot 5x$ зёрнышек. Мы можем все эти зёрнышки убрать и вместо этого положить на третье блюдце $5x$ зёрнышек, потому что $50x$ зёрнышек на четвёртом блюдце и $5x$ зёрнышек на третьем обозначают одно и то же число арбузов. А теперь внимание! Главный трюк. Мы выкинем пустое блюдце!! – И одна из сороконожек небрежно столкнула пустое блюдце на пол.

Блюдце рассыпалось на осколки и взорвалось, заполнив помещение клубами белого дыма. Когда дым рассеялся, прежний склад исчез. Друзья находились в совсем небольшой комнате, половина комнаты была доверху завалена арбузами, а рядом на столе стояли три знакомых блюдца с зёрнышками.

– Где мои арбузы? – жалобно спросил Кузька.

– Мы только что поделили их количество на 10! – жизнерадостно воскликнули семь сороконожек. – Теперь у нас осталось три блюдца: каждое зёрнышко на первом блюдце обозначает 100 арбузов, а не 1000, как раньше, зёрнышко на втором – это 10, а не 100, а зёрнышко на третьем – всего один арбуз, а не 10. Но ты не волнуйся, в результате взрыва делимость числа арбузов на 7 не пострадала!

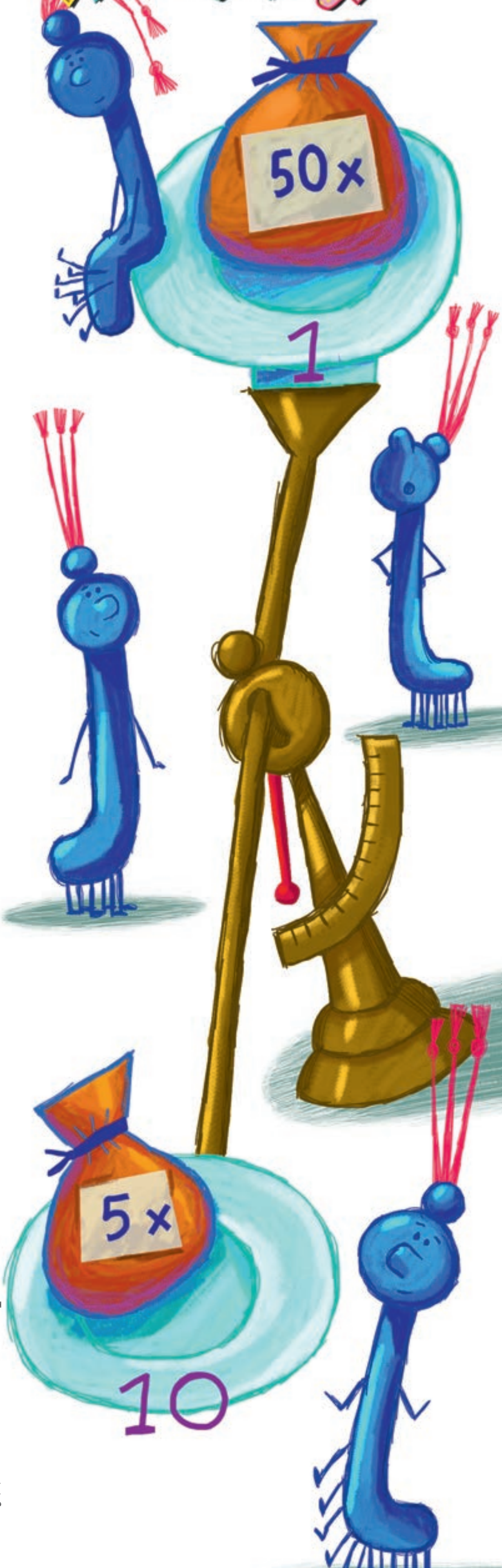
Кузька недоверчиво озирался по сторонам.

– На третьем блюдце лежит y зёрнышек, – продолжали семь сороконожек. – Сейчас мы попросим Горгулия принести нам ещё $49y$ арбузов…

***

Кузька в ужасе проснулся.

– Доброе утро, Кузька, – сказал Горгулий, убирая со стола фантики, – мы с Бусенькой оставили тебе ровно z конфет. Но если нужно, я принесу ещё.



Художник Инга Коржнева

ЧЕТЫРЕ ЗАДАЧИ

Борис Обморошев

ТРАНСПОРТ

1. Почему у трамвая один провод, а у троллейбуса два?

2. У грузовиков сзади всегда есть горизонтальная балка на высоте колёс. Для чего она?

…НЫЕ ДЕТАЛИ

3. У простого велосипеда всего две звезды – одна спереди и одна сзади, на них надета цепь. Почему передняя звезда больше задней? У мотоцикла тоже одна звезда спереди и одна сзади, но передняя звезда обычно меньше задней. Почему?

4. Почему у ранних велосипедов было очень большое переднее колесо, а у современных велосипедов колёса одинаковые и значительно меньше?

Художник Мария Усеинова
Ответы в следующем номере

Александр Перепечко

ТАБЛЕТКА ОТ ЗАБЫВЧИВОСТИ

Саша принимает таблетки от забывчивости два раза в день, утром и вечером, но иногда забывает это сделать. Он заведомо примет таблетку, если в два предыдущих раза их принимал, и забудет, если оба раза забывал. Если же за прошедшие сутки он принял ровно одну таблетку, то в следующий раз примет её с вероятностью $\frac{1}{2}$.

С какой вероятностью Саша с какого-то момента совсем забудет принимать таблетки? А с какой – будет принимать постоянно?

Чтобы решить задачу и помочь Саше, мы отправимся в путешествие по разноцветным гирляндам, графам де Брёйна и цепям Маркова.

▼ ГРАФ ДЕ БРЁЙНА

В статье «Разноцветные гирлянды» («Квантик» №12 за 2017 год) мы строили гирлянду из красных и синих флажков, в которой встречаются все наборы из фиксированного числа флажков, например из 3. Эти наборы удобно изображать стрелками. Сначала нарисуем всевозможные двухфлажковые наборы и обведём каждый набор кружком. А потом для каждого трёхфлажкового набора проведём стрелку, ведущую из кружка с первыми двумя флажками набора в кружок с последними двумя флажками набора: например, стрелка ▼▼▼ ведёт из ▼▼ в ▼▼ (рис. 1). Это и будет стрелка, соответствующая трёхфлажковому набору. Будем красить стрелки в тот же цвет, что и последний флажок соответствующего набора. Тогда из каждого набора выходит и в каждый набор входит по одной синей и одной красной стрелке. Такие кар-

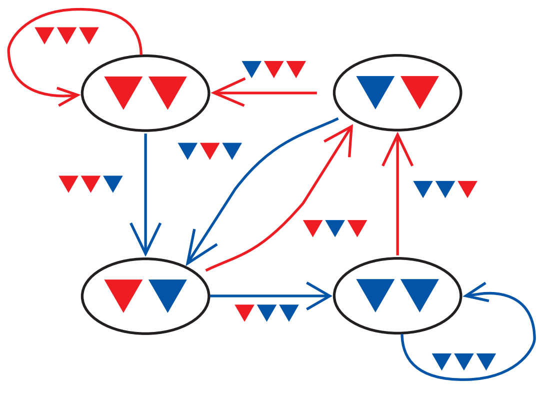


Рис. 1

тинки из кружков и стрелок называются *ориентированными графами*. А если картинка построена по наборам флажков, она называется *графом де Брёйна*.

Маршрут вдоль стрелок, в котором каждая стрелка встречается ровно один раз, как раз даёт минимальную гирлянду, содержащую все наборы, как в статье «Разноцветные гирлянды».

Как же построить такой маршрут? Особенно если цветов больше, или наборы состоят из большего числа флажков? Придёт на помощь правило «только не красный»: начнём с набора из красных флажков, а далее каждый раз, если можем, выходим по стрелке не красного цвета. Оказывается, таким способом мы обойдём все стрелки по одному разу и тем самым построим гирлянду. Это непростая теорема из комбинаторики. Попробуйте сами понять на примерах разных гирлянд, почему так происходит, и смотрите доказательство теоремы в конце статьи.

▼ ЦЕПЬ МАРКОВА

Как всё это связано с задачей про таблетки? Будем отмечать каждый пропущенный приём таблетки красным флажком, а не пропущенный – синим. Тогда последние два флажка полностью описывают текущее состояние, и всего разных состояний – 4 (рис. 2). Стрелки обозначают приписывание нового флажка.

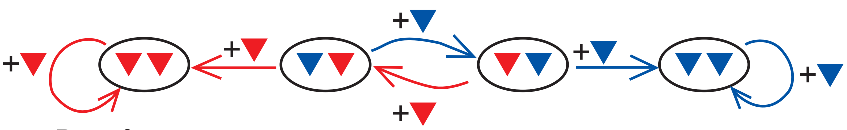
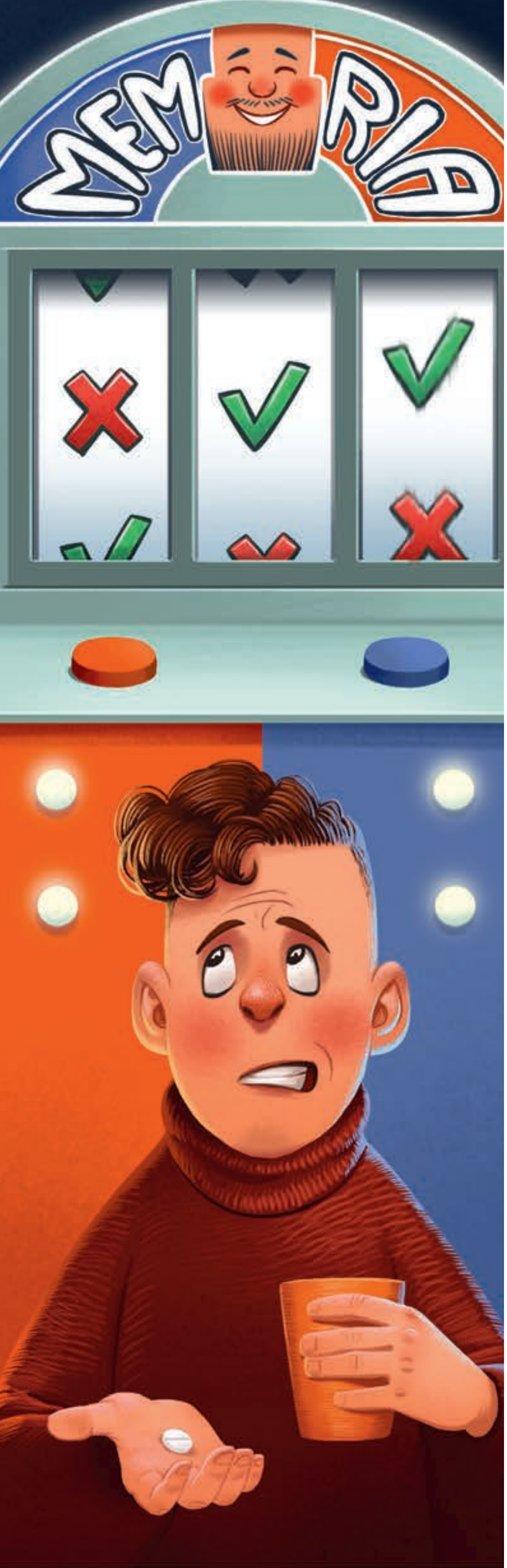


Рис. 2

Из крайних состояний нет выхода, а из средних Саша может переместиться левее или правее с вероятностью $\frac{1}{2}$. Это всё равно что подкидывать монетку с красной и синей сторонами: если выпадает красное, то Саша смещается влево, а если синее – вправо.

Саша начинает в позиции ▼▼ (синий флажок – таблетка, принятая утром у врача, до этого таблетки не принимались). Может ли быть такое, что Саша никогда не попадёт в крайние положения? Это возможно только если Саша будет попеременно выкидывать красное и синее. При каждом броске вероятность этого сокращается вдвое и тем самым стремится к нулю.



Значит, вероятность того, что Саша всегда будет то принимать таблетку, то забывать, равна нулю. Это событие невероятное, но теоретически возможное.

В каких случаях Саша закончит в левом положении, а в каких – в правом? Можно выписать все возможные исходы: скажем, в правое положение приводят последовательности бросков ▼, ▼▼▼, ▼▼▼▼▼ и т.д. Их бесконечное количество, и придётся суммировать бесконечный ряд вероятностей: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$ и т. д. С этим можно справиться, например как в статье Г. Мерзона «$\frac{1}{3}$, или Две невозможные задачи с решениями» («Квантик» №6 за 2019 год).

А можно посмотреть на вероятности иначе: предпишем каждому текущему состоянию вероятность попасть из него в крайнее правое состояние, то есть вероятность успеха в лечении. Эта вероятность никак не зависит от того, каким путём мы попали в текущее состояние. Тогда в крайнем правом состоянии будет вероятность 1, а в крайнем левом – 0. Докажем, что вероятность в промежуточном состоянии равна полусумме вероятностей в соседних. Пусть для состояния слева вероятность успеха равна a, а справа – b. Равновероятно мы идём влево или вправо, то есть достигаем успеха с вероятностью $\frac{1}{2}\cdot a$ (идём влево) плюс $\frac{1}{2}\cdot b$ (идём вправо). Это как раз полусумма a и b.

Нетрудно проверить, что тогда разность вероятностей для каждой пары соседних состояний будет одна и та же (получается арифметическая прогрессия), и поскольку разностей 3, все они равны $\frac{1}{3}$. Так что вероятности попасть в крайнее правое положение равны 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 соответственно. Итак, Саша с вероятностью $\frac{2}{3}$ станет постоянно принимать таблетки, а с вероятностью $\frac{1}{3}$ – перестанет их принимать.

Решим этим методом известную задачу о пьянице.

Задача о пьянице. Пьяница стоит на дороге между кабаком и своим домом и каждую секунду делает шаг в 1 м по дороге в случайном направлении с равной вероятностью. Если попадает домой или в кабак – остаётся там. Спрашивается, с какой вероятностью он придёт домой, если до дома – 3 м, а до кабака – 7 м?

В этой задаче 11 состояний (рис. 3), вероятности крайних – 0 и 1, вероятность сдвига вправо (домой) – $\frac{1}{2}$. Опять же, вероятности промежуточных состояний образуют арифметическую прогрессию, и ответ: $\frac{7}{10}$.

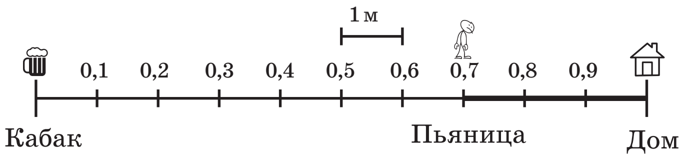


Рис. 3

А вот похожая задача про Сашу:

Задача «утро-день-вечер». С какой вероятностью Саша успешно излечится, если он вспоминает о приёме таблетки с вероятностью $k/3$, где k – количество принятых таблеток в последние 3 приёма?

Попробуйте решить её самостоятельно.

Задачи, где есть набор состояний и вероятности перехода между ними, описываются так называемыми *цепями Маркова*. Но это уже совсем другая история.

Приложение

▼ ОБХОД ГРАФА ДЕ БРЁЙНА

Вернёмся к графам де Брёйна. Как же нам обойти все стрелки?

Граф де Брёйна обладает двумя свойствами: во-первых, в нём из любой вершины можно дойти по стрелкам до любой другой (то есть он *связен*), а во-вторых, в каждую вершину (так называются наши кружки) входит столько же стрелок, сколько и выходит. Такие графы обладают удивительным свойством: можно, начав в любой вершине, пройти по каждой стрелке один раз и вернуться в исходную вершину. Такой обход называется *эйлеровым циклом*, а такой граф называется *эйлеровым* (см. также статью «Почтовое занятие», «Квантик» №6 за 2020 год).

Начнём из «красной» вершины (соответствующей набору красных флажков) и будем бродить по стрелкам, не проходя одну стрелку дважды и соблюдая правило «только не красный»: мы выходим из вершины по «красной» стрелке (соответствующей приписыванию красного флажка), только если других исходящих стрелок не осталось.

Каждый раз, входя в вершину, мы уменьшаем количество непройденных входящих стрелок, а выходя – исходящих. То есть во всех вершинах сохраняется равенство входящих и исходящих стрелок, кроме исходной – в ней

на одну входящую больше, и текущей – в ней больше на одну исходящую. Значит, закончим мы обязательно в исходной вершине, то есть получим цикл.

Почему же этот цикл эйлеров? Заметим два свойства:

1. Если по этому циклу мы вышли из какой-то вершины по «красной» стрелке, то мы уже прошли по всем стрелкам, входящим и исходящим из этой вершины. Действительно, если мы вышли по «красной» стрелке, то мы уже перебрали все остальные, а также вошли столько же раз, сколько и вышли.

2. По «красным» стрелкам можно дойти от любой вершины до «красной» вершины.

Предположим, что по каким-то стрелкам мы не прошли. Из всех вершин, в которые входят непройденные стрелки, выберем такую, из которой путь по «красным» стрелкам к «красной» вершине самый короткий. Тогда исходящая «красная» стрелка должна лежать в цикле (иначе найдётся путь короче), но это противоречит первому из замеченных свойств. Значит, цикл действительно эйлеров!

По эйлерову циклу графа де Брёйна уже легко построить гирлянду: берём флажки, соответствующие одной из вершин, а потом из этой вершины обходим эйлеров цикл, с каждой стрелкой добавляя новый флажок. Более того, первые флажки, соответствующие исходной вершине, совпадут с последними, и, склеив их, мы можем «сшить» гирлянду в кольцо. Тогда каждый флажок будет в точности соответствовать одной стрелке. Это кольцо можно разорвать в любом месте, продублировав флажки в месте разрыва, и получить новую гирлянду.

Вообще говоря, любой связный граф, в котором в каждую вершину входит столько же стрелок, сколько и выходит, обладает эйлеровым циклом. Как мы уже увидели, если мы начнём бродить из произвольной вершины по стрелкам без повторений, мы получим какой-то цикл. Но если убрать все стрелки этого цикла, то в новом графе попрежнему будет равенство входящих и исходящих стрелок в каждой вершине. Значит, мы можем снова и снова так ходить и удалять циклы, пока не исчерпаем все стрелки, и разобьём исходный граф в объединение циклов. Здесь нам даже не нужна связность графа.

А вот чтобы склеить все циклы в один, связность понадобится. Благодаря ей, мы можем найти два цикла, проходящие через одну вершину, и склеить их, пройдя из этой вершины сначала по одному циклу, а потом по второму. Рано или поздно останется один цикл – эйлеров.

Художник Мария Усеинова

Игорь Акулич

ВАЛЮТНЫЕ махинации

Математик и педагог А. В. Жуков, автор превосходной книги «Вездесущее число π», на протяжении ряда лет вёл в журнале «Квант» рубрику «Квант» для младших школьников». Тогда он и предложил шуточный сугубо математический способ найти соотношение между двумя валютами – российским рублём и американским долларом. Давайте, сказал он, рассмотрим равенство:

$$\text{РУБЛЬ} \times n = \text{ДОЛЛАР}.$$

Взяв вместо n любое целое число, получаем обычный *числовой ребус*, где одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры, и ни одно число не начинается с нуля. Александр Владимирович утверждал, что минимальное и максимальное значения n, при которых ребус имеет решения, – и есть пределы, в которых может меняться соотношение курсов указанных валют. И всё тут!

И он оказался прав (по крайней мере, на то время), потому что наименьшее и наибольшее «подходящие» значения n – это 2 и 63 соответственно:

$$82754 \times 2 = 165508,$$
$$14867 \times 63 = 936621.$$

Но не так давно соотношение курсов валют стало потихоньку выходить за эти пределы. Что делать? Не отказываться же от такой изящной теории! Надо лишь слегка трансформировать её. С чего это n должно быть непременно *целым*? Бывают же десятичные дроби, которые можно умножить на целое число – и снова получить целое! Такой подход существенно расширил диапазон значений n в обе стороны:

$$73298 \times 1{,}5 = 109947,$$
$$10265 \times 85{,}4 = 876631.$$

Но, оказывается, и это не предел. Чтобы убедиться, решите задачу:

При каком наибольшем и при каком наименьшем n ребус имеет решение?

И одолейте вторую (она лишь кажется не имеющей отношения к первой):

Число 1,5 в 4 раза меньше суммы своих цифр, а число 1,125 в 8 раз меньше суммы своих цифр. Приведите пример «промежуточного» числа, которое в 6 раз меньше суммы своих цифр.

Художник Yustas

ИЗ ОЛИМПИАД ПО **ЛИНГВИСТИКЕ**

В издательстве МЦНМО вышла книга «Традиционная Олимпиада по лингвистике: 49 лучших задач». Приводим небольшую подборку из неё (ответы – в следующем номере).

1. В одной стране на дверях учреждения пишут иногда слово

ŤАНАŤ

Известно, что 1) эта надпись является не названием учреждения, а как бы краткой инструкцией по эксплуатации двери, 2) если дверь прозрачная, то, будучи прочтена с противоположной стороны, надпись инструктирует посетителя неправильно.

Задание. Определите, что означает эта надпись и к какой группе языков относится данный язык.

Примечание. Надписи того же содержания встречаются иногда на дверях и в нашей стране.

А. Н. Журинский

2. Даны венгерские существительные и **все** их переводы на русский язык (в перепутанном порядке):

nyírfa, *körte*, *almák*, *körtefa*, *nyírfák*, *alma*, *almafa*

берёза, *груша*, *яблоня*, *яблоко*, *берёзы*, *яблоки*.

Задание. Установите правильные переводы. Объясните своё решение.

Примечание. *ö* – особый гласный звук венгерского языка; знак ´ над гласной обозначает её долготу.

В. А. Плунгян

3. Один студент читал старинную русскую рукопись и заметил, что в этой рукописи вместо буквы *о* в некоторых случаях почему-то стоит буква ω («омега»). Студент выписал из рукописи ряд слов. Вот эти выписки:

великому, взято, вωинствω, горожане, добрω, злω, людскωе, масло, мнωгими, монастырское, начинаемωму, писанω, погребенω, подωбалω, полезно, правилω, пьянство, самолюбивое, свидетельствуемωе, сугубо, умнωженнωе

Подумав некоторое время над этими выписками, студент воскликнул: «А! Кажется, я догадался, в чём дело с этими *о* и ω: здесь действует правило *X*! Но если это действительно так, то одно слово, а именно *Y*, в отношении *Z* в ту старинную эпоху было не таким, как в нынешнем языке».

Задание. Определите, что зашифровано буквами *X*, *Y* и *Z* в речи студента.

А. А. Зализняк

4. Одно из слов – *дверь*, *горсть*, *тень*, *лошадь*, *постель*, *кровать* – изменило в ходе истории свой род (однако некоторые следы того, что оно было ранее другого рода, в русском языке сохранились).

Задание. Найдите это слово. Обоснуйте свой ответ.

А. А. Зализняк

5. Уже в течение нескольких веков ненецкий язык испытывает сильное влияние русского. В силу этого влияния значения большинства ненецких числительных за последние 200 лет изменились. Ниже приведены четыре числительных, а также их старые и новые значения (в перепутанном порядке):

ёнар" няхар" юр" няхар", няхар" ю" няхар",
няхар" юр"ңопой, сидя ю" ңопой

19, 21, 30, 33, 244, 301, 975, 1303

Задание 1. Какое число в современном ненецком языке обозначается словом *хасую*" (буквально – «ненецкое ю"»)?

Задание 2. Запишите по-ненецки число 1000 старым способом.

Задание 3. У каких ненецких числительных значение не изменилось?

Примечание. ң," – особые звуки ненецкого языка.

В. И. Беликов

В книге вы найдёте 49 лучших задач за 50 лет проведения олимпиады. Вышло также новое издание книги «Задачи лингвистических олимпиад» со всеми задачами за 1965–1975 годы.

Художник Сергей Чуб

Владимир Красноухов

Квадратура яблока

«Яблоко» на рисунке 1 можно разделить (без дырок и перекрытий) на 12 разных по форме, но одинаковых по площади элементов (рис. 2). Эти 12 элементов – все возможные комбинации двух частиц, соединённых рёбрами образующих квадратов, а именно:  и  («два-с-половиной-мино» плюс «половина-мино»).

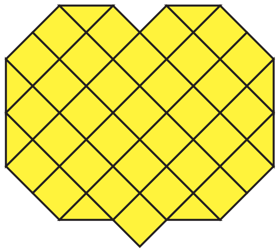


Рис. 1

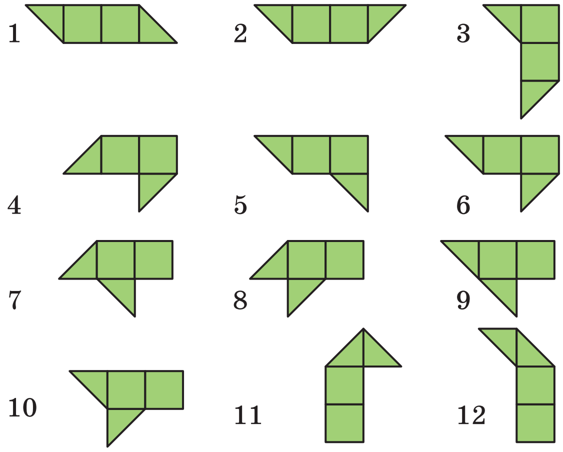


Рис. 2

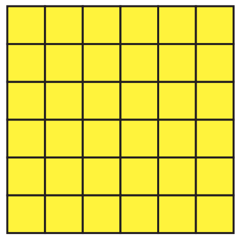


Рис. 3

Задача 1. «Восстановите» яблоко, а затем составьте из этого же набора элементов квадрат (рис. 3). Как обычно в таких задачах, элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

Советуем выпилить элементы головоломки лобзиком из фанеры или листового пластика. Рекомендуемый размер: элементарный квадратик 15 × 15 мм для карманного варианта головоломки и 30 × 30 мм для домашней или школьной игротеки.

А теперь – новые задачи различной сложности.

Задача 2 («портновская»). Дана полоска материала 21 × 2 с вырезами (рис. 4). Расположите на ней все 12 элементов (в любом порядке, без перекрытий и выступов). С подобного рода задачами сталкивается портной при раскрое ткани.

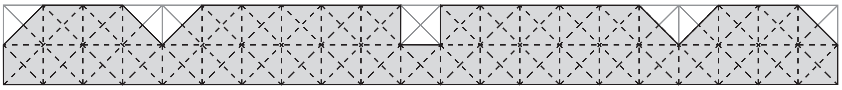


Рис. 4

Задача, похоже, имеет единственное решение. Все 12 элементов можно расположить на этой полоске, при этом ещё лишние лоскутки материала останутся.

Задача 3. Используя весь набор элементов, составьте одновременно две копии одной и той же фигуры. Приводим два примера решения этой задачи (рис. 5 и 6). Найдите ещё хотя бы одно решение.

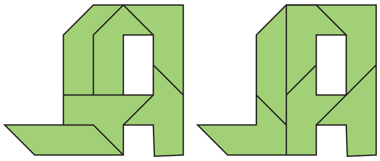


Рис. 5

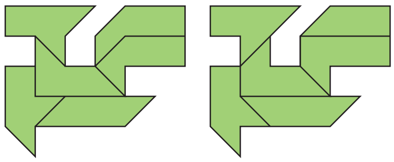


Рис. 6

Задача 4 (трудная). Используя весь набор элементов, соберите одновременно 6 симметричных одинаковых по площади фигур.

Задача 5. Используя все 12 элементов, можно составить симметричную фигуру с пустотой внутри («квадратура ананаса», ведь получаемые фигуры напоминают этот вкусный плод, не так ли?). За единицу измерения площади пустоты примем элементарный треугольник («четверть-мино»). Например, на рисунке 7 площадь пустоты составляет 68 единиц, на рисунке 8 – 112 единиц.

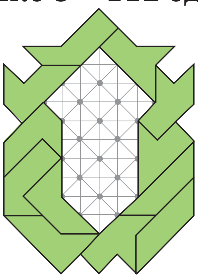


Рис. 7

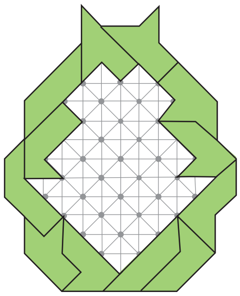


Рис. 8

А теперь, как утверждает автор этой головоломки В. Красноухов, **самая трудная задача**: составьте связную симметричную фигуру с большей площадью пустоты, чем в приведённых примерах.

Желаем успеха!

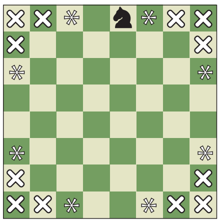
Художник Алексей Вайнер

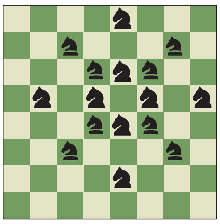
НАШ КОНКУРС, XI тур («Квантик» № 7, 2020)

51. *В числовом ребусе Т × О × П × О × Л × Ь = = Т × Ю × Л × Ь × П × А × Н замените буквы ненулевыми цифрами так, чтобы число ТОПОЛЬ получилось как можно бо́льшим. (Одинаковые буквы заменяйте одинаковыми цифрами, разные – разными.) Не забудьте обосновать ответ.*

Ответ: 947465. Чтобы число было максимальным, возьмём Т = 9. Так как Т × П × Л × Ь не равно нулю, то О × О = Ю × А × Н. Поскольку Ю, А, Н отличны от О, цифра О должна быть составной. При О = 8 подходящих цифр Ю, А, Н нет, а при О = 6 цифры Ю, А, Н равны 1, 4, 9 в некотором порядке. Значит, О = 4, и цифры Ю, А, Н равны 1, 2, 8 в некотором порядке. Тогда наибольшее возможное число ТОПОЛЬ равно 947465, а ТЮЛЬПАН можно взять равным, скажем, 9865721.

52. *Расставьте на шахматной доске несколько белых и чёрных коней так, чтобы каждый белый конь бил ровно четырёх чёрных, а каждый чёрный – ровно четырёх белых.*

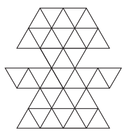




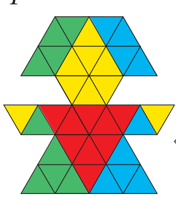
В клетках, отмеченных крестиком, не может стоять конь, так как иначе он бьёт менее 4 клеток. Тогда в клетках, отмеченных звёздочкой, не может стоять конь, так как иначе он бьёт 4 клетки, одна из которых пустая (отмечена крестиком). Поставим белого коня так, как на рисунке сверху. Далее картинка полностью восстанавливается (рисунок справа). Всего получается 8 белых и 8 чёрных коней.

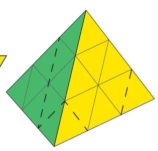
Дополнительный вопрос: на квадратной доске какого наименьшего размера можно расставить коней, как требуется в условии, и сколько при этом есть вариантов расстановки?

53. *Аня вырезала куклу из бумаги в треугольную сетку. Юра утверждает, что эту фигурку можно свернуть в треугольную пирамидку без просветов и наложений. Прав ли он?*

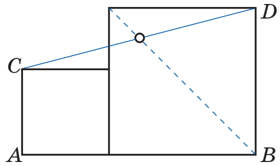


Ответ: да. На рисунке разными цветами обозначены разные грани треугольной пирамидки, которые получатся при сворачивании.

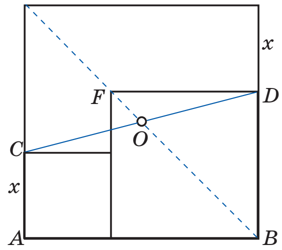




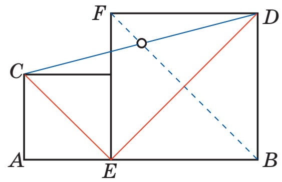
54. *На отрезке AB построены два различных прилегающих друг к другу квадрата (см. рисунок). Докажите, что диагональ большого квадрата делит отрезок CD пополам.*



Первое решение. Достроим рисунок до большого квадрата со стороной AB. Точки C и D симметричны относительно центра O построенного квадрата. Значит, O – середина CD. Углы OBA и EBA равны 45°. Поэтому диагональ BF тоже проходит через O, то есть, через середину CD.



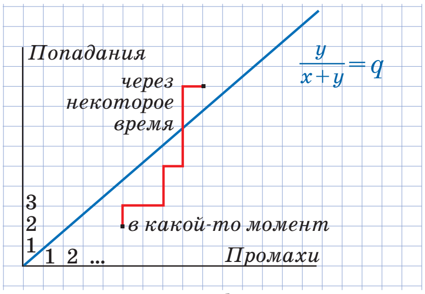
Второе решение. Диагональ BF делит DE пополам и параллельна CE. Значит, BF пересекает треугольник CDE по его средней линии и делит CD также пополам.



55. *Петя стреляет по мишени. Табло показывает отношение числа попаданий к числу сделанных выстрелов (до начала стрельбы табло не горит). В какой-то момент число на табло было меньше чем q. Через некоторое время это число стало больше, чем q. Для каких q от 0 до 1 отсюда следует, что в какой-то момент доля попаданий была ровно q?*

Ответ: подходит любое q вида $\frac{k}{k+1}$, где k – натуральное число.

Нарисуем на клетчатой плоскости две координатные оси и будем отмечать промахи по оси Ox, а попадания – по оси Oy. Изначально у Пети нет ни промахов, ни попаданий, то есть он «находится» в узле (0;0). При промахе он смещается на клетку вправо, а при попадании – на клетку вверх. Если Петя сдвигается в узел $(x;\ y)$, число на табло будет равно $\frac{y}{x+y}$. Узлы, для которых доля попаданий равна q, лежат на прямой (синяя на рисунке), заданной уравнением $\frac{y}{x+y} = q$. Для узлов под прямой число на табло меньше q, а над прямой – больше. По условию, Петя когда-то был под прямой, а потом оказался над ней (пример – красная линия на рисунке), и только из этого можно утверждать, что доля в какой-то момент равнялась q. Это значит, что при движении по любому такому красному пути (ведущему из узла под прямой в узел над прямой), точка при каком-то сдвиге попадает в узел на синей прямой. Это возможно, только если синяя прямая пересекает все вертикальные линии сетки (прямые вида $x=n$, где n – целое) в узлах. Возьмём две соседние прямые $x=n$ и $x=n+1$. Они пересекают синюю прямую в узлах, и правый узел выше левого на целое число, пусть k. Тогда синяя прямая задаётся уравнением $y=kx$. Подставляя в исходное уравнение $\frac{y}{x+y}=q$, получаем $q=\frac{kx}{kx+x}=$ $=\frac{k}{k+1}$, то есть q обязательно имеет такой вид.



Ясно, что любое q вида $\frac{k}{k+1}$ подходит: ведь синяя прямая по-прежнему пересекает все вертикальные линии сетки в узлах, а мы должны её пересечь ходом вверх, то есть вдоль вертикальной линии, и попадём при этом в синий узел.

КОМБИНАЦИИ КВАДРАТОВ

(«Квантик» № 8, 2020)

9. Примените утверждение задачи 6.

10. Снова примените утверждение задачи 6.

11. Применив утверждение задачи 4 к одной паре квадратов и к другой, получим два равнобедренных прямоугольных треугольника с общей гипотенузой (рис. 1).

12. Рассмотрите зелёные квадраты с вершинами в центрах данных квадратов (рис. 2).

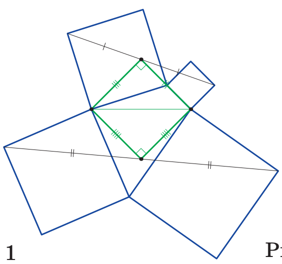


Рис. 1

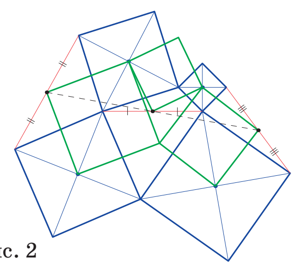


Рис. 2

13. Рассмотрите зелёные квадраты с вершинами в центрах данных квадратов (рис. 3).

14. Рассмотрите зелёные квадраты (рис. 4).

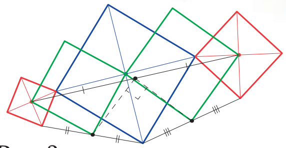


Рис. 3

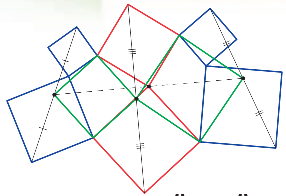


Рис. 4

«ДОМИКИ И КОЛОДЦЫ» НА ЧАЙНОЙ КРУЖКЕ («Квантик» № 8, 2020)

На листе бумаге соединим как можно больше домиков и колодцев (рис. 1). Лист разделится тропинками на области, и останется только одна пара из домика и колодца, которые не соединены. Для этого домика и этого колодца выберем по области, на границе которой они лежат. Перенесём рисунок на боковую поверхность кружки так, чтобы ручка крепилась к выбранным областям (рис. 2). Оставшуюся тропинку проведём по ручке.

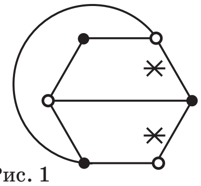


Рис. 1

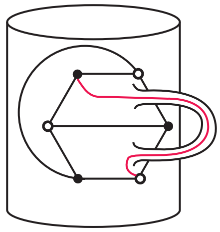


Рис. 2

На с. 21–22 в статье «Как Бусенька рисовала $K_{3,3}$» («Квантик» № 8, 2020) показано, как соединить домики и колодцы на квадрате, если разрешается тропинку прерывать на стороне квадрата и продолжать на противоположной стороне, но так, чтобы отрезок, соединяющий точки разрыва, был параллелен другой паре сторон (рис. 3). Если линия зашла в вершину квадрата, то продолжить её можно из любой вершины. На самом деле это та же задача!

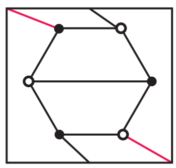


Рис. 3

Действительно, возьмём эластичный квадрат, который можно как угодно растягивать и сжимать, но нельзя рвать. Покажем, что можно обернуть в один слой этим квадратом кружку так, что любая линия, нарисованная на квадрате по указанным выше правилам, перейдёт в непрерывную линию на кружке. (Это означает, например, что противоположные стороны квадрата наложатся друг на друга, а углы квадрата попадут в одну точку на кружке.)

Для этого сначала положим кружку в квадрат, как в мешок (рис. 4), чтобы тор-

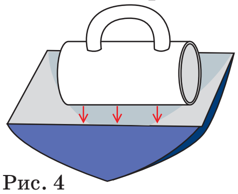


Рис. 4

чала ручка, прижмём квадрат к кружке и разгладим (рис. 5). Притянем друг к другу две противоположные стороны квадрата (рис. 6), две другие стороны при этом станут петлями вокруг стыков ручки с кружкой. Эти две петли притянем друг к другу вдоль ручки, так чтобы четыре угла квадрата совместились (рис. 7).

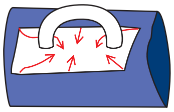


Рис. 5

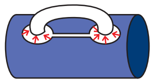


Рис. 6

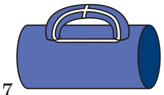
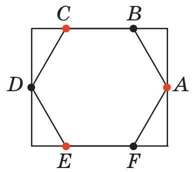


Рис. 7

ПЫЛЕСОС И КОРОТКИЙ ШНУР

(«Квантик» № 8, 2020)

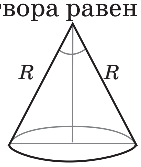


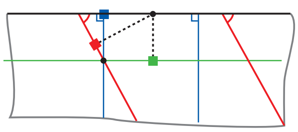
Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 3 метра и дополним его до прямоугольника, продолжив две противоположные стороны шестиугольника, как на рисунке. Если в полученной прямоугольной комнате розетки находятся в точках A, C и E, то всю комнату удастся пропылесосить, а её площадь будет $3 \cdot \sqrt{3} \cdot 6 > 30$ м^2.

ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, ИЛИ ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

2. а) По полуокружности с центром в будущей вершине конуса: ведь все точки основания готового конуса находятся на одинаковом расстоянии от его вершины.

б) Длина полуокружности радиуса R на развёртке равна длине целой окружности – основания конуса ($\pi R = 2\pi r$); значит, $R = 2r$, и угол раствора равен 60°.





5. Ближайшая к вершине точка – та, в которой направление на вершину перпендикулярно геодезической. На развёртке тоже нужно опустить из центра конуса перпендикуляр на геодезическую.

7. Ещё подсказка: вспомните про «переклейку» конуса. Как бы тут, в цилиндре, сделать что-нибудь похожее?

ТЕНИ НА ПУПЫРЧАТОЙ СТЕНЕ

Обычно, если свет падает под большим углом к какой-нибудь незеркальной поверхности, он рассеивается во все стороны. Однако, если свет падает под маленьким углом, значительная часть света отражается, как от зеркала, а меньшая часть – рассеивается во все стороны (сравните фотографии 1 и 2).


Фото 1


Фото 2

Светлые области шероховатой стены освещены сверху лампой, и поэтому значительная часть света отражается вдоль поверхности вниз (рис. 3, справа). Так что в отражении от горизонтальной металлической поверхности они ярче. По сути, мы видим блик от лампы.

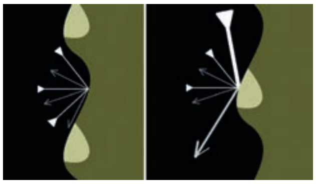
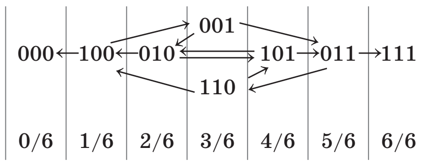


Рис. 3

Тёмные же области освещены отражённым светом равномерно со всех сторон (рис. 3, слева). Поэтому в отражении они могут быть лишь темнее, ведь металл часть лучей поглощает.

ТАБЛЕТКА ОТ ЗАБЫВЧИВОСТИ

Удивительно, но граф состояний в задаче «утро-день-вечер» (см. рисунок) можно уложить на дорожку длиной в 6 шагов, при этом состояния 001 и 110 (когда Саша принял таблетку только в последний раз, и когда Саша принял таблетку все разы, кроме последнего) окажутся вместе. Из каждого состояния можно пойти в одну сторону на один шаг с вероятностью 1/3 или на два шага в противоположную сторону с вероятностью 2/3. Поэтому вероятности успеха вновь образуют арифметическую прогрессию. Значит, при исходном положении 001 вероятность успеха – 1/2.



ВАЛЮТНЫЕ МАХИНАЦИИ

Первая задача. Задача только кажется сложной – на самом деле всё намного проще. Если свет не сошёлся клином на целых числах, то почему мы ограничились *десятичными* дробями? Ведь n может быть и *простой дробью*, что, кстати, вполне естественно, потому что из ребуса следует, что $n = \dfrac{\text{ДОЛЛАР}}{\text{РУБЛЬ}}$. Осталось лишь определить, при каких значениях входящих в эту дробь букв её величина наименьшая, а при каких – наибольшая. Решение несколько затрудняется наличием некоторых одинаковых букв (а именно, **Л** и **Р**) в числителе и знаменателе. Тем не менее, правильный ответ нетрудно «нащупать», а потом уже и доказать. Итак:

1) Наименьшее значение n составляет $n_{\min} = \frac{102239}{98726} = 1{,}035583\ldots$ Убедимся, что меньшей величины достичь невозможно.

В самом деле, при любых значениях букв знаменатель дроби не больше 98765. Если **Д** > 1 (то есть **Д** $\geqslant 2$), то числитель не меньше 201134, и тогда $n \geqslant \frac{201134}{98765} = 2{,}03\ldots > n_{\min}$. Поэтому однозначно **Д** $= 1$.

Далее, если **О** > 0 (то есть **О** $\geqslant 2$ – с учетом того, что цифра 1 уже «занята»), то числитель не меньше 120034, и тогда $n \geqslant \frac{120034}{98765} = 1{,}21\ldots > n_{\min}$. Поэтому **О** $= 0$.

Продолжаем в том же духе. Если **Л** > 2 (то есть **Л** $\geqslant 3$), то числитель не меньше 103324, и тогда $n \geqslant \frac{103324}{98765} = 1{,}04\ldots > n_{\min}$. Поэтому **Л** $= 2$.

Здесь придётся притормозить и сначала определиться со значением буквы **Р**. Если Р < 9 (то есть **Р** $\leqslant 8$), то знаменатель не больше 89765, тогда как числитель (при уже известных **Д**, **О** и **Л**) не меньше 102234, и потому $n \geqslant \frac{102234}{89765} = 1{,}13\ldots > n_{\min}$. Поэтому **Р** $= 9$.

Что ж, удалось разобраться со значениями «повторяющихся» букв **Л** и **Р**, которые присутствуют и в числителе, и в знаменателе. С остальными же, ещё не рассмотренными буквами **А**, **У**, **Б** и **Ь**, которые находятся либо в числителе, либо в знаменателе, всё совершенно очевидно: для буквы **А**, которая стоит в числителе, надо брать наименьшее неиспользованное значение, то есть **А** $= 3$, а для букв **У**, **Б** и **Ь** – наоборот, наибольшие, причём в порядке убывания (с учётом занимаемых ими разрядов). Поэтому **У** $= 8$, **Б** $= 7$ и **Ь** $= 6$, так что, как уже отмечалось, наименьшее значение $n_{\min} = \frac{102239}{98726} = 1{,}035583\ldots$

2) Наибольшее значение n определяется аналогично, только все рассуждения надо выполнять «с обратным знаком». Поэтому $n_{\max} = \frac{987761}{10273} = 96{,}151172\ldots$ Вот и всё.

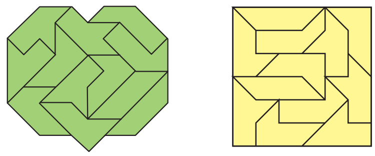
Итак, согласно неоспоримой математической теореме А. В. Жукова, в обозримом будущем следует ожидать соотношения доллара к рублю в пределах от $1{,}035583\ldots$ до $96{,}151172\ldots$

Вторая задача. После успешного решения первой задачи становится совершенно ясно, какое отношение к ней имеет вторая задача. А именно, решение первой задачи есть *подсказка* к решению второй. Можно долго и безуспешно искать подходящую десятичную дробь, в то время как решение лежит буквально на поверхности. Для этого надо всего лишь обратиться к *простым дробям*, и ответом будет «наипростейшая» из них: $\frac{1}{2}$. Она и впрямь ровно в 6 раз меньше суммы своих цифр, равной $1+2=3$.

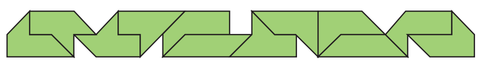
Известны и другие ответы, но в них используются только *сократимые* дроби (скажем, $\frac{10}{20}$ или $\frac{3}{3}$). Они, конечно, не приносят радости.

КВАДРАТУРА ЯБЛОКА

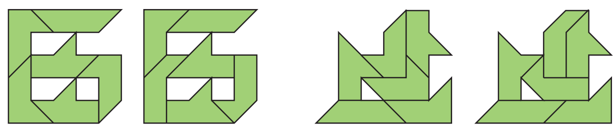
1. См. рисунок. Известно несколько вариантов сборки квадрата.



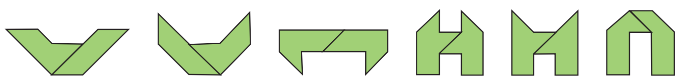
2. Известно единственное решение:



3. Решений много, вот две пары из них:

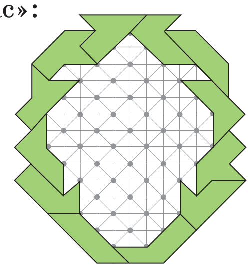


4. Вот единственное решение (если не считать, что пара элементов 11–12 позволяет составить два варианта симметричных фигур):



1-5 2-3 4-6 7-8 9-10 11-12

5. Площадь пустоты на рисунке составляет 174 единицы. Это рекордный на сегодняшний момент «ананас»:



наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Итоги прошлого конкурса будут опубликованы в 12-м номере.

А мы начинаем новый конкурс! Теперь он будет проводиться в три этапа: с сентября по декабрь, с января по апрель и с мая по август. Дипломы и призы получат не только победители за весь год, но и победители каждого этапа.

Высылайте решения задач I тура, с которыми справитесь, не позднее 5 октября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

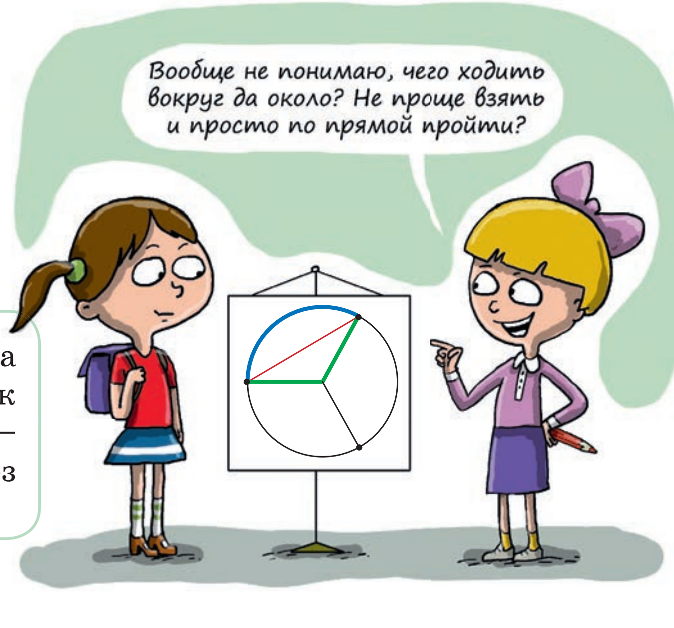
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

I ТУР

1. Гриша положил на левую чашку равноплечих весов три гирьки массой 1/8, 1/9 и 1/10 граммов. Можно ли положить на правую чашку две гирьки, веса которых – дроби с числителем 1, чтобы они уравновесили три гирьки на левой чашке?

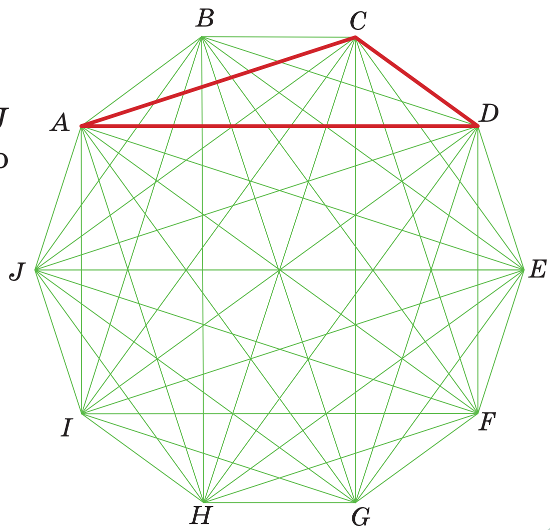


2. На окружности расположены три дома на равном расстоянии друг от друга. Как короче пройти от одного дома до другого – по дуге окружности (синий путь) или через центр окружности (зелёный путь)?

Авторы: Григорий Гальперин (1), Александр Перепечко (2), Николай Авилов (3), Егор Бакаев (4), Павел Кожевников (5)

3. На листках отрывного календаря на год написаны числа, соответствующие датам каждого месяца. Хулиган Петя хочет оторвать несколько листков (не обязательно подряд) так, чтобы на оставшихся листках не нашлось двух чисел, одно из которых в три раза больше другого. Какое наименьшее число листков ему придётся оторвать?

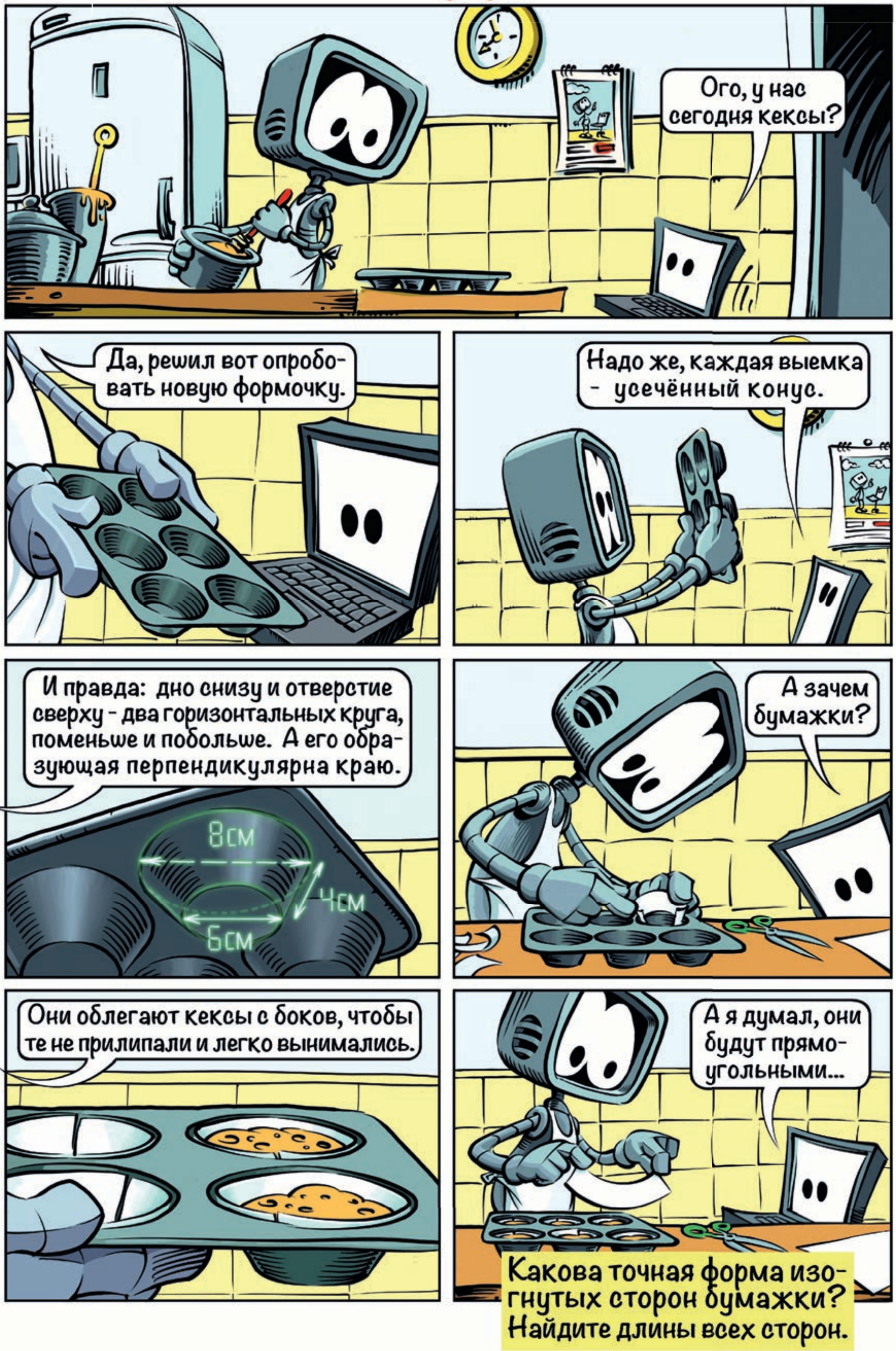
4. Дан правильный 10-угольник $ABCDEFGHIJ$ (все его стороны равны, и углы тоже). Какую часть его площади занимает треугольник ACD?



5. На клетчатой плоскости (все клетки – квадратики 1×1) нарисован прямоугольник по линиям сетки. Его разрезали по линиям сетки на N прямоугольников, проведя несколько горизонтальных и вертикальных разрезов от края до края. Докажите, что можно покрасить какие-то из этих N прямоугольников (возможно, один или все) так, чтобы окрашенная область была прямоугольником площади, делящейся на N.

Художник Николай Крутиков

Подложка для Кексов



Авторы Александр и Татьяна Перепечко
Художник Yustas

ISSN 2227-7986