№ 1 | январь 2021
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 1
январь 2021

ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

МАГНИТЫ, РАДИО, ЭЛЕКТРОНЫ И ЯДРА

СТАЛЬНАЯ ЧЕЛЮСТЬ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 1, январь 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Мария Усеинова

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индекс **84252**)
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 15.12.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

МАГНИТЫ, РАДИО, ЭЛЕКТРОНЫ и ЯДРА

– Ух, до сих пор в голове гудит! – Фёдор помотал головой, словно пытаясь вытряхнуть лишние звуки.

– Это после обследования? – Виктор с сочувствием посмотрел на товарища.

– Ну да, на томографе. Наверное, целый час в нём пролежал. Шуму – как на взлётной полосе!

– А разве там наушники не дают?

– Дают, иначе совсем оглох бы! Но всё равно громко. И как только такую машину придумали?

– А давай у Семёна Ильича спросим! Я как раз к нему в гости в лабораторию собираюсь, вместе и сходим!

– Отличная идея!

* * *

Семён Ильич, приветливо улыбаясь, открыл детям дверь.

– С чем сегодня пришли? Какие-нибудь новые вопросы или наблюдения?

– Понимаете, Федя ходил на МРТ-обследование...

– Ага, магнитно-резонансная томография! И что же вас в ней заинтересовало?

– Как и кому пришло в голову такую штуку придумать? – смущённо произнёс Фёдор.

Семён Ильич внимательно посмотрел на него.

– А хочешь узнать, как она работает?

– Ну, это очень сложно! Я наверняка не пойму.

– А давайте попробуем вкратце повторить путь учёных – подойдём к открытию магнитного резонанса с разных сторон, увидим, какие идеи ими двигали, с какими сложностями они сталкивались. Так будет легче разобраться. Готовы?

– Конечно!

– Тогда начнём. Вы, естественно, знаете, что такое магнит. Это тело, притягивающее железные предметы. Магнитные камни – минерал магнетит – были известны ещё в Древнем Китае, Индии и Греции. А что такое электричество?

– Движение электрических зарядов?

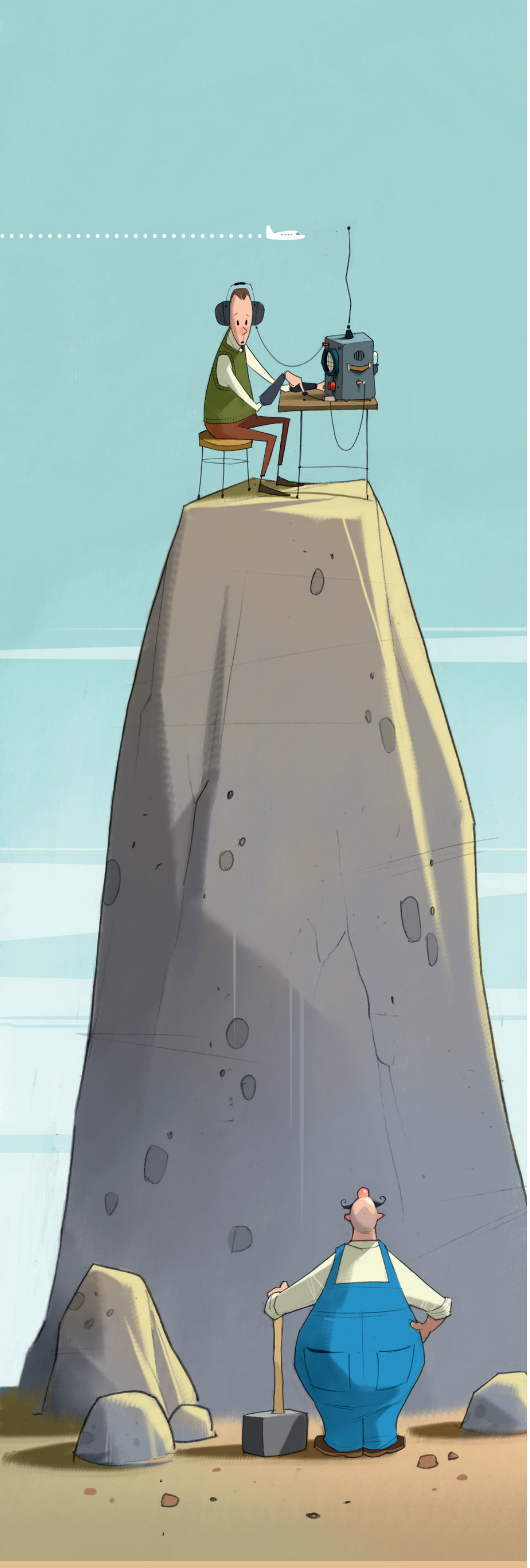
– Да, конечно. Но это современное определение, а сами электрические явления известны как минимум с Античности. Сначала их тоже наблюдали в основном в виде притяжения – например, янтарная палочка, натёртая шерстью, начинала притягивать лёгкие предметы. В XVIII веке создали электрический конденсатор (лейденскую банку), а затем и гальванический элемент – источники электричества – и научились передавать электричество на расстояние. Оно бежало по проводам, разогревая их, и всё это выглядело уже совсем не похоже на магниты. То есть был мир магнитных явлений – то, что бывает с некоторыми камнями, – и был мир электрических явлений – когда какой-то «флюид» бежит по проводам, подключённым к лейденской банке или гальваническому элементу. И вдруг оказалось, что электрический ток, бегущий по проволоке, ведёт себя как магнит! Физик Ханс Эрстед обнаружил, что ток оказывает влияние на стрелку компаса. А затем Майкл Фарадей открыл, что движущийся около замкнутого проводника магнит создаёт в нём электрический ток. Оказалось, что магнитные и электрические явления связаны между собой – нет электричества и магнетизма по отдельности, а есть электромагнетизм. А спустя ещё несколько десятков лет Джеймс Максвелл свёл воедино все известные законы электрических и магнитных явлений, записал их в виде уравнений и обнаружил, что уравнения предсказывают существование электромагнитных волн, распространяющихся со скоростью света.

– И тогда догадались, что свет – это тоже электромагнитная волна?

– Да. Только нельзя сказать «тоже», ведь никакие другие электромагнитные волны тогда ещё не были известны. Их смог обнаружить Генрих Герц только четверть века спустя. А ещё через несколько лет Александр Попов и Гульельмо Маркони с помощью этих волн осуществили радиосвязь. И с этого момента, с конца XIX века, можно сказать, начался век радио.

– Стали слушать радиопередачи?

– До радиопередач было ещё далеко. И главное, радио – это ведь не только радиовещание. Это и беспроводной телеграф (радио и называли первое время



«беспроводной связью»), и радиолокация, и радионавигация, и радиофизика, и радиоастрономия... Естественно, всё это возникло не одновременно. Но по мере того как возникало, становилось ясно, что с помощью радио можно исследовать очень многое – и космос, и микромир...

– И человеческий организм? То есть в МРТ – там тоже радио используется?

– Да, там тоже используются радиоволны, точнее – электромагнитное излучение радиочастотного диапазона. Но погоди немного, до этого ещё далеко. Биологическая материя, или, как её называли в далёкие времена, «живое вещество», очень сложно устроена, она во все времена казалась чем-то загадочным. А до начала XX века почти ничего не было известно о том, как вообще устроено вещество, хотя бы «неживое»: что собой представляет вода, камень, кусок металла, из чего они состоят?

– Как из чего? Из атомов! Атомы образуют либо молекулы, либо целые кристаллы...

– Но это же было очень нелегко понять. Если мир сложен из кирпичиков-атомов, то есть неделимых частичек, то почему мы их не видим? Где же атомы, если любое вещество можно раскрошить сколь угодно мелко? Скалу можно расколоть на отдельные камешки, камешки могут рассыпаться до отдельных песчинок, песчинки можно растереть в порошок, в пыль, так что отдельные пылинки и не увидишь. А уж что и говорить про жидкости! Ведь если бы вы не слышали об этом с детства, то не поверили бы, что вода состоит из отдельных «кирпичиков». Поэтому ещё со времён Аристотеля люди по большей части считали, что в основе вещества – какая-то непрерывная, бесструктурная субстанция, «континуум» по-латыни.

– А разве не было уже в Древней Греции тех, кто считал, что всё состоит из атомов?

– Да, были знаменитые атомисты – Левкипп, Демокрит, Эпикур... Но ведь, на самом деле, они про атомы ничего не знали. Это была только гипотеза –

точно так же, как лишь гипотезой была и «теория континуума» Аристотеля, и проверить их не было никакого способа.

– А какой может быть способ, если их невозможно увидеть?

– Очень часто так бывает: вы чего-то не можете увидеть, но знаете, как оно себя ведёт – и благодаря этому понимаете, как оно устроено. Например, вы не видите морского дна, но видите, как изменяются волны на поверхности моря, и можете догадаться, где отмели, а где глубина. К концу XVIII века начались важные открытия в химии. Стало ясно, что среди всех веществ существуют простые – которые уже нельзя разложить ни на какие другие. А разные простые вещества (или элементы, как их начали называть) могут, соединяясь, образовывать новые. Джон Дальтон, которого мы сегодня могли бы назвать и физиком, и химиком, в самом начале XIX века установил, что элементы могут соединяться друг с другом только в определённых пропорциях. Как будто для образования нового вещества можно взять каждого элемента либо столько, либо вдвое больше, либо втрое и т. д. – но невозможно взять какое-либо промежуточное количество (это правило назвали законом кратных отношений). Если вещества устроены как бесконечно делимые жидкости, от каждой из которых можно отобрать капельку любого размера, то такие ограничения совершенно непонятны – казалось бы, их можно перемешать друг с другом в любых пропорциях. А вот если они состоят из кирпичиков-атомов и их можно взять для образования молекул нового вещества либо один, либо два, либо три, но никак не одну треть и не два с половиной, то этот экспериментальный закон кратных отношений становится понятен. Вот вам первый шаг к пониманию, из чего состоит вещество.

– А почему только первый? Разве ещё оставались какие-то сомнения, что вещество состоит из атомов?

Окончание в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

Алексей Панов,
Дмитрий Ал. Панов,
Пётр Панов

ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Треугольник – основной объект геометрии, а может, и математики вообще. Собранные все вместе, треугольники образуют некоторое пространство – *Треугольный Мир*. Мы составим его подробную карту, побываем на окраинах этого мира и раскроем тайну его полюсов. Подготовку к большому путешествию начнём с простых измерений.

ИЗМЕРЕНИЯ

Нарисуйте на листе бумаги равносторонний треугольник с высотой 1 дециметр.

Отметьте внутри него точку, опустите из неё три перпендикуляра на стороны треугольника – на рисунке 1 они обозначены a, b, c – и подсчитайте их суммарную длину $a+b+c$ (в дециметрах). Проделайте несколько таких экспериментов, выбирая разные точки внутри треугольника, и заполните журнал измерений.

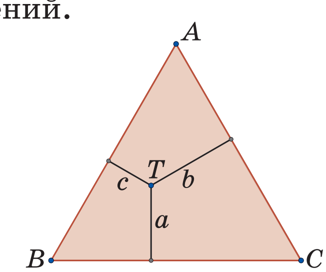


Рис. 1. Процесс измерения ставит в соответствие каждой точке T три числа a, b, c – длины отрезков, перпендикулярных сторонам треугольника

Журнал измерений

№	a	b	c	$a+b+c$
1				
2				
3				
4				
5				

Вы получите удивительный результат: $a+b+c$ всегда равно 1. Дело в том, что *в равностороннем треугольнике сумма перпендикуляров, опущенных из точки внутри треугольника на его стороны, равна высоте треугольника*.

Упражнение 1. Попробуйте доказать это.

НЕРАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКА

Раз уж у нас получились три отрезка длины a, b и c, почему бы не попытаться составить из них треугольник с этими сторонами?

Упражнение 2. Можно ли составить треугольник из отрезков длины 1, 2, 4; 1, 2, 3; 2, 3, 4?

Оказывается, треугольник со сторонами a, b и c существует только в том случае, когда одновременно выполняются три *неравенства треугольника* $a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b$, то есть любая сторона

треугольника меньше суммы двух других. Можно ограничиться одним неравенством, сказав: *бо́льшая сторона треугольника меньше суммы двух других*.

ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Для каких же точек T внутри ABC большее из чисел a, b, c меньше суммы двух других?

Разобьём наш треугольник ABC на четыре маленьких (рис. 2). Вершины среднего из них расположены в серединах сторон ABC. Только для точек внутри этого серединного треугольника, то есть для соответствующих им троек чисел a, b, c, выполняются все три неравенства $a < b + c$, $b < c + a$ и $c < a + b$. Для остальных точек одно из неравенств точно нарушается: на рисунке указано, какое именно.

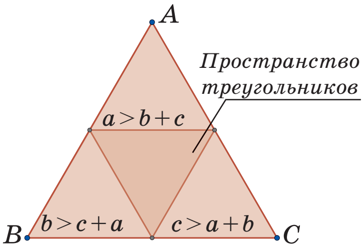


Рис. 2. Пространство треугольников

Упражнение 3. Взяв в каждом маленьком треугольнике хотя бы по одной точке, проверьте на примерах справедливость неравенств, указанных на рисунке 2.

Выходит, каждой точке T внутри серединного треугольника соответствуют три отрезка a, b, c, из которых можно сложить треугольник (с периметром 1). Вот почему мы дали серединному треугольнику на рисунке 2 название *Пространство треугольников*. Дальше мы будем называть его *Треугольным Миром*.

ПРИСТУПАЕМ К СОЗДАНИЮ КАРТЫ ТРЕУГОЛЬНОГО МИРА

Мы привыкли к тому, что географическая карта – цветная, на ней нанесена сетка из параллелей и меридианов и отмечены большие города и столицы.

Нанесём на карту Треугольного Мира первые пункты. Начнём с равностороннего треугольника периметра 1, в нём $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{3}$. Выберем ещё известный египетский треугольник со сторонами $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Сам треугольник, конечно, нельзя разместить на карте, но подобный ему со сторонами $a = \frac{3}{12}$, $b = \frac{4}{12}$, $c = \frac{5}{12}$, то есть $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$, – уже можно. Добавим ещё третий пункт – равнобедренный треугольник со сторонами $a = \frac{4}{9}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = \frac{4}{9}$. И вот первые наблю-

дения: равносторонний треугольник соответствует центру Треугольного Мира, равнобедренный треугольник со сторонами $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$ расположен близко к стороне AC и одинаково удалён от сторон AB и BC (рис. 3). Пойдём дальше.

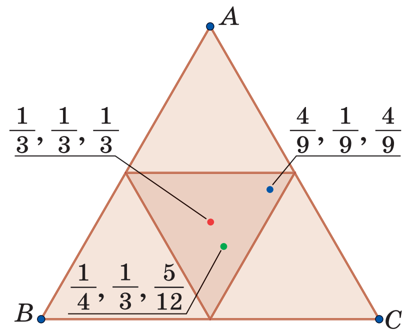


Рис. 3. Три пункта на карте Треугольного Мира

ПЕРЕСТАНОВКИ

Стороны треугольника можно записать в разном порядке. Задают ли эти записи (перестановки) одну и ту же точку на нашей карте или разные?

Упражнение 4. Сколько существует разных перестановок а) трёх различных чисел; б) трёх чисел, два из которых равны; в) трёх одинаковых чисел?

На рисунке 3 зелёная точка обозначает треугольник со сторонами $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{12}$. На рисунке 4 зелёных точек шесть – они соответствуют всем возможным перестановкам чисел $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$.

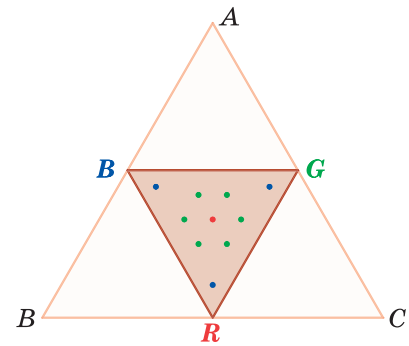


Рис. 4. На карте Треугольного Мира каждый треугольник, у которого все стороны разные, присутствует 6 раз, равнобедренный – 3 раза, а равносторонний – один

Для чисел $\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}$, отвечающих равнобедренному треугольнику, есть три различные перестановки. Им соответствуют три синие точки на рисунке 4. Набор чисел $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ уникален. Итак, порядок, в котором перечислены длины сторон, на карте учитывается.

Взглянем ещё раз на рисунок 4. Там вершины внутреннего треугольника получили новые названия $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{B}$, а внешний треугольник слегка поблёк – это мы готовимся к увеличению размеров нашей карты и к её раскраске. Далее мы не будем изображать внешний треугольник и сосредоточимся исключительно на нашей карте, а именно, на треугольнике $\boldsymbol{RGB}$.

ТРИ ЧИСЛА – ЭТО ЦВЕТ

Для нас три числа a, b, c – это, прежде всего, треугольник, но три числа – это ещё и цвет. Мы имеем в виду ***RGB***-палитру. В ней все цвета получаются смешением трёх основных – красного, зелёного и синего, – и цвет задаётся набором из трёх чисел (r, g, b), каждое из которых заключено в пределах от 0 до 1. Например, (0, 0, 0) – это чёрный, (1, 1, 1) – белый, а $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ – оттенок серого. Сами красный, зелёный и синий – это, конечно же, (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Тройку чисел, задающую цвет, мы пишем в скобках, чтобы не путать её с точкой Треугольного Мира.

Было бы естественно раскрасить точку нашего Треугольного Мира, отвечающую числам a, b, c, тем же самым цветом (a, b, c). Но такая раскраска, к сожалению, малоконтрастная и недостаточно яркая. Вот если её рассчитать как ($1-2a$, $1-2b$, $1-2c$), то всё встаёт на свои места и, главное, вершины R, G, B приобретают свои законные цвета (рис. 5).

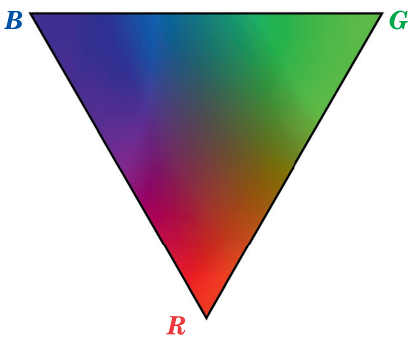


Рис. 5. Раскраска треугольного мира

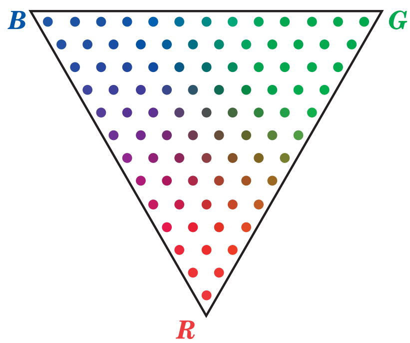


Рис. 6. Сеть точек, равномерно заполняющая Треугольный Мир

Упражнение 5. Рассчитайте, каким ***RGB***-цветом раскрашен центр Треугольного Мира.

ЕЩЁ ДВЕ КАРТЫ

Разные типы карт расширяют наши представления об окружающем мире. Вот карта, на которой обозначена сеть точек, равномерно заполняющая наш Треугольный Мир (рис. 6).

Упражнение 6. Найдите на рисунке 6 центр Треугольного Мира и проверьте решение упражнения 5.

А на рисунке 7 цветные точки заменены маленькими треугольниками, которым они соответствуют.

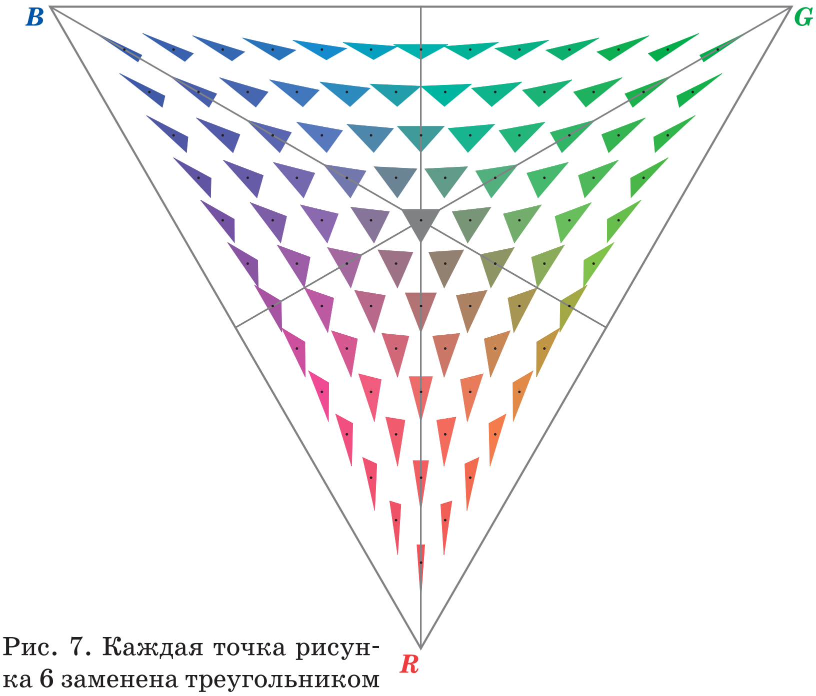


Рис. 7. Каждая точка рисунка 6 заменена треугольником

Не правда ли, эти треугольники похожи на маленькие магнитные стрелки с тремя концами, указывающими на вершины треугольника ***RGB***?

На этом мы временно прерываем наше изложение. Нам ещё предстоит путешествие к отдалённым окраинам Треугольного Мира и к его полюсам, тайну которых мы попытаемся раскрыть.

А пока посмотрите картинки в большом тексте Кая Беренда «Введение в алгебраические стеки» (K. Behrend, Introduction to Algebraic Stacks[1]). В нём подробно изучаются многочисленные Треугольные Миры. Наш Треугольный Мир фигурирует там под названиями $\mathscr{N}$ или $\bar{\mathscr{N}}$. Рекомендуем первые 70 страниц, где содержится множество картинок. Одну из них мы воспроизвели на рисунке 7, слегка улучшив её.

Ещё одно изображение (рис. 6) мы взяли из статьи П. Панова «О геометрических медианах треугольников»[2]. Там тоже много цветных картинок!

До встречи в следующем номере журнала.

Продолжение следует

[1] kvan.tk/stacks
[2] kvan.tk/treugmir

Художник Мария Усеинова

ПОТРЕСКИВАЮЩИЙ ЛЁД И ШИПЯЩИЕ АЙСБЕРГИ

Если кубики льда бросить в напиток комнатной температуры, послышится потрескивание. В чём причина?

Когда айсберги начинают таять, они создают другие звуки – что-то вроде шкворчания или шипения, как при поджаривании на сковородке. Люди, которые слышали эти звуки, находясь на подводных лодках и кораблях, называют их «айсберговой газировкой». Что вызывает шипение айсбергов?

Из книги Джирла Уокера «Новый физический фейерверк»

Ответы в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

Борис Дружинин

СТАЛЬНАЯ ЧЕЛЮСТЬ

Наконец-то природа сжалилась над горожанами, слегка похолодало и выпал долгожданный снег. Лиза и Вова отправились на лыжную прогулку по дремучему лесу – от Радищево до Снегирей. Лыжня петляла между огромных заснеженных ёлок, лыжи отлично скользили и идти было легко и приятно. Пересекая небольшую полянку, ребята увидели на свежем снегу следы.

– Кажется, заяц здесь пробежал, – обрадовалась Лиза.

– Точно, – подтвердил Вова. – Заячьи следы с другими не спутаешь.

– Давай пойдём за ним, – предложила Лиза, – может, он ещё недалеко. Хоть на зайца живого посмотрим.

– Давай, – повернул направо Вова.

– Ты куда? – остановила его Лиза и показала налево. – Заяц туда ускакал.

Друзья стали спорить, в каком направлении убежал заяц. Вова утверждал, что направо, а Лиза – что налево.

В какую сторону пробежал заяц?

Естественно, зайца догнать не удалось. Ребята вернулись на лыжню и потопали в Снегири, любуясь красивым зимним лесом. Наконец устали, решили передохну́ть и подкрепиться.

– Вот под этой ёлкой костерок разведём, чтобы не замёрзнуть, – предложила Лиза. – Видишь, какая она огромная, и ветки высоко начинаются – будем под ними как в шалашике. Здесь и брёвнышко лежит, на нём удобно сидеть. Ты пока сухих веток наломай, а я едой займусь. Да, пару тонких веточек от сучков очисти, мы на них шашлычок из колбасы поджарим.

Девочка раскрыла рюкзачки, расстелила клеёнку и принялась раскладывать на ней захваченные из дома припасы. При этом она напевала:

А ели вы когда-нибудь
Из колбасы шашлык?
Попробуйте, попробуйте,
Проглотите язык!

– Что это за песенка? – удивился Вова. – Никогда такой не слышал.

– Бабушка её пела в пионерском лагере, – объяснила Лиза. – Когда школьницей была. Ой! А что это у тебя? Зачем ты магнит с собой взял? – И она достала большую красно-синюю «подкову».

– Ха-ха! – засмеялся Вова. – То-то я чувствую, что мне на спину что-то давит. Мы вчера в физическом кружке опыты с магнитами делали, так я его забыл вынуть. Теперь придётся на себе таскать, не выкидывать же.

Костёр тем временем разгорелся. Ребята принялись нанизывать на палочки кусочки колбасы. И вдруг…

Что могло произойти? Чего не учли ребята?

После небольшого происшествия ребята дожарили колбасу, подкрепились, запивая чаем из термоса, и отправились дальше. Вскоре они вышли на берег заснеженного озера, в центре которого сидел старичок. В полной тишине слышалось его непонятное бормотание, время от времени прерываемое всхлипыванием. Ребята подошли поближе. Старичок сидел около пробитой во льду лунки и плакал. Рядом лежали пара зимних удочек и несколько рыбёшек.

– Дедушка, от чего вы так расстроились? – поинтересовалась Лиза.

– Старый я уже, зубы все повыпадали. А внук у меня – мастер на все руки, он у нас в деревне кузнец. Вот и смастерил мне подарок – вставные челюсти с крепкими стальными зубами. Так удобно стало, я даже сухари смог кусать!

– Да, хорошие у вас внуки, – похвалил Вова. – Так вы от радости плачете?

– Какая тут радость, – махнул рукой старичок. – Сидел вот, рыбу ловил. Ну и задремал незаметно. Какая-то снежинка в нос попала, и я чихнул.

– Будьте здоровы, – совсем некстати брякнула Лиза. – Или вы заболели?

– Нет, я здоров. Но от чихания челюсть вставная выскочила – и прямо в лунку. А я так хотел жареной рыбки попробовать. Что мне теперь делать?

– Не печальтесь, дедушка, – ободрил старичка Вова. – Сейчас мы достанем вашу челюсть.

– Как ты её достанешь? – удивился старичок. – Нырнёшь, что ли? Ты в лунку не пролезешь. И вода холодная.

– Нырять не обязательно, – успокоила старичка Лиза. – Мы и так челюсть достанем.

И действительно, через несколько минут старичок получил свою челюсть целой и невредимой.

Что сделали Лиза и Вова?

Друзья снова развели костерок, уже подальше от деревьев, и пожарили на нём пойманную старичком рыбу. Потом все втроём с удовольствием поели и отправились по домам.

Художник Екатерина Ладатко

Илья Сиротовский,
Александр Шкловер

СГИБАНИЯ БУМАГИ

История первая. ОТРЕЗКИ

Стёпа и Полина сидели на кухне и скучали. Метель за окном не внушала брату и сестре больших надежд.

– Эх, пропадает выходной, – сказал Степан.

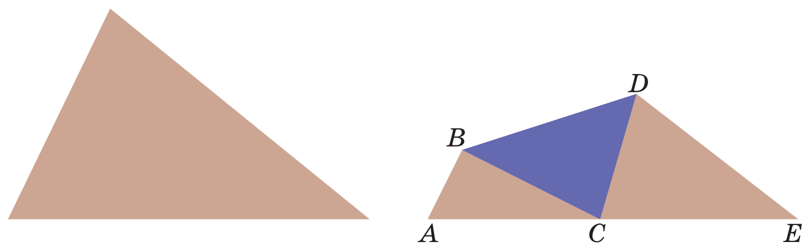
– Угу... Хочешь задачку? По геометрии.

– Она же только началась, я ещё ничего не знаю.

– А ничего знать и не надо, – улыбнулась Полина, – достаточно здравого смысла!

– Этого добра у меня хоть отбавляй! – глаза Стёпы заинтересованно блеснули. – Давай свою задачку!

Полина взяла лист бумаги, вырезала из него треугольник и сложила его, как показано на рисунке.



– Допустим, что периметр этого треугольника равен P. Попробуй найти сумму периметров треугольников ABC и CDE.

– Что значит «допустим, равен P»? – Стёпа потянулся за линейкой. – Сейчас мы всё точно узнаем.

Немного повозившись, брат торжественно заявил:

– Периметр треугольника равен 27 см. И это почти точно! А вот сумма периметров маленьких треугольников может быть разной. Согнуть-то по-разному можно, чтобы вершина на противоположную сторону попала.

– Проверь, – предложила сестра.

Стёпа сделал ещё несколько сгибов.

– Каждый раз одно и то же: примерно 27... – Он выглядел озадаченным.– Интересно, почему?

Брат задумался. Через некоторое время он сказал:

– Что AC и CE вместе дадут сторону треугольника – это понятно. А вот откуда взять ещё две стороны?

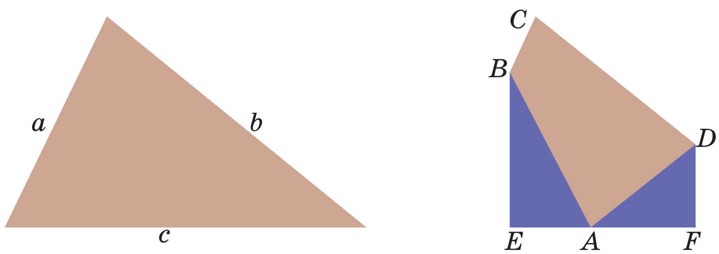
Степан всё крутил в руках бумажный треугольник.

– Ага! Если развернуть эту твою штуку, то BC дополнит AB как раз до ещё одной стороны большого треугольника. Ну и с CD и DE так же. Вот почему всегда 27 получается!

– Здорово! Ты молодец! – одобрила Полина.

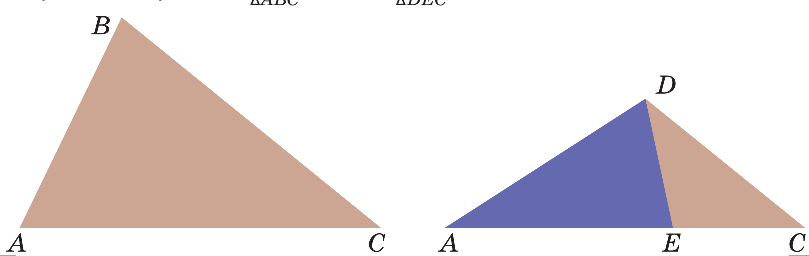
– Давай ещё! – И Стёпа получил новые задачи.

Задача 1. Бумажный треугольник со сторонами a, b и c согнули, как показано на рисунке. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$ и длину отрезка EF.

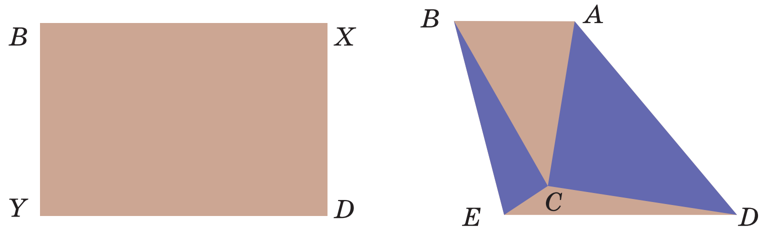


Задача 2. Углы треугольника согнули в одну точку (см. рисунок). Сравните периметр исходного треугольника с суммой периметров треугольников ABG, CDG и EFG.

Задача 3. Треугольник согнули, как показано на рисунке. Пусть $P_{\Delta ABC} = P$; $P_{\Delta DEC} = Q$. Найдите AB.



Задача 4. Прямоугольный лист согнули, как показано на рисунке. Докажите, что периметры треугольников ABC и CDE равны.



Художник Екатерина Ладатко

Валерия Сирота

ЗИМНИЕ

1) Как льдом зажечь огонь?

2) Как снегом согреться?

ЗАДАЧИ

3) Как холодом очистить воду от солей?

4) Как на новенькой лыже определить место, куда ставить крепление? Почему важно не сдвинуть крепление вперёд или назад – чем это положение особенное?

Ответы в следующем номере

Художник Мария Усеинова

ВЫПУСК 33 2/3 ПРАВ/ДЫ

Сергей Федин

ФРАНСУА РАБЛЕ, ЖОРЖ САНД, АЛЕКСАНДР ДЮМА

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

ФРАНСУА РАБЛЕ

Одно из самых известных произведений французской литературы – роман «Гаргантюа и Пантагрюэль». Автору этой озорной и авантюрной книги Франсуа Рабле (1494–1553) однажды надо было добраться из Лиона в Париж, а у него не было ни гроша в кармане. И вот что он придумал.

На столике в своём гостиничном номере Рабле оставил три пакетика с надписями: «Яд для короля», «Яд для королевы» и «Яд для дофина[1]» – и пошёл прогуляться. Слуга, убиравшийся в номере, сразу же сообщил о подозрительных пакетах хозяину гостиницы, а тот – куда следует. Рабле арестовали и под конвоем доставили в Париж, прямо (чего мелочиться!) к королю Франциску Первому, чтобы тот решил судьбу горе-отравителя.

Тогда и выяснилось, что в зловещих пакетиках был не яд, а обычный сахар, который Рабле тут же растворил в воде и выпил. А потом весело рассказал королю, с которым был хорошо знаком, про свою хитрость.

[1] Дофин – во Франции титул наследника короля, в данном случае его сына.

ЖОРЖ САНД

Популярный в XIX веке французский писатель Жорж Санд был на самом деле женщиной Авророй Дюпен (1804–1876). Мужской псевдоним Авроры был не случаен – она с юности предпочитала мужскую одежду и мужские причёски, прекрасно играла на шестиструнной гитаре и стреляла из лука.

Тем удивительнее казались длинные наманикюренные ногти на её руках, за которыми знаменитая

романистка тщательно ухаживала. Они в своё время так поразили её возлюбленного, великого польского композитора Фредерика Шопена, что он посвятил им музыкальное произведение, которое так и назвал: ногтюрн.

А на вопрос одного музыкального критика, почему именно ногтям Жорж Санд он посвятил свою новую пьесу, Шопен, не раздумывая, ответил: «Потому что ногти – единственная женская деталь в её облике».

Впоследствии, впрочем, Шопен устыдился такого физиологического названия и заменил его на более благозвучное «ноктюрн», что в переводе с французского значит «ночной».

АЛЕКСАНДР ДЮМА

Однажды французский писатель Александр Дюма (1802–1870), автор знаменитых приключенческих романов «Три мушкетёра», «Граф Монте-Кристо» и других, участвовал в необычной дуэли. Участники бросали жребий, после чего тот, на кого он выпал, должен был застрелиться.

К несчастью, роковой жребий пал на Дюма. Взяв пистолет, писатель с трагическим видом удалился в соседнюю комнату и закрыл дверь. Через пару секунд грянул выстрел, дверь снова открылась, и в проёме показался... Дюма. Живой и невредимый. Опустив дымящийся пистолет, он виновато пояснил:

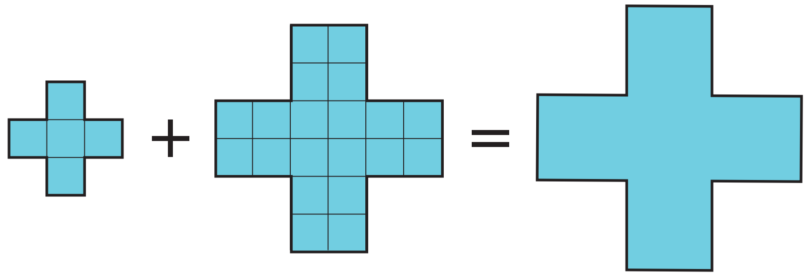
– Я стрелял, но промахнулся.

Художник Капыч

Николай Авилов

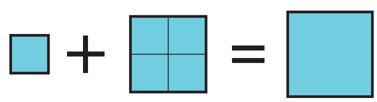
Три креста,
или чемпионское разрезание

Давайте докажем с помощью разрезаний геометрическое равенство:

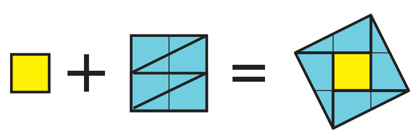


Задачи на разрезание многоугольников – одни из самых увлекательных, и что интересно: если надо разрезать многоугольник на несколько частей и сложить из них другой, это *всегда возможно*, лишь бы многоугольники имели равные площади![1]

В нашей задаче суммарная площадь двух меньших крестов равна $5+20=25$, значит, сторона квадратов, из которых составлен большой крест, равна $\sqrt{5}$. Отрезок длиной $\sqrt{5}$ нетрудно получить, если вспомнить, что гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2 равна $\sqrt{5}$. Сразу непонятно, как резать кресты, поэтому предлагаю решить задачу-помощницу для квадратов со сторонами 1, 2 и $\sqrt{5}$:



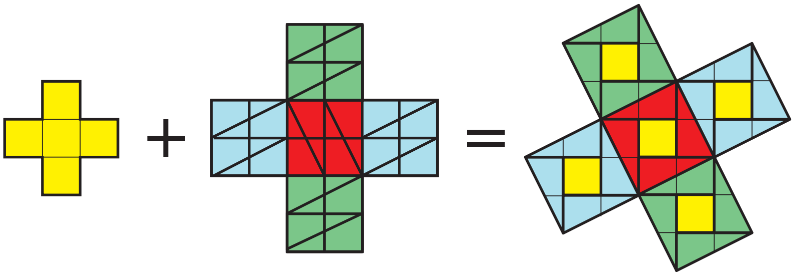
Тут решение почти очевидное: если разрезать квадрат со стороной 2 на четыре треугольника с катетами 1 и 2, из них легко сложить квадрат:



Теперь понятно, какой должна быть сторона третьего креста. Так как каждый крест состоит из

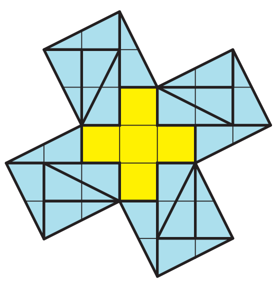
[1] Это утверждение известно как *теорема Бойяи–Гервина*. Доказательство можно прочитать в брошюре В. Г. Болтянского «Равновеликие и равносоставленные фигуры»: kvan.tk/boltyanski

пяти квадратов, то, разрезая каждый из них по приведённой схеме, получим решение нашей задачи:

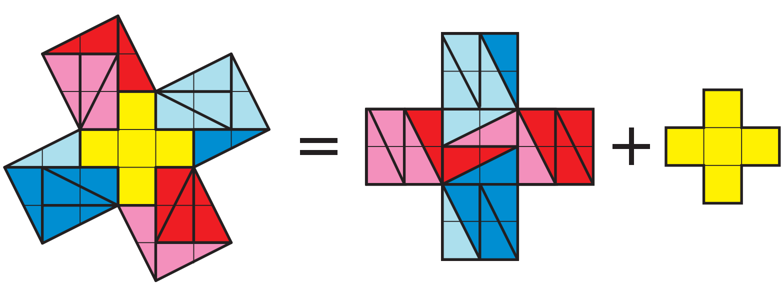


В этом решении большой квадрат разрезан аж на 25 частей. Но в подобных задачах особо ценятся разрезания на небольшое число частей. Найти минимальное разрезание – почти всегда трудная задача, требующая немало фантазии.

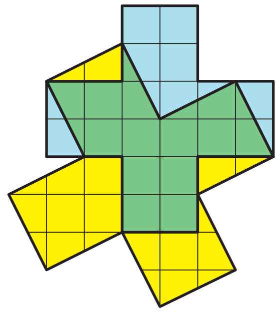
Поищем более экономное разрезание. Попробуем не разрезать маленький крест. Для этого поместим его в центре, как показано на рисунке. Оказывается, каждую из четырёх оставшихся частей можно замостить четырьмя прямоугольными треугольниками (такими же, как в задаче-помощнице). Значит, найдено разбиение на 21 часть, что меньше 25:



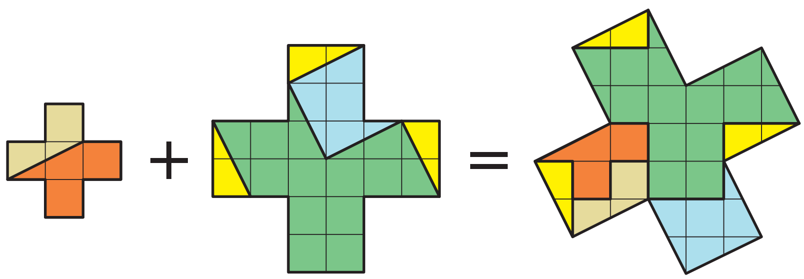
Но «бросается в глаза» большое количество равных прямоугольных треугольников. Попытаемся объединить их в фигуры, которыми можно замостить средний по величине квадрат. Посмотрите на результат – разноцветный калейдоскоп, где «спрятано» более экономное разрезание, всего на 9 частей:



С таким решением эта задача долгое время лежала в моём архиве, пока не попала к Василию Илюхину – чемпиону России по решению головоломок. Он поступил нестандартно, наложив средний крест на большой, да ещё с выходом за границу большого креста. На первый взгляд, это кажется бесполезным. Но это же чемпионский ход!

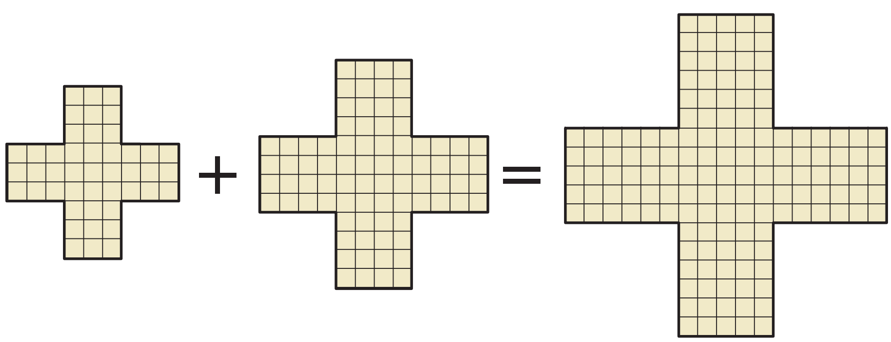


Оказывается, все голубые участки среднего креста можно уложить на жёлтые участки большого креста, предварительно отрезав от наибольшего куска прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2. А малый крест разрезается на две части. В итоге получается разрезание на 7 частей.



Можно ли разрезать на число частей меньшее, чем 7? Этот вопрос пока остаётся открытым! Обязательно напишите нам, если вы найдёте решение.

И напоследок – задача Л. П. Мочалова. С помощью разрезания докажите равенство:



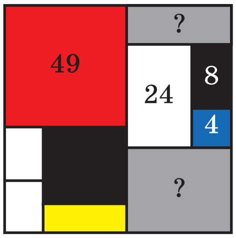
Художник Алексей Вайнер

XLII ТУРНИР имени М.В.ЛОМОНОСОВА
ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

В октябре 2020 года прошёл очередной Турнир имени М.В. Ломоносова – ежегодная олимпиада с заданиями на очень разные темы, от математики и физики до истории и лингвистики. Можно было поучаствовать сразу в нескольких конкурсах, распределив время. Приводим некоторые задачи этого турнира.

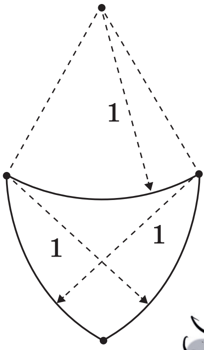
Математика

1. Пит М. на квадратном холсте нарисовал композицию из прямоугольников. На рисунке даны площади нескольких прямоугольников, в том числе синего и красного квадратов. Чему равна сумма площадей двух серых прямоугольников?

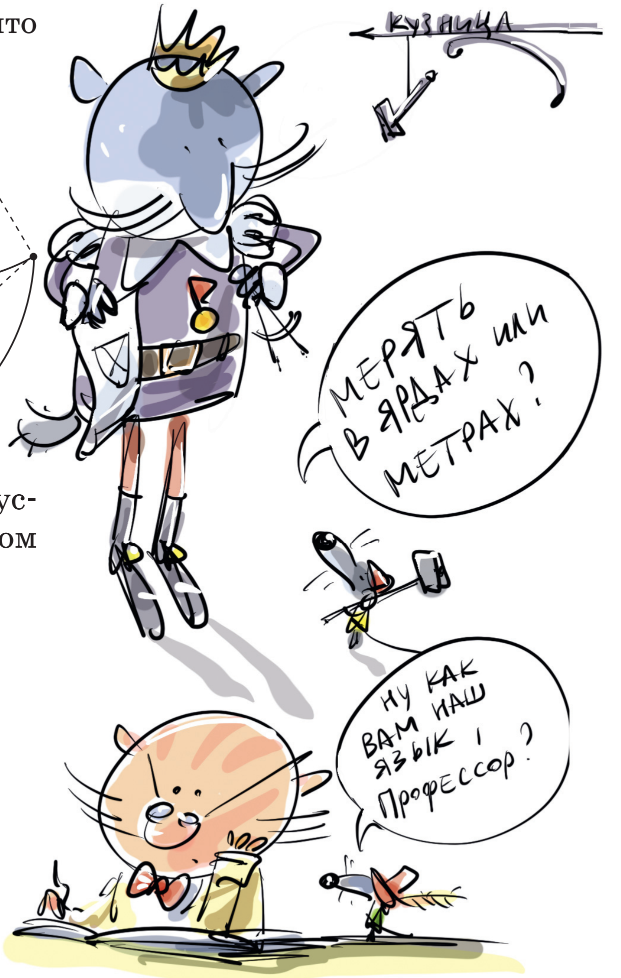


2. На контурной карте России 85 регионов. Вовочка хочет покрасить на карте каждый регион в белый, синий или красный цвет так, чтобы белый и красный цвета не имели общей границы. При этом один или даже два цвета можно не использовать. Докажите, что количество вариантов такой раскраски нечётно.

3. Король Артур хочет заказать кузнецу новый рыцарский щит по своему эскизу. Король взял циркуль и нарисовал три дуги радиусом 1 ярд так, как показано на рисунке.



Чему равняется площадь щита в квадратных ярдах? Ответ округлите до сотых. Напомним, что площадь круга радиуса R равна πR^2, $\pi \approx 3{,}14$.



Лингвистика

Даны глагольные формы языка жаравара (в русской транскрипции) и их значения в перепутанном порядке:

Язык жаравара	**Значения**
хахаахаа	смеяться
жокожоко	потягивать
жожоко	посмеиваться
баа	сильно толкать
мавамава	постукивать
хохоро	уставать
вевее	сильно тянуть
хаахаа	подталкивать
бабаа	тянуть
хорохоро	поблескивать
хоро	стучать
маа	полностью покраснеть

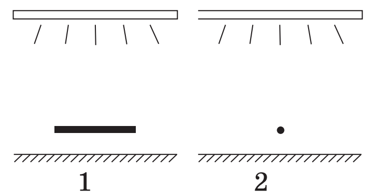
Установите правильные соответствия. Кратко опишите лингвистические закономерности, которые вы обнаружили при решении этой задачи.

Примечание. Язык жаравара относится к языковой семье арава. На нём говорит около 170 человек на северо-западе Бразилии.

Физика

1. Если посмотреть на зелёный предмет через красное стекло, то каким будет его видимый цвет – красным, зелёным или чёрным?

2. Под потолком комнаты висит люминесцентная лампа «дневного света», представляющая собой длинную и тонкую светящуюся трубку. Под лампой стоит стол. В нескольких сантиметрах над столом держат карандаш, один раз он расположен параллельно лампе (1), второй раз – перпендикулярно (2).



Было замечено, что в одном случае на столе возникает тень от карандаша, а в другом она практически не видна. В каком случае тень возникает, а в каком – нет? Почему?

Для случая, когда тень не возникает, оцените, при каком расстоянии между карандашом и столом она всё же возникнет.

3. Представьте себе, что в результате кораблекрушения вы оказались на необитаемом острове в океане. У вас нет никаких приборов или инструментов, но на острове стоит ясная солнечная погода.

Как определить в течение дня, в каком полушарии Земли вы находитесь — северном или южном?

Где должен находиться остров, чтобы на предыдущий вопрос нельзя было дать ответ без дополнительной информации?

Астрономия и науки о Земле

1. Как можно определить, повышался или понижался уровень Мирового океана в далёком прошлом?

2. Сопоставьте причину и следствие так, чтобы получилось 10 верных утверждений.

Причины:

1) Ось вращения планеты наклонена,
2) Планета вращается вокруг оси,
3) Гравитация создает приливные волны,
4) На Луне нет атмосферы,
5) На Венере плотная атмосфера,
6) Венера ближе к Солнцу, чем Земля,
7) На Марсе низкое давление,
8) Марс покрыт оксидом железа,
9) На Марсе разреженная атмосфера,
10) Вращение спутника вокруг планеты быстрее, чем планеты вокруг оси,

Следствия:

- поэтому там голубой закат.
- поэтому там много кратеров.
- поэтому происходит смена времен года.
- поэтому Фобос падает.
- поэтому там нет воды в жидком виде.
- поэтому там высокая температура.
- поэтому происходит смена дня и ночи.
- поэтому Луна повернута к Земле одной стороной.
- поэтому наблюдается только утром и вечером.
- поэтому там красная поверхность.

Биология

Известно, что существуют растения, способные к самовозгоранию. Воспламенение происходит из-за перегрева эфирных масел, которые выделяют эти растения. Предположите, зачем растения выделяют такие опасные вещества? И что позволяет выживать таким видам?

История

В 1859 году на Солнце произошла вспышка огромной мощности: тогда полярные сияния были видны на Кубе и в Австралии. Говорят, что такие вспышки коррелируют (причинно связаны) с крупными изменениями во всех сферах жизни на Земле, включая катастрофы в техносфере, политические и социальные инновации и перевороты в науке. Назовите такие события, случившиеся в 1859 году или вскоре после него. Какие из них точно были следствиями солнечной вспышки? Какие из них предположительно были следствиями солнечной вспышки?

Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

В этом номере мы подводим итоги прошлогоднего конкурса по русскому языку.

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ! ИМИ СТАЛИ:

Борович Марк	Москва	школа № 1191	5 кл.
Виденичева Марьяна	Санкт-Петербург	школа № 137	5 кл.
Галахова Екатерина	Москва	школа № 2101	10 кл.
Еремеева Софья	Петрозаводск	Державинский лицей	10 кл.
Зизевских Всеволод	Липецк	семейное обучение	7 кл.
Костиков Владислав	Самара	гимназия № 2	5 кл.
Степина Алиса	Москва	школа № 548	7 кл.
Сухих Эдуард	Сочи, Краснодарский край	школа № 78	9 кл.

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПРИЗЁРОВ! ИМИ СТАЛИ:

Богданова Ксения	Москва	школа № 1583	3 кл.
Горденко Мария	Белебей, Республика Башкортостан	гимназия № 1	11 кл.
Гришина Анастасия	Москва	школа № 1158	7 кл.
Караваева Валерия	Москва	школа № 1502	10 кл.
Ларионова Елена	Калининград	гимназия № 32	6 кл.
Линиченко Дарья	Москва	школа № 1543	9 кл.
Литвинцева Кира	Москва	школа № 544	6 кл.
Наумова Алёна	Бердск, Новосибирская обл.	Экономический лицей	4 кл.
Никифоров Роман	Москва	«Курчатовская школа»	5 кл.
Пискунов Дмитрий	Гусь-Хрустальный, Владимирская обл.	школа № 2	8 кл.
Тужик Ольга	Москва	филфак МГУ	I курс
Тюков Даниил	п. Новый Свет, Ленинградская обл.	«Пригородная школа»	10 кл.
Чумаков Кирилл	Санкт-Петербург	школа № 524	6 кл.
Юлов Василий	Санкт-Петербург	лицей № 150	7 кл.

СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРЕМИЕЙ ЗА ЛУЧШЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ I ТУРА НАГРАЖДАЕТСЯ

Зайцев Максим	Москва	школа № 1530	4 кл.

СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРЕМИЕЙ ЗА ЛУЧШЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ II ТУРА НАГРАЖДАЕТСЯ

Костиков Владислав	Самара	гимназия № 2	5 кл.

БЛАГОДАРИМ ВСЕХ УЧАСТНИКОВ КОНКУРСА!

Мы начинаем конкурс 2021 года! Победителей ждут призы. Предусмотрены специальные премии за лучшее решение отдельных туров. Решения I тура отправляйте по адресу ruskonkurs@kvantik.org **не позднее 1 марта**. В письме кроме имени и фамилии укажите ваш город, а также школу и класс, где вы учитесь. Предлагайте на конкурс задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы: так, автор задачи 5 – девятиклассница Ксения Хорошева. Желаем успеха!

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

I ТУР

1. Пете попалось на глаза некое слово (существительное, нарицательное, в словарной форме).

– Ну и словечко! – воскликнул Петя. – Сначала написано число, а потом – название этого числа.

Какое слово увидел Петя?

И. Ф. Акулич

2. Маленькую Иру папа называет «пигалица» – за то, что Ира очень любит ДЕЛАТЬ ЭТО и с удовольствием всем об этом рассказывает. Какой глагол мы заменили на ДЕЛАТЬ ЭТО?

Б. Л. Гуревич

3. Какая последняя по порядку буква русского алфавита обозначает согласный, парный и по твёрдости-мягкости, и по звонкости-глухости?

И. Б. Иткин

4. Бюрократ бывает туповатый и дубоватый. А песок?

С. И. Переверзева

5. Найдите русское слово, состоящее не менее чем из четырёх морфем, таких что каждая из них состоит ровно из одной буквы. (Морфема – любая значимая часть слова.)

К. С. Хорошева

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, IV тур («Квантик» № 10, 2020)

16. *Помимо приставок и суффиксов, в некоторых языках встречаются так называемые* **инфиксы** *– особые части слова, вставляющиеся внутрь корня. Например, в языке сумо (распространён в Никарагуа и Гондурасе):* suulu *– ‘собака’,* suu**ma**lu *– ‘твоя собака’ (инфикс* -ma- *со значением ‘твой’). Один лингвист в шутку предложил выделять в русском языке инфикс* -шма- *с усилительным значением. В каком слове?*

Речь идёт о слове ***колошматить***: этот глагол, означающий «бить что есть мочи», действительно можно считать образованным от глагола *колотить* при помощи инфикса *-шма-* с усилительным значением.

17. *По одной из версий, это знакомое всем с детства выражение первоначально означало нечто вроде «тот, кто нацарапал жалобу». Что это за выражение?*

Это выражение – ***ябеда-корябеда***. Словом *ябеда* сейчас обычно называют человека, который любит на всех жаловаться, но может оно обозначать и саму жалобу. Глагол *карябать* (встречается и написание *корябать*) означает «царапать». Гипотезу о происхождении дразнилки *ябеда-корябеда*, на которой основана задача, многие учёные считают убедительной.

18. *Бывает, что мы случайно переставляем звуки в словах. Один мальчик сказал другому, показывая на вывеску некоего магазина: «Видишь мертвецов?». Что было написано на вывеске?*

Там было написано **«Мир цветов»**: мальчик невольно поменял местами согласные *ц* и *т*.

19. *Какую одежду одна маленькая девочка назвала «юбка-коробка»? Представители какой профессии носят эту одежду?*

Эта одежда – балетная ***пачка***; такие пачки носят **балерины**. Видимо, у девочки слово *пачка* вызвало ассоциацию с чем-то вроде *пачки печенья*. Ну а *пачка печенья* и *коробка печенья* – это примерно одно и то же: неважно, в чём лежит печенье, лишь бы вкусное было.

20. *Сложив края мои, найди*
Рождённое от света.
Во мне же, сколько ни гляди,
Ни капли света нету.

Стихотворение написано «от лица» слова ***темень***. «Сложив края», то есть две первые и две последние буквы слова *темень*, получаем слово ***тень***: как известно, чтобы появилась тень, необходим источник яркого света. А там, где темень, действительно «ни капли света нету»: ведь *темень* – это синоним слова *мрак*.

НАШ КОНКУРС, III тур («Квантик» № 11, 2020)

11. *а) Можно ли составить из ненулевых цифр 1001-значное число с таким хитрым свойством: если вычеркнуть в нём несколько цифр (не обязательно подряд) так, чтобы осталось семизначное число, то это оставшееся число точно не будет делиться на 77?*

б) А если всегда должно оставаться шестизначное число, которое точно не будет делиться на 77?

Ответ: а) да; б) нет.

а) Возьмём число из одних единиц. После вычёркивания получится 1111111. Это число не делится на 11, тем более не делится на 77.

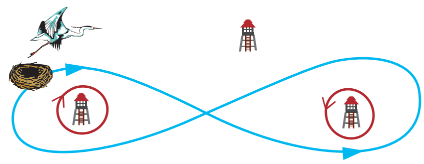
б) В 1001-значном числе найдутся 6 одинаковых цифр, скажем, a. Если вычеркнуть все цифры, кроме этих 6 одинаковых, получится $\overline{aaaaaa} = a \cdot 111111 = a \cdot 1001 \cdot 111 = a \cdot 77 \cdot 13 \cdot 111$.

12. *За день пребывания в Волшебной школе количество знаний увеличивается на столько процентов (по сравнению с предыдущим днём), какое в этот день число. Например, за 31 октября знаний станет больше на 31%, а за 1 ноября – только на 1%. Незнайка учился в Волшебной школе с 10 по 20 октября включительно, а Знайка – с 11 по 21 октября. У кого теперь больше знаний и на сколько процентов, если до Волшебной школы их знания были одинаковыми?*

Ответ: у Знайки, на 10%. При приросте, скажем, на x%, знания умножаются на $1+\frac{x}{100}$. С 11 по 20 октября включительно знания Незнайки и Знайки возросли в одинаковое число раз. Но знания Незнайки ещё возросли 10 октября на 10%, то есть в 1,1 раз, а Знайки – 21 октября в 1,21 раз. Итого Знайка стал умнее Незнайки в 1,21/1,1 =1,1 раз, или на 10%.

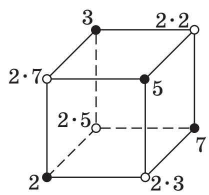
13. *Три орнитолога, каждый на своей башне, следят за одной цаплей. Орнитологи всё время смотрят прямо на цаплю, поворачиваясь вслед за ней. Утром цапля вылетела из гнезда на охоту и вечером вернулась обратно. Могло ли оказаться так, что в результате первый орнитолог сделал ровно один оборот вокруг себя по часовой стрелке, второй – против, а третий – вовсе не сделал ни одного полного оборота?*

Ответ: да, пример см. на рисунке.

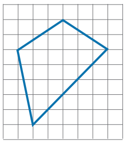


14. *Можно ли записать в каждой вершине куба натуральное число так, чтобы все 8 чисел были различны, но произведение чисел в вершинах каждой грани было одно и то же?*

Ответ: да. Раскрасим вершины, как на рисунке. Запишем в чёрных вершинах 4 различных простых числа, а в белых – удвоенные чёрные числа, лежащие напротив (по диагонали куба). Все числа будут разные, а произведения на гранях будут равны произведению взятых простых и ещё двух двоек.

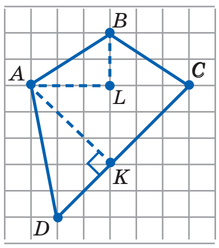


15. *а) На клетчатом листе нарисовали четырёхугольник с вершинами в узлах сетки (см. рисунок). Докажите, что у него один из углов в два раза больше другого.*



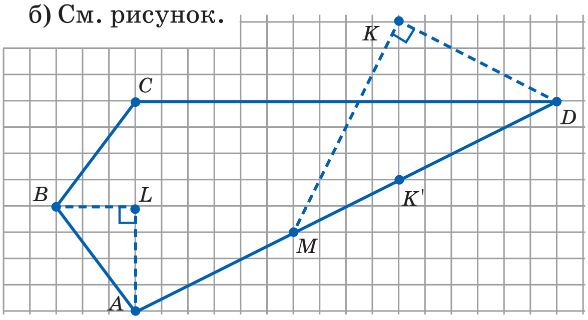
б) Нарисуйте на клетчатом листе выпуклый четырёхугольник с вершинами в узлах сетки, у которого один из углов в четыре раза больше другого.

а) Обозначим наш четырёхугольник $ABCD$ и отметим точки K и L, как на рисунке. Докажем, что угол B в два раза больше угла D.



Треугольники ADK и ABL прямоугольные, первый из них – увеличенный второй (катеты удлинились во столько раз, во сколько диагональ клетки больше её стороны). Значит, углы у них одни и те же, и углы ADK и ABL равны. Но угол ABL – половина угла ABC.

б) См. рисунок.



Докажем, что угол ABC в 4 раза больше угла ADC. Точки K и K' симметричны относительно CD, поэтому угол ADK в 2 раза больше угла ADC. Треугольники MDK и ABL прямоугольные, и первый из них – увеличенный второй, откуда получаем требуемое.

XLII ТУРНИР ГОРОДОВ («Квантик» № 12, 2020)

Осенний тур, 8 – 9 классы

Базовый вариант

1. Ответ: не может. Каждой паре диаметрально противоположных точек соответствуют 98 прямоугольных треугольников, их общее число равно количеству таких пар, умноженному на 98. Но 1000 не делится на 98.

2. Каждый сыграл 7 партий, а всего было сыграно $8\cdot7:2=28$ партий. Так как за год играется 7 партий, кубок разыгрывался 4 раза.

а) Игрок, сыгравший в полуфинале не более одного раза, за 4 года сыграл не более $3+1+1+$ $+1=6$ партий, что противоречит условию.

б) Всего в четырёх финалах было $2\cdot4=8$ мест. Если кто-то не играл в финале, то кто-то другой должен был сыграть в финале как минимум дважды. Но тогда он сыграл не меньше $3+3+1+$ $+1=8$ партий, что противоречит условию.

3. Ответ: при n, не кратном 4. *Стратегия*: оставлять в куче число камней, кратное 4: при n вида $4k+1$ взять один камень, при n вида $4k+2$ – два камня; при n вида $4k+3$ взять p камней, где p – простой делитель числа n вида $4q+3$ (он найдётся, иначе все простые делители n имеют вид $4m+1$, а произведение чисел такого вида имеет такой же вид, а не вид $4k+3$).

Противнику из кучи с числом камней, кратным 4, не удастся взять число камней, кратное 4 (оно не простое), поэтому начинающий и дальше сможет играть по стратегии.

Если же изначально число камней кратно 4, стратегией может воспользоваться второй.

4. Пусть A, B, C – вершины данного треугольника, $AP=a$, $BP=b$, $CP=c$. Пусть F – образ точки P при повороте вокруг A на $60°$, переводящем C в B. Тогда треугольник APF – равносторонний со стороной a, и отрезок PC переходит в отрезок FB при этом повороте, откуда $FB=PC=c$. При этом $AB=d$, $PB=b$, и, значит, треугольник APF вместе с точкой B образуют нужную конфигурацию.

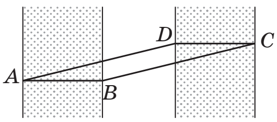
5. Мысленно расположим слонов в виде таблицы, как на рисунке справа. Первым взвешиванием сравниваем друг с другом две первые строки, вторым – два первых столбца.

2	6	1
3	4	5
8	7	

За первое взвешивание мы найдём строку, где должен быть похудевший слон, если он есть, а за второе – столбец. На их пересечении и будет похудевший слон (если в пересечении окажется пустая клетка, то никто не похудел).

Сложный вариант

1. Ответ: нет. Возьмём параллелограмм $ABCD$, как на рисунке справа.



Если бы окружность пересекла его стороны AB и CD, то её центр лежал бы на каком-то перпендикуляре к отрезку AB и на каком-то перпендикуляре к отрезку CD. Но такие перпендикуляры не пересекаются.

2. Ответ: да, верно. Пусть среднее арифметическое удачной пары равно натуральному числу m. Тогда числа из этой пары – одной чётности, и их можно представить в виде $m+n$ и $m-n$, где n тоже натуральное. Так как среднее геометрическое чисел пары – натуральное число, их произведение – полный квадрат: $m^2-n^2=$ $=k^2$, где k натуральное. Тогда $m^2-k^2=n^2$, откуда $m+k$ и $m-k$ – удачная пара с тем же средним арифметическим, причём $k\neq n$ (иначе $m^2=2n^2$, что невозможно в силу иррациональности $\sqrt{2}$).

3. а) Ответ: нет, не сможет. Пусть Вася действует так: если Петя назвал чётное число, Вася его и записывает, а если Петя назвал нечётное – записывает сумму его и всех чисел на доске. Тогда Вася может записать на доску нечётное число (в частности, 5) лишь один раз – когда Петя впервые назвал нечётное число.

б) Ответ: да, сможет. Покажем, как Пете заставить Васю написать на доске число 10:

(1) Если сумма чисел на доске равна 0, Петя называет число 10, и Вася обязан написать 10.

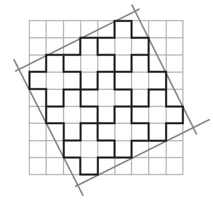
(2) Если сумма чисел на доске равна –5, Петя называет число 10, и Вася либо пишет число 10, либо пишет число 5 и попадает в ситуацию (1).

(3) Если сумма чисел на доске равна 5, Петя называет число –10, и Вася либо пишет число –5 и попадает в ситуацию (1), либо пишет число –10 и попадает в ситуацию (2).

(4) Если сумма чисел на доске равна 10, Петя называет число –15, и Вася либо пишет число –15 и попадает в ситуацию (2), либо пишет число –5 и попадает в ситуацию (3).

Если на доске другая сумма, скажем n, Петя может назвать число $10-n$, и Вася либо напишет число 10, либо попадёт в ситуацию (4). Итак, имея любой набор чисел на доске, мы можем заставить Васю написать 10. Значит, мы сможем заставить его написать 100 десяток.

4. Ответ: можно. Расположим 9 крестов, как на рисунке справа, и опишем вокруг них квадрат.

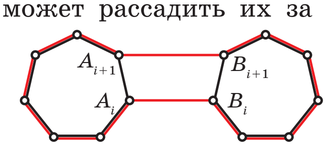


Этот квадрат состоит из 9 крестов (их суммарная площадь равна 45), 8 половинок прямоугольников 1×2 (их суммарная площадь равна 8) и 4 «уголков». Каждый уголок целиком лежит в фигуре, состоящей из половинки прямоугольника 1×2 и половинки клетки, то есть его площадь не больше 1,5, откуда суммарная площадь уголков не больше 6. Тогда площадь квадрата не больше $45+8+6=59$, что меньше 64. Значит, его можно уместить на шахматную доску, а с ним и 9 крестов.

5. Ответ: существуют. Заметим, что 3^3+4^3+ $+5^3=6^3$. Домножив это равенство на 2^3, получим $6^3+8^3+10^3=12^3$. Заменяя 6^3 на сумму из предыдущего равенства, получаем пять кубов, дающих в сумме куб: $3^3+4^3+5^3+8^3+10^3=12^3$. Домножив новое равенство на 2^3 и снова заменяя 6^3 на сумму трёх кубов, получаем 7 кубов, дающих в сумме куб: $3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+16^3+$ $+20^3=24^3$. Действуя далее аналогично, мы сможем получить 99 кубов, дающих в сумме куб.

6. Ответ: при всех нечётных $n>1$. Обозначим через $A_1, A_2, ..., A_n$ гномов за первым столиком, а через $B_1, B_2, ..., B_n$ – за вторым столиком. Будем изображать гномов точками, а если два гнома дружат – соединять точки отрезком.

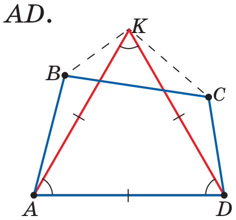
Случай нечётного n. Пусть $n=2k-1$. Стратегия за доброго волшебника: подружить пары гномов (A_i, B_i) и (A_i, B_{i+1}) (здесь мы считаем, что $B_{2k}=B_1$). Очевидно, что добрый волшебник подружил ровно $2n$ пар гномов. Проверим, что при такой стратегии злой волшебник не сможет помешать. Действительно, так как злой волшебник ссорит ровно половину всех дружб, то либо среди пар (A_i, B_i) хотя бы k всё ещё дружат, либо среди пар (A_i, B_{i+1}) хотя бы k всё ещё дружат. Тогда в первом случае найдется i, для которого обе пары гномов (A_i, B_i), (A_{i+1}, B_{i+1}) дружат, и добрый волшебник может рассадить их за стол, как на рисунке: $A_i, B_i, B_{i-1}, ..., B_{i+1}, A_{i+1}, A_{i+2}, ..., A_{i-1}$. Второй случай аналогичен.



Случай чётного n. Вот стратегия злого волшебника. Пусть добрый волшебник подружил

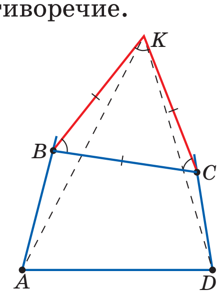
$2n$ пар гномов: провёл $2n$ новых отрезков между точками-гномами. Покрасим гномов за первым столиком в белый и чёрный цвета в шахматном порядке, а за вторым – в красный и синий. У $2n$ новых отрезков $4n$ концов, и тогда найдётся такой цвет – скажем, белый, – что из точек этого цвета выходит суммарно не больше n новых концов. Пусть злой волшебник поссорит все пары друзей, в которых есть гном белого цвета. Тогда единственные оставшиеся друзья любого белого гнома – его старые соседи, и, рассаживая белых гномов, мы рассадим первый стол и замкнём цикл, а рассадить всех не получится.

7. Пусть AD – наибольшая сторона четырёхугольника $ABCD$. По условию, сумма любых двух других сторон не больше AD.



а) Пусть углы A и D оба больше $60°$. Построим на AD равносторонний треугольник AKD во внутреннюю сторону четырёхугольника. Стороны AK и DK выходят из A и D внутрь четырёхугольника, но точка K будет лежать вне (иначе $AB+BC+CD>AK+KD=2AD$, и тогда какие-то две стороны из AB, BC, CD в сумме больше AD, что не так по условию).

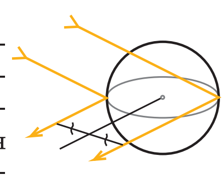
Тогда $\angle BKC>60°$, откуда в треугольнике BKC сторона BC не самая маленькая. Пусть она больше, например, чем BK. Тогда $AB+$ $+BC>AB+BK>AK=AD$ – противоречие.



б) Пусть каждый из углов B и C меньше $120°$. Продлим лучи AB и DC, дополнительные углы будут больше $60°$. Построим на BC равносторонний треугольник BKC во внешнюю сторону четырёхугольника. Тогда угол AKD будет меньше $60°$ (стороны BK и CK «загибаются внутрь» от лучей), и, значит, в треугольнике AKD сторона AD не самая большая. Пусть она меньше, например, чем AK. Тогда $AD<AK<AB+BK=AB+BC$ – противоречие.

ОТРАЖЕНИЕ В ПУЗЫРЕ

(«Квантик» № 12, 2020)



Начнём с того, что изображение на мыльном пузыре не строго симметрично. Оно тем симметричнее, чем дальше от пузыря вы сами и отражающийся объект. Поэтому для простоты рассуждений будем считать, что отражающийся объект далёк и мы далеко. Это значит, что лучи, идущие от объекта (Солнца, например) к пузырю и от пузыря к глазу, можно считать параллельными. Почему мы видим два солнечных блика, симметричных относительно центра пузыря? Пузырь даёт два блика: отражения Солнца в ближней к нам выпуклой поверхности пузыря и в дальней вогнутой. Маленькие кусочки поверхности пузыря в его противоположных точках с большой точностью можно считать параллельными кусочками плоскости. И если одна отражает параллельные солнечные лучи в сторону нашего глаза, то же делает и вторая. Поэтому бликуют симметричные точки пузыря. Они расположены по разные стороны линии нашего взгляда, так что изображение получается перевёрнутым.

СТАЛЬНАЯ ЧЕЛЮСТЬ

• Когда заяц передвигается прыжками, следы задних лап оказываются впереди следов передних лап. Права Лиза – заяц побежал налево.

• Тёплый воздух от костра поднялся вверх и подтопил снег на ветвях ёлки. На ребят сверху могла закапать вода, а могли и комки снега с веток соскальзывать в костёр.

• Друзья привязали к удочке магнит и опустили в лунку. Стальная челюсть притянулась к магниту и её легко достали из воды.

СГИБАНИЯ БУМАГИ

История первая. Отрезки.

1. Ответ: периметр $a+b$, длина $c/2$.

2. Ответ: они равны.

3. Ответ: $(P-Q)/2$.

4. Периметр у ABC – сумма соседних сторон BX и BY прямоугольника, а у CDE– сумма соседних сторон DX и DY, эти суммы равны.

ФРАНСУА РАБЛЕ, ЖОРЖ САНД, АЛЕКСАНДР ДЮМА

Выдумана, конечно, история про Жорж Санд. В ней, по крайней мере, две нелепости: 1) играть, а тем более прекрасно, с длинными ногтями на шестиструнной гитаре невозможно; 2) Шопен, композитор французско-польского происхождения, не стал бы давать пьесе название «ногтюрн», похожее на русское «ноготь», но совершенно не похожее на это слово во французском и польском языках (ongle и paznokieć).

Впрочем, некоторые считают, что история с Рабле тоже выдумана, частично или полностью. Может быть. Однако внутренних противоречий, как в истории с Жорж Санд, в ней нет.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач V тура, с которыми справитесь, не позднее 5 февраля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

V ТУР

21. Слот-машина устроена так: нажимаешь на рычаг, а она случайно выбирает цифру от 0 до 9 на каждом из трёх барабанов. Если выпали три одинаковые цифры, машина выдаёт 5000 рублей, нажатие на рычаг стоит 100 рублей. Но машина сломалась: после выпадения 000 цифры на первом барабане стали выпадать по циклу через 1 (0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, ...), на втором – через 2 (0, 3, 6, 9, 2, ...), на третьем – через 3 (0, 4, 8, 2, ...). Выгодно ли это фирме, поставившей машину?

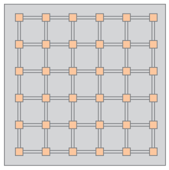


Рис. 1

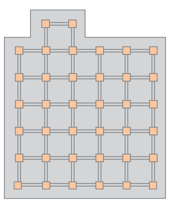


Рис. 2

22. а) В дачном посёлке 36 домиков, соединённых дорожками (рис. 1). Длина каждой дорожки 100 м. Когда в домике заводят кошку, мыши убегают из него и из всех домиков, до которых от него не более 200 м (длина пути считается вдоль дорожек). В каком наименьшем количестве домиков надо завести кошек, чтобы мыши полностью покинули посёлок?

б) Решите ту же задачу, если домиков 38 и они расположены как на рисунке 2.

Авторы: Антон Артюхов (21), Сергей Костин (22), Николай Авилов (23), Игорь Акулич (25)

23. Рома суммировал подряд идущие натуральные числа, начиная с 1, а Поля умножала подряд идущие натуральные числа, тоже начиная с 1. Среди сумм Ромы и произведений Поли есть равные числа, например: $1+2+3=1\cdot2\cdot3$. А может ли ещё какая-то сумма у Ромы оказаться равной какому-то произведению у Поли?

24. Нетрудно нарисовать на клетчатой бумаге треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах – например, прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5. А можно ли нарисовать треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах так, чтобы ни одна его сторона не проходила по линиям сетки?

25. Требуется записать по кругу все натуральные числа от 1 до n в таком порядке, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом. Можно ли это сделать, если:

а) $n=2021$;

б) $n=2022$?

Художник Николай Крутиков

ПОДВОДНЫЕ ЛУЧИ

Обычно мы видим отдельные солнечные лучи, когда солнце сильно загорожено, а свет пробивается через небольшие пустоты, будь то дырки в стене или облаках, между листьями густого дерева. Откуда же берутся такие лучи под водой, если ничто не отбрасывает тень на воду?

Автор Александр Бердников
Фото: deviantart.com, della-stock

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 21001