

**В. В. Прасолов**  
**А. Б. Сосинский**

---

**УЗЛЫ,  
ЗАЦЕПЛЕНИЯ,  
КОСЫ  
И ТРЕХМЕРНЫЕ  
МНОГООБРАЗИЯ**

**МЦНМО**

**1997**

**Прасолов В. В., Сосинский А. Б.**

Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия.  
М.: МЦНМО, 1997. — 352 с.

Эта книга, прежде всего, — введение в замечательные результаты Вогана Джонса и Виктора Васильева об инвариантах узлов и зацеплений и в новые модификации этих инвариантов, включая математическое обоснование инвариантов Джонса — Виттена. Особое внимание уделяется геометрическим аспектам теории. Обсуждаются такие темы, как косы, гомеоморфизмы поверхностей, перестройки трехмерных многообразий (исчисление Кирби), разветвленные накрытия. В двух последних главах строго математически строятся инварианты Джонса — Виттена на основе скейн-алгебр.

В отличие от недавних (зарубежных) монографий, в которых эти инварианты строятся на основе далеко продвинутых математических теорий (квантовые группы, теория представлений), в этой книге от читателя требуется минимальная математическая подготовка.

Многочисленные рисунки помогают яснее представить себе излагаемые геометрические конструкции. Изложение сопровождается задачами, которые позволяют использовать книгу в качестве учебника.

Для научных работников — математиков и физиков-теоретиков. Может быть использована аспирантами и студентами соответствующих специальностей.

ISBN 5-900916-10-3

©В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, 1997  
©МЦНМО, 1997

# Оглавление

<b>Предисловие</b>	<b>5</b>
<b>Глава I. Узлы, зацепления и ленты</b>	<b>11</b>
§1. Топология узлов и зацеплений	11
§2. Трюки с веревками и лентами	24
Комментарии	32
<b>Глава II. Инварианты узлов и зацеплений</b>	<b>34</b>
§3. Полином Джонса	34
§4. Инварианты Васильева	53
Комментарии	66
<b>Глава III. Косы</b>	<b>70</b>
§5. Группа кос	71
§6. Теоремы Александера и Маркова	81
§7. Крашенные косы	91
Комментарии	97
<b>Глава IV. Трехмерные многообразия</b>	<b>100</b>
§8. Разбиение Хегора	101
§9. Разбиение Хегора для многообразий с краем	111
§10. Диаграммы Хегора	113
§11. Линзы	116
Комментарии	122
<b>Глава V. Гомеоморфизмы поверхностей</b>	<b>123</b>
§12. Теорема Дена–Ликориша и ее следствия	123
§13. Доказательство теоремы Дена–Ликориша	134
Комментарии	139
<b>Глава VI. Перестройки трехмерных многообразий</b>	<b>141</b>
§14. Рациональные перестройки сферы по тривиальному узлу	142
§15. Коэффициент зацепления	149
§16. Целочисленные перестройки	154

§17. Снова линзы .....	160
§18. Гомологические сферы .....	163
§19. Исчисление Кирби .....	174
Комментарии .....	184
<b>Глава VII. Разветвленные накрытия</b>	<b>188</b>
§20. Разветвленные накрытия двумерных поверхностей .....	189
§21. Формула Римана–Гурвица .....	194
§22. Разветвленные накрытия трехмерных многообразий .....	202
§23. Трехмерные многообразия как разветвленные накрытия сферы .....	210
§24. Разветвленные накрытия и крапные диаграммы зацеплений .....	225
§25. Кольца Борромео — универсальное зацепление ..	232
Комментарии .....	240
<b>Глава VIII. Skein-инварианты трехмерных многообразий</b>	<b>242</b>
§26. Алгебра Темперли–Либа и другие skein-алгебры .	243
§27. Инвариант Джонса–Венцля .....	253
§28. Инвариантность относительно второго преобразования Кирби .....	260
§29. Инвариантность относительно первого преобразования Кирби .....	267
Комментарии .....	277
<b>Глава IX. Инварианты зацеплений в трехмерных многообразиях</b>	<b>279</b>
§30. Полиномиальные инварианты зацеплений в $\mathbb{R}P^3$ ..	280
§31. Инварианты оснащенных зацеплений в трехмерных многообразиях .....	284
§32. Узлы и физика .....	287
<b>Приложение</b>	<b>299</b>
<b>Решения задач</b>	<b>311</b>
<b>Литература</b>	<b>336</b>
<b>Предметный указатель</b>	<b>347</b>

## Предисловие

Эта книга, прежде всего, элементарное введение в замечательные работы Уогана Джонса и Виктора Васильева об инвариантах узлов и зацеплений и в их последующие модификации и обобщения, включая математическое изложение (в духе Санкт-Петербургской школы) инвариантов Эдварда Виттена, изначально построенных им на физическом уровне строгости. Нашу книгу можно также рассматривать как введение в некоторые наиболее привлекательные геометрические главы трехмерной топологии, в том числе в теорию кос, перестройки («хирургию») трехмерных многообразий и разветвленные накрытия.

В первоначальных работах Джонса и Васильева ([Jon1], [Vas1]) использовалось достаточно много неэлементарных сведений из различных разделов математики: теория представлений, алгебры фон Неймана, след Окнеану, теорема Маркова о косах у Джонса; спектральные последовательности и теория особенностей у Васильева. Последующие работы других авторов привели к решающим упрощениям, так что сегодня полином Джонса от одной переменной для зацеплений и инварианты Васильева для узлов можно определять и изучать совершенно элементарными средствами (исключение составляет лишь доказательство существования инвариантов Васильева). Поэтому обе темы изложены в самом начале книги, в главе II (после краткого введения в геометрическую теорию узлов, содержащуюся в главе I), и вполне доступны студентам-математикам младших курсов, прослушавшим начальный курс топологии.

Нынешнее положение с инвариантами Виттена для зацеплений в трехмерных многообразиях несколько более сложное.

Замечательное первоначальное определение самого Виттена ([Wit2]) помимо того, что оно совсем не элементарно (в него входят идеология калибровочной теории, лангранжианы Черна–Саймонса, интегралы по аффинным связностям и др.), к тому же недостаточно строго для математиков (не существует меры, позволяющей брать интегралы по всем аффинным связностям). В конце книги (глава IX) мы даем математически корректное определение этих инвариантов (полученное в работах Н. Решетихина, В. Тураева, О. Виро и др.), следуя статье У. Ликориша [Lic 4] (правда, не совсем дословно). Этот подход также не прост и требует довольно много предварительного материала (как-то перестройки трехмерных многообразий, исчисление Кирби, алгебры Темперли–Либа и др.); этот материал излагается в промежуточных главах (III–VIII).

Содержание глав III–VIII, однако, никоим образом не следует рассматривать только как подготовительный материал к главе IX: напротив, это — классические и часто удивительно красивые разделы трехмерной топологии. Глава III — введение в теорию кос, включая компьютерно реализуемые результаты о проблеме тождества в группе кос и о теореме Александера о косах, а также некоторые результаты о крашенных косах. Последние обеспечивают естественный переход к описанию гомеоморфизмов поверхностей (теорема Дена–Ликориша) в главе IV, что затем приводит, столь же естественно, к разбиениям Хегора (глава V) и перестройкам трехмерных многообразий (глава VI).

Опишем содержание глав IV–VI подробнее. Разбиение Хегора — это представление трехмерного многообразия в виде объединения двух одинаковых тел с ручками, склеенных по гомеоморфизму их границ. Таким образом, гомеоморфизмы поверхностей кодируют трехмерные многообразия. Эта кодировка достаточно эффективна, ибо гомеоморфизмы поверхностей оказываются композициями комбинаторно описываемых элементарных гомеоморфизмов, называемых скручиваниями Дена (§12). Последнее обстоятельство приводит к другому способу представлений ориентируемых трехмерных многообразий; именно, всякое такое многообразие получается из сферы  $S^3$  переклейкой полноторий: несколько полното-

рий в  $S^3$  (возможно заузленные или зацепленные между собой) вырезаются из сферы, а затем вклеиваются обратно, но по другим гомеоморфизмам граничных торов. Таким образом, любое ориентируемое компактное многообразие  $M^3$  кодируется оснащенный зацеплением, т.е. зацеплением в  $S^3$ , каждая компонента которого снабжена рациональным числом, указывающим соответствующий гомеоморфизм тора; такое кодирование называется хирургическим представлением многообразия  $M^3$  (глава VI). Естественно возникает такой вопрос: когда два различных оснащенных зацепления задают одно и то же многообразие? Ответ прост: тогда и только тогда, когда от одного к другому можно перейти конечной цепочкой элементарных преобразований, называемых операциями Кирби. Соответствующая теория называется исчислением Кирби; она описана в §19.

В отличие от глав III–VI, глава VII, посвященная разветвленным накрытиям, не используется в дальнейшем. Она начинается с изложения теории разветвленных накрытий двумерных поверхностей (очень простая и красивая тема, достойная изучения любым будущим топологом на ранней стадии), а затем в ней систематически излагаются глубокие результаты Дж. М. Монтезиноса, У. Хильдена и их соавторов о накрытиях и трехмерных многообразиях, разветвленных вдоль узлов и зацеплений.

В заключительной главе, кроме инвариантов Виттена, рассказано о полиноме Ю. Добротухиной для зацеплений в трехмерном проективном пространстве (очень простая модификация полинома Джонса) и приводится краткий обзор очень модной ныне тематики — связей теории узлов и физики.

\* \* \*

Следует отметить, что именно связь между физикой и теорией инвариантов узлов привела к резкому повышению интереса к этой теории со стороны нетопологов и математических физиков. В частности, эта связь проявляется в подходе Владимира Дринфельда к квантовым группам, с помощью которого Владимир Тураев и др. систематически строят инварианты узлов (через представления алгебр Ли), к интегралу Максима Концевича, явно выражающему инварианты Ва-

сильева (посредством связности Книжника–Замолодчикова и биалгебр Гауссовых диаграмм), и к категорному подходу Майкела Атья к топологическим квантовым полевым теориям (через скобку Кауфмана). Эти темы новы, неэлементарны и уже изложены в нескольких монографиях ([Tur1], [Ati1], [BM], [Fu], [Kas], [CP], [Lus]) и потому не обсуждаются здесь.

Много других важных разделов трехмерной топологии также не попали в нашу книгу. Отбирая ее содержание, кроме материала, необходимого для построения инвариантов Виттена, мы отдавали предпочтение тем разделам, которые технически не очень сложны и которые нас привлекли с эстетической точки зрения. Но в трехмерной топологии есть много важных тем, совсем не затронутых в этой книге. В частности, мы практически даже не упоминаем фундаментальные результаты С. Новикова, С. Матвеева, У. Тёрстона, М. Фридмана, Д. Габай, А. Кассона, У. Джеко, В. Хакена, Ф. Вальдхаузена, Дж. Рубинштейна, А. Томпсон и др.

\* \* \*



Мы пытались сделать наше изложение по возможности замкнутым, а также избегать частых внутренних ссылок на предыдущие главы. Приложение в конце книги преследует первую цель. В нем кратко представлены нужные нам основные понятия и результаты начального курса топологии (с точными ссылками на доступные источники с подробным изложением). К сожалению, в двух важных случаях мы не смогли найти достаточно элементарных доказательств (для теоремы существования инвариантов Васильева и для достаточного условия в теореме Кирби) и попросту опустили их.

Что касается второй цели, достичь полной независимости каждой главы от предшествующих было, конечно, невозможно. Однако мы старались минимизировать число внутренних ссылок и делать их только на конкретные, легко находимые места текста, в расчете на то, что некоторые торопливые читатели смогут начать чтение не с первой главы, а с одной из последующих. Но и это не всюду нам удалось: вряд ли читатель сможет понять главу VI, не прочитав сначала главу V, или уследить за изложением в важном §31 главы IX, не прочитав перед этим большую часть главы VIII.



Тем не менее, имеется несколько способов чтения книги, кроме последовательного ее изучения от начала до конца. Для элементарного введения в теорию инвариантов узлов, следует прочитать главы I–III и §30 из главы IX. Для краткого введения в некоторые геометрические главы маломерной топологии, мы предлагаем прочесть главы I, III–V и §§20–21 в главе VII; для более полного ознакомления с этим материалом можно добавить несколько параграфов из глав VI и VII. Торопливый читатель, желающий быстро ознакомиться с новыми инвариантами, может начать с главы II (возвращаясь к главе I по мере надобности), а затем перейти к главам VIII и XI (где ссылки на главы V и VI, скорее всего, заставят его вернуться к более основательному чтению этих глав).

\* \* \*

Читатель, конечно, обратил внимание на большое число рисунков в этой книге. Они служат не только зрительными иллюстрациями к тексту, но во многих случаях (например, при определениях и доказательствах) заменяют его, позволяя нам избежать многословных объяснений. Предостерегаем читателя: вряд ли он сумеет понять некоторые ключевые места в изложении без внимательного рассмотрения рисунков (иногда при этом оказывается полезным пользоваться карандашом и ластиком). После некоторых колебаний мы решили нарисовать картинки от руки, оставляя за компьютерной графикой лишь входящие в текст и в выключные формулы маленькие стандартные диаграммы (вроде  или ).

Другая важная особенность нашей книги, также требующая активного участия читателя, — это наличие многочисленных задач. Решения (иногда в виде ответов или указаний) приводятся в конце книги, но мы надеемся, что читатель не станет лишать себя удовольствия решить их самостоятельно.

Наконец, заметим, что каждая глава (кроме последней) заканчивается небольшим разделом под названием «Комментарии». В каждом таком разделе содержатся краткие и неформальные исторические замечания, указываются наши источники, иногда приводятся нерешенные задачи. Мы подчеркиваем, что эти исторические сведения не претендуют на пол-

ноту. Они не являются результатом систематического изучения литературы и, конечно, довольно субъективны. С другой стороны, мы старались не воспроизводить услышанные или опубликованные сведения, не подтвержденные конкретными ссылками.

\* \* \*

Началом этой книги послужил семинар, проведенный авторами совместно с Сергеем Чмутовым в Независимом Московском Университете в 1993–1994 гг.; записки этого семинара были опубликованы в форме записей лекций издательством НМУ (см. [PS]) и составили первую версию этого текста. Авторы благодарны всем участникам семинара, особенно С. Чмутову, чей доклад лег в основу §4. Нам приятно выразить нашу благодарность Виктору Васильеву: присутствие на его докладах, полезные разговоры, а также его организационная поддержка этой книги существенно помогли в ее завершении. Мы благодарны Михаилу Виноградову, создавшему диаграммные шрифты `knot.tex`, позволявшие нам в автоматическом режиме включать в текст и в `tex`'овские формулы разнообразные диаграммы, Елене Ефимовой за ее помощь с набором `tex`'овских формул, Игорю Бугаенко за набор русского текста и Ольге Сипачевой за создание макета и обработку рисунков.

Пока эта книга писалась (сначала по-русски, затем по-английски, затем снова по-русски), оба автора получали поддержку от РФФИ (проект № 95-01-00846), грантов Американского Математического Общества (AMS fSU grant), грантов Сороса (ISF № MQO-000 в 1994, № MQO-300 в 1995). Ее издание на русском языке стало возможным благодаря проекту РФФИ № 96-01-14127.

# Глава I

## Узлы, зацепления и ленты

Эта глава представляет собой введение в одну из классических тем трехмерной топологии — теорию узлов и зацеплений. В §1 мы определяем и изучаем эти объекты с геометрической точки зрения, а §2 посвящен их приложениям в реальной жизни. Эти приложения можно назвать физическими (желая придать им серьезный смысл), а можно назвать их описанием фокусов с лентами и веревками для фокусника-любителя (желая подчеркнуть их неожиданный и занимательный характер).

### §1. Топология узлов и зацеплений

**1.1.** *Узел* можно представлять себе как тонкую запутанную веревку в пространстве, концы которой соединены. (Строгое определение будет дано в пункте 1.2.) Простейший (незапутанный) узел изображен на рис. 1.1 (а); его называют *тривиальным* узлом. На рис. 1.1 (b), (c) изображены нетривиальные узлы. Их называют соответственно *трилистник* и *восьмерка*.

*Зацепление* можно представлять как несколько веревок, у каждой из которых концы соединены. При этом веревки могут быть запутаны и зацеплены друг за друга. Зацепление, состоящее из нескольких тривиальных узлов, не зацепленных друг за друга, называют *тривиальным* зацеплением.

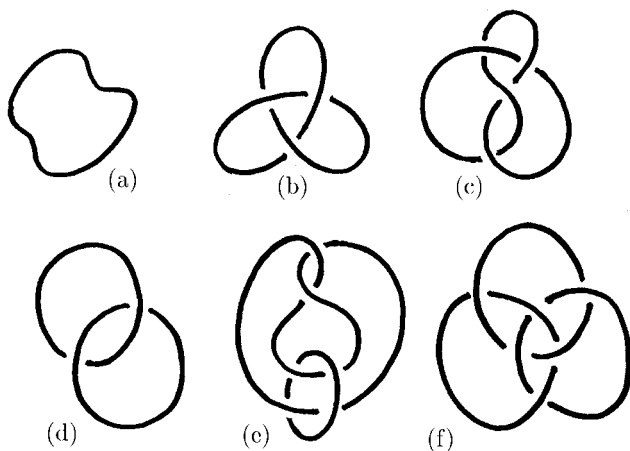


Рис. 1.1

На рис. 1.1 (d)–(f) изображены три нетривиальных зацепления. Их называют соответственно *зацепление Хопфа*, *зацепление Уайтхеда* и *кольца Борромео*. Первые два зацепления были известны давно (их, в частности, использовал Гаусс). Названы они в честь знаменитых топологов Хейнца Хопфа и Дж. Уайтхеда, которые использовали их в своих замечательных топологических конструкциях. Название третьего зацепления связано с тем, что такая фигура нарисована на гербе знатного итальянского рода Борромео. Один из наиболее известных представителей этого рода, Карло Борромео (1538–1584), причислен к лику святых католической церкви; его почитают как целителя от чумы. Кольца Борромео интересны тем, что любые два из этих трех колец незацеплены.

Для изображения узлов и зацеплений удобно использовать (как мы уже фактически начали делать) их ортогональные проекции на плоскость. При этом плоскость проекции нужно выбирать так, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) проекция касательной к зацеплению в любой точке представляет собой прямую (т.е. проекция касательной не вырождается в точку);

(2) ни в какую точку плоскости не проецируется более двух различных точек зацепления;

(3) множество *перекрестков* (точек плоскости, в которые проецируются две различные точки зацепления) конечно и проекции касательных в соответствующих перекрестку двух точках зацепления не совпадают.

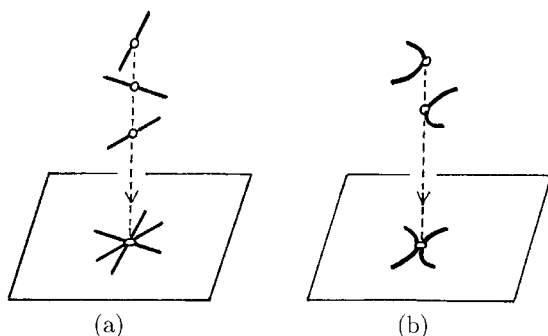


Рис. 1.2

В частности, запрещены следующие две ситуации: во-первых, ситуация, когда точки трех различных ветвей зацепления проецируются в одну и ту же точку (как на рис. 1.2 (а)), а во-вторых, ситуация, когда проекции двух ветвей касаются (рис. 1.2 (b)).

Интуитивно ясно, что малым шевелением зацепления можно добиться выполнения условий (1)–(3). Поэтому будем считать, что проекция зацепления состоит из нескольких гладких кривых с трансверсальными пересечениями и самопересечениями, причем над каждым перекрестком расположены две ветви зацепления — *проход* (нижняя ветвь) и *переход* (верхняя ветвь).

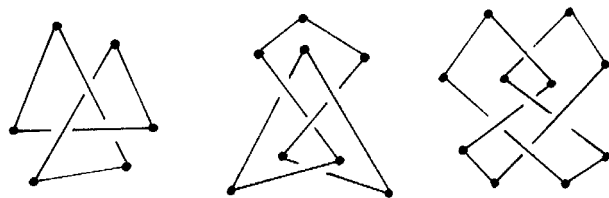


Рис. 1.3

**1.2. Определение.** Теперь мы готовы дать формальное определение узлов и зацеплений, а также их эквивалентности. Наиболее прост следующий подход. Назовем *полигональным узлом* произвольную замкнутую несамопересекающуюся ломаную в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Примеры полигональных узлов изображены на рис. 1.3. *Полигональное зацепление* определяется аналогично. Зацепления, изображенные на рис. 1.1, без затруднений можно преобразовать в полигональные зацепления.

Чтобы определить эквивалентность узлов (зацеплений), введем понятие *элементарного преобразования*. Предположим, что стороны  $AC$  и  $CB$  треугольника  $ABC$  являются звеньями полигонального зацепления  $L$ , причем  $L$  не пересекает треугольник  $ABC$  ни в каких других точках. Заменяем два звена  $AC$  и  $CB$  одним звеном  $AB$ , получив таким образом новое зацепление  $L_1$  (рис. 1.4). Два зацепления (в частности, два узла)  $K$  и  $K'$  называют *эквивалентными*, если их можно соединить последовательностью зацеплений  $K_0 = K, K_1, \dots, K_n = K'$ , в которой каждые два соседних зацепления получаются друг из друга элементарным преобразованием описанного выше вида (или обратным ему).

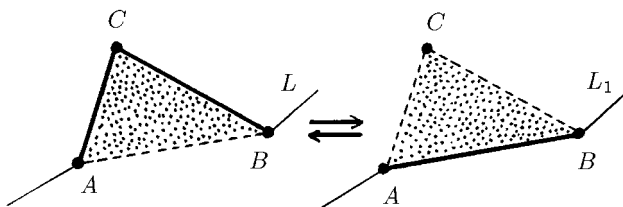


Рис. 1.4

Теперь, когда у нас есть строгое определение зацепления и эквивалентности зацеплений, можно доказать выполнимость условий (1)–(3) из пункта 1.1. В самом деле, для полигонального зацепления условие (3) выполняется автоматически. Если условие (1) нарушается для какого-либо звена, можно слегка сдвинуть один из его концов. Наконец, если проекция какого-либо звена проходит через точку пересечения двух других звеньев, то проекцию этого звена можно сдвинуть с этой точки, слегка пошевелив конец звена.

Понятие полигонального узла не вполне соответствует на-

глядному представлению об узле как веревке с соединенными концами. Этому представлению лучше соответствует понятие гладкого узла. *Вложением окружности*  $S^1$  в  $\mathbb{R}^3$  назовем непрерывное отображение  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , при котором разные точки окружности переходят в разные точки пространства. *Гладким узлом* называют образ окружности при бесконечно дифференцируемом вложении  $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$  с ненулевым дифференциалом, т.е. при таком вложении, что

$$\left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \neq 0$$

для всех точек окружности. Два гладких узла  $K_0$  и  $K_1$  называют *эквивалентными*, если существует семейство  $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \in [0, 1]$ , диффеоморфизмов, гладко зависящих от  $t$ , для которого  $f_0$  — тождественный диффеоморфизм, а  $f_1$  переводит  $K_0$  в  $K_1$ . (Под «гладкой зависимостью» подразумевается то, что отображение  $F : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданное формулой  $F(x, t) = f_t(x)$ , дифференцируемо.) Семейство диффеоморфизмов  $f_t$  называют *изотопией*, связывающей узлы  $K_0$  и  $K_1$ . По этой причине эквивалентные гладкие узлы называют *изотопными*.

**Замечание.** Можно доказать, что для двух изотопных узлов, имеющих общую дугу, существует соединяющая их изотопия, оставляющая неподвижными все точки некоторой окрестности общей дуги. Мы не будем доказывать этот факт (см. [BZ]).

Гладкие зацепления и изотопность зацеплений определяют аналогично.

На интуитивном уровне изотопия соответствует деформации узла. Если узел деформируется в вязкой среде, то при движении он увлекает за собой близкие точки среды. Это соответствует тому, что изотопия узла  $K_0$  в узел  $K_1$  индуцирует диффеоморфизм  $\mathbb{R}^3$  на себя, переводящий  $K_0$  в  $K_1$ . В частности, это означает, что дополнения узлов, т.е. множества  $\mathbb{R}^3 \setminus K_0$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$  гомеоморфны. Аналогичным образом дополнения изотопных зацеплений гомеоморфны. Обратное утверждение для зацеплений неверно: существуют неизотопные зацепления, дополнения которых гомеоморфны. Пример таких зацеплений приведен в §12 (задача 12.4). С другой стороны, для узлов изотопность эквивалентна гомеоморфности

дополнений. Это трудная теорема; она была доказана лишь в 1989 г. (см. [GL]).

**1.3.** Возникает вопрос, эквивалентны ли два подхода (полигональный и гладкий) к теории узлов и зацеплений. Можно доказать, что эти подходы действительно приводят к одной и той же теории, т.е. имеется естественное взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности полигональных зацеплений и классами эквивалентности гладких зацеплений. Мы не будем доказывать этот факт (см., например, [BZ, Prop.1.10]), но будем использовать оба подхода, не делая между ними различий.

**1.4.** Вместо полигонального или гладкого подхода возможен также чисто топологический подход к узлам и зацеплениям. При этом они определяются с помощью непрерывных (без каких-либо дополнительных условий типа гладкости или полигональности) вложений окружности. Но этот подход приводит к совсем другой теории. В самом деле, как гладкий, так и полигональный узел можно задать диаграммой с конечным числом перекрестков. Но существуют топологические вложения  $S^1$  в  $\mathbb{R}^3$ , которые нельзя задать диаграммой с конечным числом перекрестков. В частности, такие узлы не изотопны гладким узлам. Топологическое вложение  $S^1$  в  $\mathbb{R}^3$  называют *ручным*, если оно изотопно гладкому узлу (или, что то же самое, полигональному узлу). В противном случае узел называют *диким*. Примеры диких узлов, принадлежащие Э.Артину и Р.Фоксу (см. [AF]), изображены на рис. 1.5.

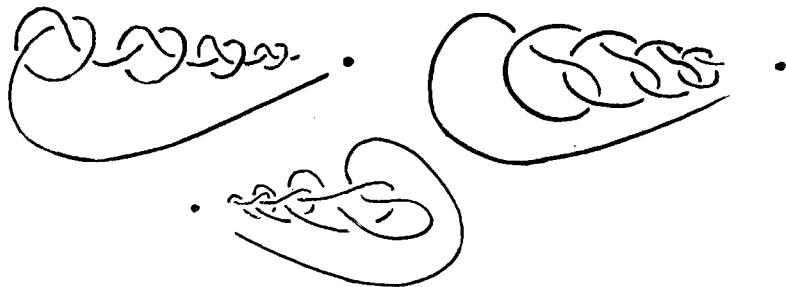


Рис. 1.5

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с ручными узлами и зацеплениями. Но один пример использования диких



узлов для доказательства теоремы о ручных узлах заслуживает упоминания.

*Композицией* или *связной суммой* узлов  $K_1$  и  $K_2$  называют веревку, на которой завязан сначала узел  $K_1$ , а затем узел  $K_2$  (такое наглядное описание несложно превратить в математическое определение, взглянув на рис. 1.6).

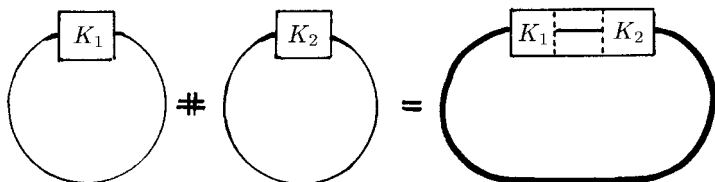


Рис. 1.6

Композицию узлов  $K_1$  и  $K_2$  обозначают  $K_1\#K_2$ . Эта операция коммутативна в следующем смысле.

**Задача 1.1.** Докажите, что узлы  $K_1\#K_2$  и  $K_2\#K_1$  изотопны. Более того, можно считать, что изотопия оставляет неподвижной «внешнюю часть» составного узла (на рис. 1.6 она изображена жирной линией).

**1.5. Теорема.** Если узел  $K_1$  нетривиален, то для любого узла  $K_2$  связная сумма  $K_1\#K_2$  тоже нетривиальна.

*Доказательство.* Предположим, что узел  $K_1\#K_2$  тривиален. Тогда существует изотопия  $f_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , для которой  $f_0 = id$  и  $f_1$  переводит узел  $K_1\#K_2$  в тривиальный узел  $K_0$ . Согласно замечанию в 1.2 можно считать, что при этой изотопии остаются неподвижными точки, расположенные вне куба  $C$  (см. рис. 1.7 (a)). Воспользовавшись результатом задачи 1.1, получим изотопию  $g_t$ , переводящую узел  $K_2\#K_1$  в тривиальный узел  $K_0$  и оставляющую неподвижными точки, расположенные вне куба  $C'$  (рис. 1.7 (b)).

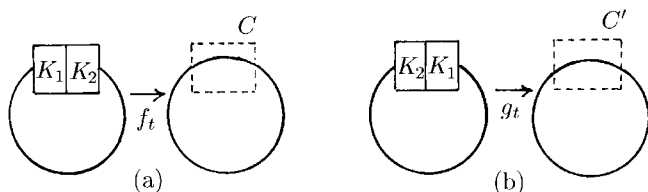


Рис. 1.7

Рассмотрим теперь узел  $W$ , изображенный на рис. 1.8 (а); этот узел, возможно, дикий. По-другому его можно представить так, как показано на рис. 1.8 (b). Рассмотрим изотопию  $F_t$ , которая оставляет неподвижными все точки вне кубов  $C_i$ , а внутри каждого из этих кубов устроена так же, как устроена изотопия  $f_t$  внутри куба  $C$ . Эта изотопия переводит узел  $W$  в тривиальный узел  $K_0$ . С другой стороны, узел  $W$  можно представить и так, как показано на рис. 1.8 (c). Рассмотрим изотопию  $G_t$ , которая оставляет неподвижными все точки вне кубов  $C'_j$ , а внутри каждого из этих кубов устроена так же, как устроена изотопия  $g_t$  внутри куба  $C'$ . Эта изотопия переводит узел  $W$  в узел  $K_1$ . Таким образом,  $K_1 \sim W \sim K_0$ , т.е. узел  $K_1$  тривиален, что противоречит условию теоремы. Это противоречие показывает, что узел  $K_1 \# K_2$  не тривиален  $\square$

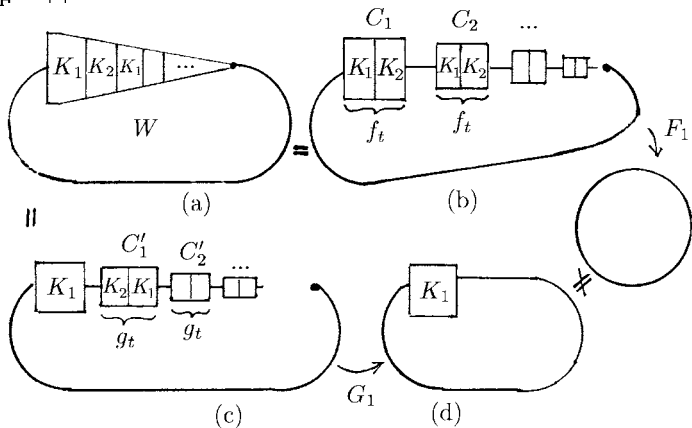


Рис. 1.8

**1.6.** Две диаграммы полигональных зацеплений называют эквивалентными или плоско изотопными, если они получаются друг из друга конечной последовательностью преобразований, изображенных на рис. 1.9.

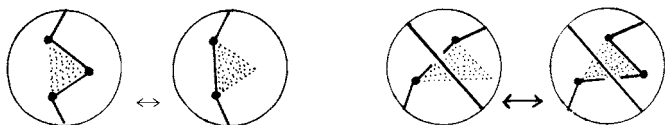


Рис. 1.9

Обратите внимание, что эти преобразования не изменяют число перекрестков диаграммы. Поэтому, в частности, преобразование, изображенное на рис. 1.10, не является плоской изотопией. Тем не менее, это преобразование переводит одно зацепление в эквивалентное ему (изотопное в пространстве) зацепление, потому что второе зацепление получается из первого элементарным преобразованием — заменой двух звеньев  $AB$  и  $BC$  одним звеном  $AC$ .

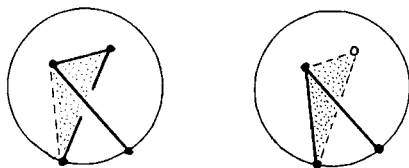


Рис. 1.10

Плоскую изотопию можно определить и для диаграмм гладких узлов (с помощью аналогичных гладких преобразований). В процессе плоской изотопии не могут возникать следующие ситуации:

- 1) появляется новый перекресток или исчезает старый перекресток;
- 2) проекции двух ветвей зацепления касаются друг друга;
- 3) точки трех различных ветвей зацепления проецируются в одну и ту же точку.

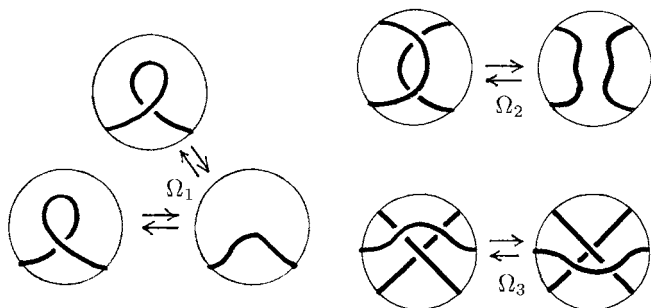


Рис. 1.11

Эти запрещенные (согласно определению плоской изотопии) ситуации возникают при пространственных изотопиях зацеплений, изображенных на рис. 1.11. Соответствующие

преобразования называют *первым*, *вторым* и *третьим преобразованиями Рейдемейстера* и обозначают  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Эти преобразования играют важную роль, потому что они, в некотором смысле, сводят пространственную изотопию к плоской. А именно, справедливо следующее утверждение.

**1.7. Теорема Рейдемейстера.** *Две диаграммы соответствуют изотопным зацеплениям тогда и только тогда, когда их можно получить одну из другой с помощью конечного числа преобразований Рейдемейстера и плоских изотопий.*

*Доказательство.* В одну сторону доказательство теоремы очевидно. В самом деле, без труда проверяется, что любое преобразование Рейдемейстера (см. рис. 1.11) и преобразования, определяющие плоскую изотопию (см. рис. 1.9), можно представить в виде композиции нескольких элементарных преобразований (см. рис. 1.4 в пункте 1.2).

Предположим теперь, что два (полигональных) зацепления с данными диаграммами изотопны в пространстве. Согласно определению пространственной изотопии полигональных зацеплений достаточно рассмотреть случай, когда одно зацепление получается из другого элементарным преобразованием  $[AB] \mapsto [AC] \cup [CB]$ .

Можно считать, что звенья  $[DA]$  и  $[BE]$ , выходящие из концов отрезка  $[AB]$  не пересекают внутренность треугольника  $ABC$ . В самом деле, пусть, например, звено  $[DA]$  входит внутрь треугольника  $ABC$ . Выберем тогда на отрезке  $[AC]$  вблизи точки  $A$  точку  $A'$  и сделаем преобразование  $\Omega_1$ , как показано на рис. 1.12 (b). В результате получим новый треугольник  $A'BC$ , причем звено, выходящее из точки  $A'$  расположено вне этого треугольника.

Отметим теперь, что компоненты пересечения внутренности треугольника  $ABC$  с  $L_0$ , где  $L_0$  — проекция нашего зацепления  $L$  на плоскость  $ABC$ , бывают двух типов: *верхние* и *нижние*, т.е. соответствующие им ветви зацепления  $L$  расположены над или под плоскостью  $ABC$ . (Напомним, что согласно определению элементарного преобразования внутри треугольника  $ABC$  нет точек зацепления  $L$ .)

Разобьем треугольник  $ABC$  на мелкие треугольники (стороны которых не содержат вершин  $L_0$ ) следующих четырех

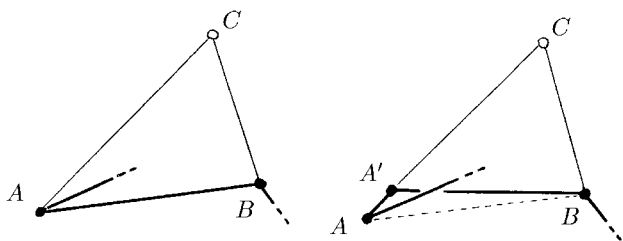


Рис. 1.12

типов (см. рис. 1.13). Треугольник типа I содержит ровно один перекресток  $L_0$  и ветви  $L_0$  пересекают ровно две стороны этого треугольника. Треугольник типа II содержит ровно одну вершину  $L_0$  и части выходящих из нее звеньев. Треугольник типа III содержит часть ровно одного звена  $L_0$  и не содержит вершин. Треугольник типа IV ничего не содержит, т.е. пересечение его внутренности с  $L_0$  пусто. Такая триангуляция треугольника  $ABC$  строится следующим образом. Сначала для каждого перекрестка и для каждой вершины  $L_0$  строим попарно непересекающиеся треугольники типов I и II, а затем оставшуюся часть треугольника  $ABC$  разрезаем на треугольники типов III и IV.

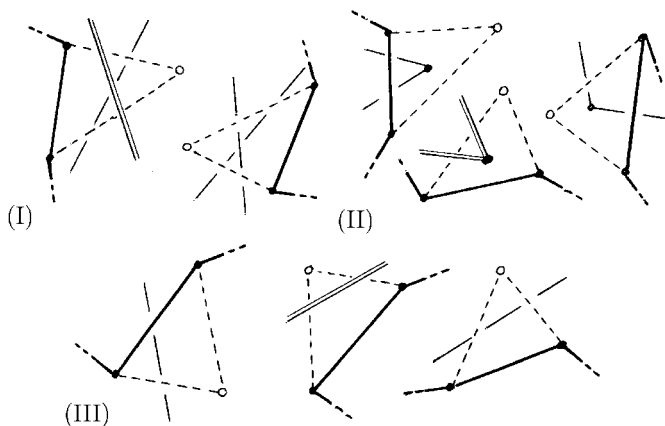


Рис. 1.13

Теперь вместо исходного элементарного преобразования для треугольника  $ABC$  мы будем последовательно совершать элементарные преобразования для маленьких треугольников, начиная со стороны  $[AB]$  и двигаясь к  $[AC] \cup [CB]$ . При этом следует помнить, что все ветви зацепления  $L$  располагаются либо над, либо под этими треугольниками.

Из рис. 1.13 видно, что элементарное преобразование для треугольника типа I соответствует преобразованию Рейдемейстера  $\Omega_3$ ; для треугольника типа II —  $\Omega_2$  или плоской изотопии; для треугольника типа III —  $\Omega_2$  или плоской изотопии; для треугольника типа IV — плоской изотопии. Это завершает доказательство.  $\square$

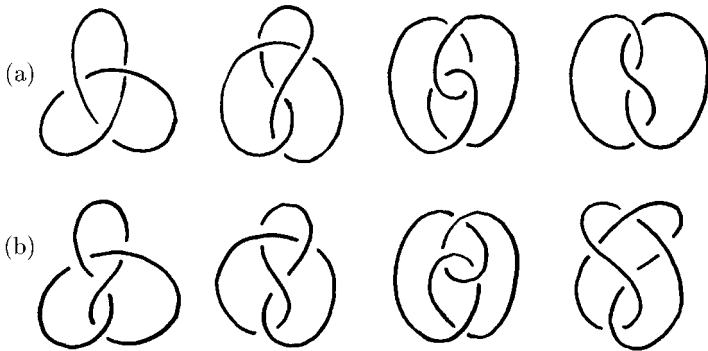


Рис. 1.14

**Задача 1.2.** а) Докажите, что все узлы, изображенные на рис. 1.14 (а), попарно изотопны.

б) Докажите, что все узлы, изображенные на рис. 1.14 (б), попарно изотопны.

**Задача 1.3.** Докажите, что все двухкомпонентные зацепления, изображенные на рис. 1.15, попарно изотопны (т.е. все эти диаграммы изображают зацепление Уайтхеда).

**Задача 1.4.** Узел называют *зеркальным*, если он изотопен своему зеркальному отражению (т.е. образу при симметрии относительно плоскости). Докажите, что узел восьмерка зеркален. (Как мы увидим в §3, трилистник не зеркален, но по-

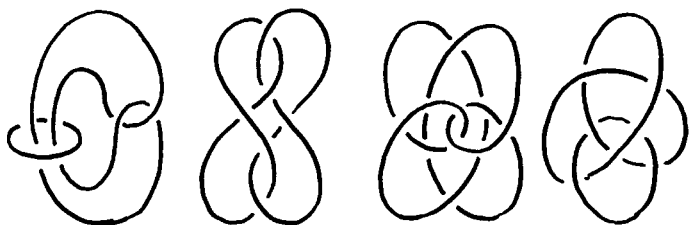


Рис. 1.15



Рис. 1.16

ка что мы не можем доказать этот факт, как и большинство других утверждений «о несуществовании».)

**Задача 1.5.** Ориентированный узел (т.е. узел с выбранным на нем направлением, обычно указываемом стрелкой) называют *обратимым*, если он изотопен самому себе с обратной ориентацией. Докажите, что трилистник обратим, т.е. два ориентированных узла, изображенных на рис. 1.16 (а), получаются друг из друга с помощью преобразований Рейдемейстера и плоских изотопий.

**1.8. Арифметика узлов.** Узел называют *простым*, если он не тривиален и его нельзя представить в виде композиции двух нетривиальных узлов. Трилистник и восьмерка — простые узлы, а два изображенных на рис. 1.17 узла — *составные* (т.е. не простые). Несмотря на то что изотопические классы узлов не образуют группу относительно композиции — связной суммы (нет обратного элемента, см. теорему 1.5), они обладают достаточно интересными арифметическими свойствами. В частности, представление любого нетривиального узла в виде композиции простых узлов существует и единственно (с точностью до порядка). Таким образом, узлы образуют полугруппу, изоморфную мультипликативной полугруппе неотрицательных целых чисел (но этот изоморфизм

не канонический, поскольку на множестве узлов нет канонического линейного порядка).

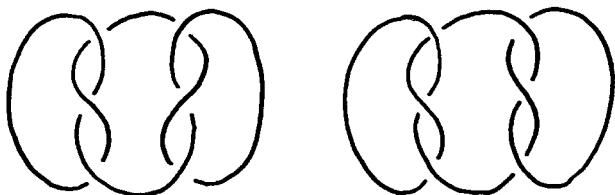


Рис. 1.17

Мы не будем доказывать теорему о разложении узла на простые множители (см. [Sch] или [CF]).

**Замечание.** Для многомерных узлов (т.е. вложений  $S^n$  в  $\mathbb{R}^{n+2}$ ) тоже можно определить понятие простого узла, но в этом случае представление узла в виде композиции простых узлов не всегда единственно (см. [Kea]). Желающим познакомиться с теорией многомерных узлов мы советуем для начала обратиться к работам [Zee], [FM], [Bri].

## §2. Трюки с веревками и лентами

Этот параграф написан в стиле, более подходящем инструкции для фокусников, нежели научной монографии. Это, однако, не означает, что обсуждаемые здесь факты общеизвестны или тривиальны. Наоборот, одни из наиболее глубоких и таинственных свойств трехмерного пространства появляются в этом параграфе в облике экспериментальных фактов о шнурах, веревках, лентах, ремнях и т.п.

Формально говоря, этот параграф не содержит сведений, необходимых для изучения последующих глав. Но он дает нечто вроде наглядного основания для некоторых важных моментов математических теорий, развиваемых в них.

**2.1. Фокус с веревкой.** На стол кладется незаузленная веревка длиной около полуметра (вполне годится шнурок от ботинок). Фокусник предлагает любому из присутствующих взять веревку за концы и завязать на ней узел, не отпуская



концов (рис. 2.1(a)). Когда все зрители придут к выводу, что это невозможно, он гордо скрещивает на груди руки, наклоняется над столом (со скрещенными руками), берет в руки концы веревки и резко разводит руки в стороны (рис. 2.1(b)–(d)). На веревке появился маленький трилистник!

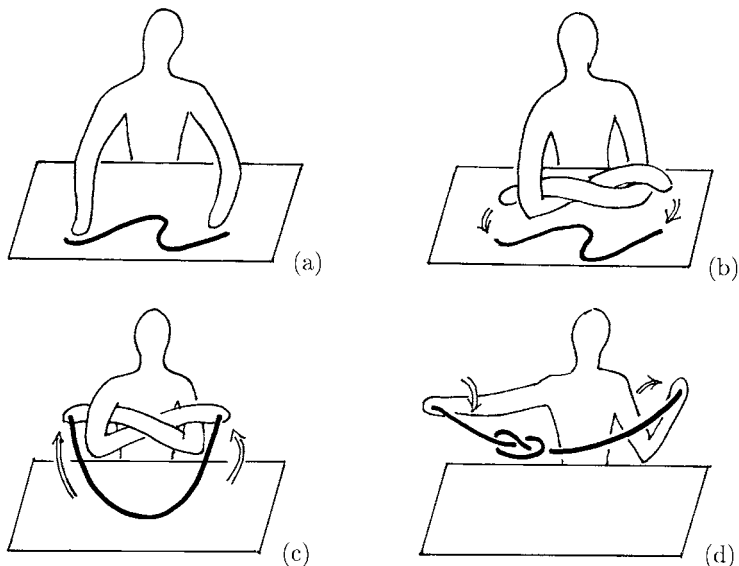


Рис. 2.1

В этом давно известном фокусе для тополога нет ничего особо загадочного. Этот фокус иллюстрирует коммутативность операции связной суммы узлов, а именно,  $K \# O = O \# K$ , где  $K$  — трилистник (он сначала представлен скрещенными руками фокусника, а затем веревкой с узелком), а  $O$  — тривиальный узел (он сначала представлен веревкой без узелка, а затем фокусником с разведенными в стороны руками). Схематично это изображено на рис. 2.2 (a)–(d).

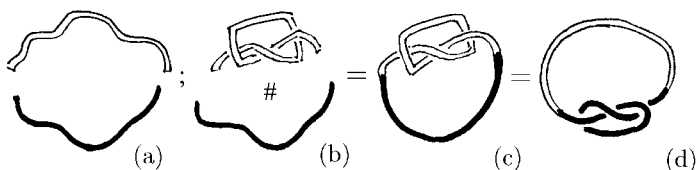


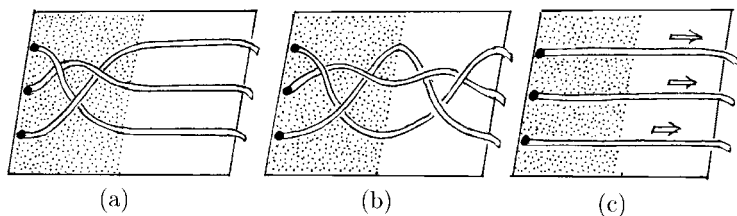
Рис. 2.2

**2.2. Развязывание узлов и расплетение кос.** После того как показан фокус с веревкой, можно перейти к другому эксперименту. Фокусник кладет на стол веревку (на которой остался маленький узелок) и предлагает желающим взять веревку за концы и развязать узел, не отпуская концов. Обычно за этим следуют тщетные попытки развязать узел, всячески скрещивая и извивая руки. Но единственный результат этих стараний — смех зрителей.

Разумеется, читатель уже успел понять, что все эти попытки заранее обречены на провал в силу теоремы 1.5, которая как раз и утверждает, что нетривиальный узел нельзя развязать, беря его связную сумму с другим узлом.

Затем фокусник может продемонстрировать следующую версию того же самого фокуса. Веревка (на которой все еще остается упрямый трилистник) кладется на стол и один из ее концов закрепляется на столе скотчем. После этого фокусник предлагает желающим попытаться завязать на свободном конце веревки узел так, чтобы он «уничтожил» уже имеющийся узел (последний нельзя трогать в процессе завязывания нового узла, но он должен развязаться, когда веревку потянут за свободный конец).

Как правило, в ответ на это достаточно разумные люди, наученные предыдущим вариантом фокуса, возразят, что это невозможно (и будут правы!). Такая реакция, однако, не разочарует фокусника, поскольку она подготавливает почву для следующего фокуса — расплетения косы. Он делается так.



**Рис. 2.3**

Концы трех веревок закреплены скотчем на столе и заплетены, как показано на рис. 2.3 (а) или еще более сложным

образом. Вызов тот же самый, что и в предыдущем фокусе: требуется заплести косу из свободных частей веревок (не трогая уже заплетенную косу) так, чтобы она уничтожила заплетенную косу. Аудитория, не знакомая с этим фокусом, как правило, снова скажет, что это невозможно. Тогда фокусник (заранее натренировавшийся) быстро заплетает требуемую «уничтожающую косу», тянет веревки за концы — и обе косы исчезли (рис. 2.3 (b)–(c)).

С математической точки зрения два последних фокуса интерпретируют тот факт, что относительно композиции косы образуют группу (в частности, у каждой косы есть обратная коса), а узлы не образуют группу (более того, ни у какого нетривиального узла нет обратного узла). Мы отложим объяснение взаимоуничтожения кос до главы III, в которой дается математическое определение кос и доказываются их основные свойства.

**2.3. Трюк с ремнем.** Это один из наиболее известных топологических трюков. Его можно продемонстрировать следующим образом. Возьмите ремень (который не должен быть ни слишком жестким, ни слишком коротким) и положите его на стол так, чтобы он образовал петлю (рис. 2.4 (a)). Затем возьмите ремень за концы и разведите их в стороны так, чтобы ремень туго натянулся. Что при этом произойдет? Неожиданным образом (если, конечно, вы не делали этого раньше) посередине ремень закручивается на полный оборот на  $360^\circ$  (рис. 2.4 (b)). И наоборот, закрученный на полный оборот ремень можно положить на стол (не вращая концы), сделав при этом из него петлю.

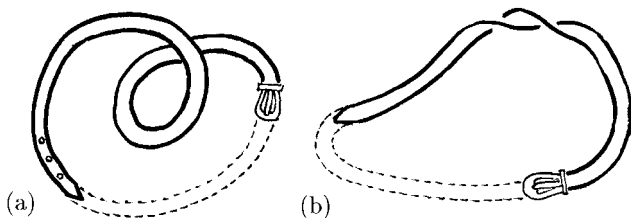
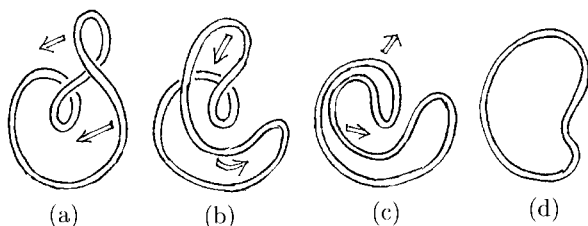


Рис. 2.4

Концы ремня не эквивалентны (на одном из них есть пряжка), поэтому можно различать «левосторонние» и «правосторонние» закручивания ремня, а также «левосторонние» и «правосторонние» петли, соответствующие им.

С математической точки зрения, трюк с ремнем выражает лишь тот факт, что два положения ремня (к которому добавлена полоска, изображенная пунктиром) представляют собой изотопные вложения  $S^1 \times [0, 1]$  в  $\mathbb{R}^3$ , — и ничего более. Но с физической точки зрения это — некоторое природное явление, имеющее досадные последствия. Например, вы, вероятно, замечали, что телефонный шнур нередко все более и более закручивается, а это постепенно затрудняет пользование телефоном. Это происходит из-за того, что большинство правшей часто, кладя трубку, непроизвольно делают на шнуре правостороннюю петлю.

**2.4. Трюк Уитни.** Для этого трюка используется лента, концы которой сшиты так, чтобы лента, положенная на стол, образовывала бы плоское кольцо. Ленту поднимают со стола и делают на ней две петли — левостороннюю и правостороннюю, причем одна петля внутренняя, а другая внешняя (рис. 2.5 (a)). Предлагается удалить эти петли не поднимая ленту со стола.



**Рис. 2.5**

Решение (оно было известно Уитни [Whi]) достаточно просто, но обычно после нескольких попыток люди приходят к ложному мнению, что это невозможно. Но рис. 2.5 (b)–(d) показывает, что в действительности это нетрудно сделать.

**Замечание.** На ориентированной ленте петли бывают четырех разных видов: петля может быть левосторонней или

правосторонней, а также внутренней или внешней. В частности, на ориентированной ленте внешнюю петлю можно сделать двумя способами, в зависимости от того, заканчивается ли петля над лентой или под лентой (рис. 2.6). Обратите внимание, что для трюка Уитни (см. рис. 2.5 (а)) требуется, чтобы за внутренней петлей, заканчивающейся над лентой, следовала бы внешняя петля, заканчивающаяся тоже над лентой.

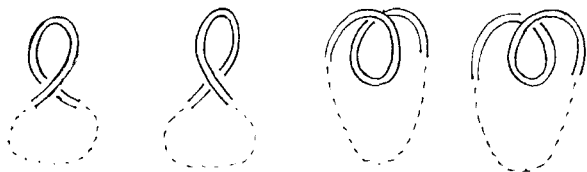


Рис. 2.6

Если на ленте до сшивания ее концов сделать две одинаковые петли, то положить ее на стол так, чтобы она к нему плотно прилегала, не удастся. Дело в том, что при этом на ленте возникают два закручивания (вспомните трюк с ремнем). Эти закручивания нельзя устранить не только на плоском столе, но и в пространстве. Но для доказательства этого требуются инварианты, которые появятся у нас лишь в последующих главах.

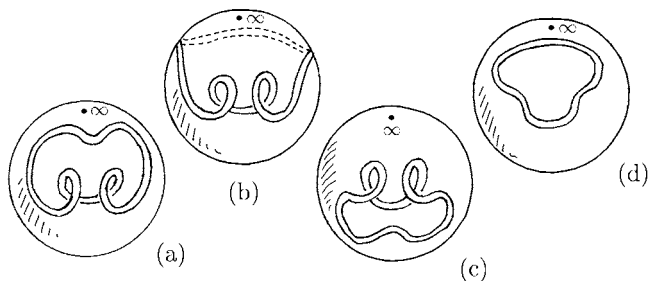
**Задача 2.1.** Какие пары последовательных петель (из 16 возможных) на ленте, плотно прилегающей к столу, уничтожают друг друга посредством трюка Уитни?

**2.5. Трюк на сфере.** Рассмотрим плоскую ленту с двумя последовательными внутренними петлями, одна из которых заканчивается над лентой, а другая под лентой. В пространстве эти петли превращаются в противоположные закручивания, которые уничтожают друг друга. Однако эксперименты с такой лентой показывают, что эти петли не удастся уничтожить, не поднимая ленту со стола. Но доказать это мы пока не готовы (нет инвариантов).

Предположим теперь, что такая лента плотно прилегает к поверхности сферы достаточно большого размера

(рис. 2.7 (a)). Можно ли уничтожить петли, не убирая ленту со сферы? (В этом случае мы предлагаем лишь мысленный эксперимент. Отметим также, что лента считается растяжимой.)

Удивительным образом, ответ на поставленных вопрос — да, можно (рис. 2.7(b)–(d)). Суть трюка заключается в том, чтобы растянуть ленту и «перебросить ее через бесконечность». (Сферу можно представлять себе как плоскость, пополненную бесконечно удаленной точкой.) Перебрасывание через бесконечность превращает одну внутреннюю петлю во внешнюю, а ее уже можно взаимно уничтожить с оставшейся внутренней петлей, как и в трюке Уитни. В этом и заключается трюк на сфере; он тоже был изобретен Уитни [Whi].



**Рис. 2.7**

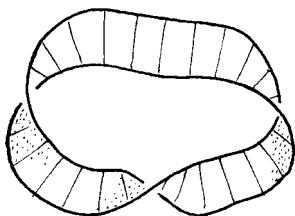
**Задача 2.2.** Какие пары последовательных петель (из 16 возможных) на ленте, плотно прилегающей к сфере, взаимно уничтожаются при некотором скользящем передвижении ленты по поверхности сферы?

**2.6. Игры с перекрученными лентами.** Наиболее известная перекрученная лента — это лист Мёбиуса. Мы не будем описывать классические опыты с этим объектом (вроде раскрашивания его поверхности или разрезания по средней линии), потому что они и без того слишком хорошо всем известны. Но, если читатель никогда не повторял процедуру разрезания, мы предлагаем следующую серию опытов. Сначала разрежьте лист Мёбиуса вдоль средней линии. Затем разрежьте полученный объект вдоль средней линии. После

этого продолжайте разрезать по средней линии то, что будет получаться. Требуется предсказать, что получится на третьем, четвертом, ...,  $n$ -м шаге.

Возьмем теперь ленту, перекрученную на полный оборот (лист Мёбиуса перекручен на пол-оборота). Что произойдет, когда мы разрежем эту ленту по середине? Что произойдет, когда мы повторим эту процедуру? Как это связано с тем, что край ленты представляет собой зацепление Хопфа? Как это связано с предыдущим экспериментом?

Наконец, возьмем ленту с тремя полуоборотами (рис. 2.8). Обратите внимание, что краем этой ленты служит трилистник. Это замечание поможет вам решить последнюю задачу этого параграфа.



**Рис. 2.8**

**Задача 2.3.** Что получится после разрезания по средней линии ленты с тремя полуоборотами? Что получится после повторения этой процедуры?

**2.7.** Завершая этот параграф, отметим, что общая теория скрученных полосок в пространстве сложна потому, что на ней отражаются сразу два различных рода явлений. Один род имеет дело с внутренней геометрией изучаемых объектов, а второй — с их расположением в пространстве. Например, незакрученная полоска и полоска, закрученная на полный оборот, представляют собой гомеоморфные поверхности, но их вложения в пространство различны (не изотопны).

## Комментарии

Практика завязывания узлов восходит к началу цивилизации, если только не дальше (некоторые высшие приматы умеют завязывать узлы). Первые трактаты об узлах относятся к эпохе Возрождения. Они представляют собой, по сути дела, руководства для моряков. Примером более современной книги, рассматривающей узлы с практической точки зрения, служит [Ash]. Первая научная статья об узлах (1796) принадлежит Вандермонду.

Что же касается зацеплений, то для них первое серьезное достижение связано с именем Гаусса. В своей работе по электродинамике Гаусс написал замечательный интеграл (см. [DNF с.525] и [Cal]), величина которого — целое число, знаменитый коэффициент зацепления двух кривых (в приложениях этими кривыми являются два электрических контура). Элементарное топологическое определение коэффициента зацепления появится у нас ниже в §15. Как ни странно, замечательный интеграл Гаусса был оставлен топологами без внимания; первое его обобщение появилось лишь 150 лет спустя в виде интеграла Концевича, дающего выражение для инвариантов Васильева (см. §4). Архив Гаусса содержит красивые картинки узлов, нарисованные им в 1792г. По-видимому, Гаусс начал составлять таблицу узлов, но отказался от этой затеи, не найдя пригодного для этой цели инварианта узлов.

Первый существенный шаг в развитии теории узлов был сделан в конце 19 в., но не математиками, а физиками. Великий физик Уильям Томсон (лорд Кельвин), размышляя о строении материи, попытался согласовать корпускулярную и волновую теории, представляя частицы в виде замкнутых кривых в пространстве, которые он назвал вихревыми атомами (vortex atoms, [Kel], 1867). По инициативе Кельвина составлением таблиц узлов занялся П. Г. Тэт, которому принадлежит также первое общедоступное изложение теории кватернионов (оригинальные работы Гамильтона многим казались неясными и непонятными). Итогом титанических усилий Тэта стала первая таблица узлов и знаменитые гипотезы Тэта (их обзор см. [Thi]), но никакой теории им разработано не было (в частности, не появилось никаких эффективно вычисляемых инвариантов). Хотя и теорию вихревых ато-



мов поначалу поддерживал Максвелл, от нее вскоре отказались. Основным поводом для этого послужили успехи другой классификации атомов — периодической системы элементов Менделеева, которая по своей природе была скорее арифметической, чем геометрической.

Математики начали заниматься теорией узлов гораздо позже, но и с бóльшим успехом (благодаря использованию фундаментальной группы и некоторых изошренных алгебраических теорий).

Основная часть геометрического материала этой главы, включая теорему Рейдемейстера и понятие простого узла, впервые была систематически изложена в замечательной книге Рейдемейстера *Knottentheorie*, опубликованной в 1932 г. Позднее появились примеры диких узлов ([AF], 1948) и теорема о существовании и единственности представления узла в виде композиции простых узлов, принадлежащая Шуберту ([Sch], 1949). Из числа более современных монографий по теории узлов следует отметить [CF], [Rol], [BZ], [Ada], [Kaw] и [Kau1].

## Глава II

### Инварианты узлов и зацеплений

В предыдущей главе неоднократно говорилось, что для доказательства теорем о несуществовании нужны какие-то инварианты. Например, мы пока не можем доказать такой простой и интуитивно очевидный факт, что узел трилистник нетривиален или, скажем, не изотопен узлу восьмерка. В этой главе мы построим самые новые и самые мощные инварианты узлов и зацеплений, открытые Воганом Джонсом (§3) и Виктором Васильевым (§4). Оригинальные конструкции этих инвариантов были весьма замысловаты, но интенсивная работа нескольких других исследователей привела к их существенному упрощению. Поэтому теперь почти все можно изложить элементарно. Единственная трудная часть, не поддающаяся пока упрощению, — это существование инвариантов Васильева. Известны три доказательства, использующие совсем разные идеи ([Vas1], [Kon1–2] и [BN], [Car]), но все эти доказательства весьма сложные. Поэтому теореме существования инвариантов Васильева мы принимаем в §4 без доказательства.

#### §3. Полином Джонса

Один из наиболее естественных вопросов теории узлов связан с тем, чтобы по двум данным диаграммам узнать, соответствуют ли они одному узлу или разным. И если в том, что диаграммы соответствуют одному узлу, еще можно убедиться, проделав несколько преобразований Рейдемейстера,

то для доказательства того, что диаграммы соответствуют разным узлам, уже нужны какие-то хитрости. Стандартный метод заключается в использовании *инвариантов*, т.е. алгебраических объектов (например, чисел или полиномов), сопоставляемых диаграмме узла таким образом, чтобы сопоставляемый объект не изменялся при изотопии узла. В таком случае две диаграммы с разными значениями инварианта соответствуют разным узлам. Этот метод эффективен лишь в том случае, когда инвариант вычисляется достаточно просто. Знаменитый полином Джонса является именно таким инвариантом для зацеплений (а, значит, в частности, и для узлов). Построение полинома Джонса мы начнем с того, что сопоставим каждой диаграмме  $L$  неориентированного зацепления полином  $\langle L \rangle$ , предложенный Луисом Кауфманом.

**3.1.** Попробуем сопоставить каждой диаграмме  $L$  полином  $\langle L \rangle$  (часто называемый *скобкой Кауфмана*) от переменных  $a, b, c$  так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$(1) \quad \langle \text{крест} \rangle = a \langle \text{горизонтальная дуга} \rangle + b \langle \text{вертикальная дуга} \rangle;$$

$$(2) \quad \langle L \sqcup \bigcirc \rangle = c \langle L \rangle;$$

$$(3) \quad \langle \bigcirc \rangle = 1.$$

Здесь маленькие картинки в соотношении (1) обозначают диаграммы, которые совпадают вне пунктирных кружочков, а внутри них устроены так, как показано на картинках. Если мы обозначим эти диаграммы  $L, L_A$  и  $L_B$  (рис. 3.1), то соотношение (1) можно записать в виде  $\langle L \rangle = a \langle L_A \rangle + b \langle L_B \rangle$ .

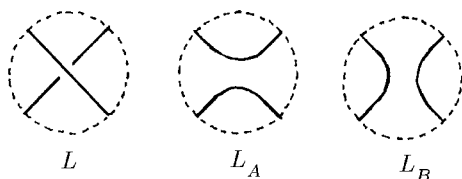


Рис. 3.1

Отметим, что для перекрестка диаграммы  $L$ , содержащегося в маленьком кружочке, диаграммы  $L_A$  и  $L_B$  определены

однозначно, независимо от того, как он повернут. В самом деле, дуги диаграмм  $L_A$  и  $L_B$  выбираются в областях  $A$  и  $B$  соответственно (рис. 3.2). Эти области определяются следующим образом. Будем идти по верхней ветви перекрестка. Обозначим буквой  $A$  ту четверть круга, которая при входе в круг видна слева, и ту четверть круга, которая при выходе из круга видна справа. Это определение не зависит от того, с какой стороны мы входим в круг.

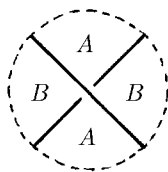


Рис. 3.2

Соотношение (2) означает, что добавление к диаграмме окружности, не пересекающей проекции соответствующего диаграмме зацепления, приводит к полиному, который получается из исходного полинома умножением на  $c$ . Наконец, соотношение (3) означает, что окружности соответствует полином, равный 1. Кроме того, мы будем предполагать, что полином  $\langle L \rangle$  не изменяется при плоской изотопии диаграммы.

Попробуем теперь связать переменные  $a, b, c$  такими соотношениями, чтобы полученный полином был инвариантен относительно преобразований Рейдемейстера. Начнем с преобразования  $\Omega_2$ . Многократно используя соотношение (1) и один раз используя соотношение (2), получим

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + b \langle \text{Diagram 3} \rangle = \\ &= a[a \langle \text{Diagram 4} \rangle + b \langle \text{Diagram 5} \rangle] + b[a \langle \text{Diagram 6} \rangle + b \langle \text{Diagram 7} \rangle] = \\ &= (a^2 + b^2 + abc) \langle \text{Diagram 8} \rangle + ab \langle \text{Diagram 9} \rangle \langle \text{Diagram 10} \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $ab = 1$  и  $a^2 + b^2 + abc = 0$ , то полином будет инвариантен относительно преобразования  $\Omega_2$ . Поэтому мы положим  $b = a^{-1}$  и  $c = -a^2 - a^{-2}$ , обеспечив тем самым

инвариантность полинома  $\langle L \rangle$  относительно преобразования  $\Omega_2$ . Этим мы исчерпали все степени свободы. Но, к счастью, полученный полином будет инвариантен и относительно преобразования  $\Omega_3$ . В самом деле, из свойства (1) получаются следующие два соотношения:

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle, \\ \langle \text{Diagram 4} \rangle &= a \langle \text{Diagram 5} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ясно, что  $\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 2} \rangle$ , так как соответствующие диаграммы плоско изотопны друг другу. Далее, дважды используя инвариантность многочлена  $\langle L \rangle$  относительно  $\Omega_2$ , получим

$$\langle \text{Diagram 2} \rangle = \langle \text{Diagram 5} \rangle = \langle \text{Diagram 6} \rangle.$$

Теперь сравнение правых частей соотношений (3.1) показывает, что они почленно равны. Следовательно, равны и левые части, а это как раз и означает инвариантность полинома относительно преобразования  $\Omega_3$ .

Займемся теперь преобразованием  $\Omega_1$ , снова надеясь на удачу. Из соотношений (1) и (2) следует, что

$$\langle \text{Diagram 7} \rangle = a \langle \text{Diagram 8} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 9} \rangle = \lambda \langle \text{Diagram 9} \rangle,$$

где  $\lambda = a(-a^2 - a^{-2}) + a^{-1} = -a^3$ .

Аналогичные вычисления можно провести и для петельки другого типа. В итоге получаем

$$\langle \text{Diagram 10} \rangle = -a^{-3} \langle \text{Diagram 9} \rangle, \quad \langle \text{Diagram 11} \rangle = -a^3 \langle \text{Diagram 9} \rangle. \quad (3.2)$$

На этот раз нас постигла неудача: при  $a^3 \neq -1$  полином  $\langle L \rangle$  не инвариантен относительно преобразования  $\Omega_1$ , поэтому он не является инвариантом зацепления. Например,

$$\langle \text{Diagram 12} \rangle = -a^3, \quad \langle \text{Diagram 13} \rangle = -a^{-3},$$

хотя и обе эти диаграммы соответствуют тривиальному узлу.

Тем не менее, с помощью полинома  $\langle L \rangle$  можно построить полином Джонса, который инвариантен относительно всех трех преобразований Рейдемейстера. Но сначала нужно доказать, что полином  $\langle L \rangle$  существует и единствен. Начнем с простых примеров его вычисления.

**3.2. Вычисления полинома  $\langle L \rangle$ .** При вычислениях мы будем использовать соотношения (3.2).

**Пример 1.** Для простейших диаграмм с одним или двумя перекрестками получаем

$$\begin{aligned} \langle \infty \rangle &= -a^3; & \langle \infty \infty \rangle &= (-a^3)^2 = a^6; \\ \langle \infty \infty \rangle &= -a^{-3}; & \langle \infty \infty \rangle &= a^{-6}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Для зацеплений Хопфа получаем

$$\begin{aligned} \langle \text{Hopf} \rangle &= a \langle \text{Hopf} \rangle + a^{-1} \langle \text{Hopf} \rangle = \\ &= a(-a^3) + a^{-1}(-a^{-3}) = -a^4 - a^{-4}; \\ \langle \text{Hopf} \rangle &= -a^4 - a^{-4}. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Для трилистников получаем

$$\begin{aligned} \langle \text{Trefoil} \rangle &= a \langle \text{Trefoil} \rangle + a^{-1} \langle \text{Trefoil} \rangle = \\ &= a(a^6) + a^{-1}(-a^4 - a^{-4}) = a^7 - a^3 - a^{-5}; \\ \langle \text{Trefoil} \rangle &= a^{-7} - a^{-3} - a^5. \end{aligned}$$

**Задача 3.1.** Вычислите полином  $\langle L \rangle$  для узла и для зацепления, изображенных на рис. 3.3.



**Рис. 3.3**

**3.3.** Чтобы упростить вычисления в примерах 1–3, мы часто использовали результаты предшествующих вычислений. Так делать не обязательно. Если не стремиться сократить вычисления, то можно последовательно уничтожить

перекрестки, пользуясь свойством (1). После уничтожения каждого перекрестка количество диаграмм удваивается. Поэтому для диаграммы с  $n$  перекрестками в итоге получим  $2^n$  диаграмм, каждая из которых состоит из нескольких попарно не пересекающихся окружностей. По виду каждой из этих  $2^n$  диаграмм можно восстановить преобразования, в результате которых она получена.

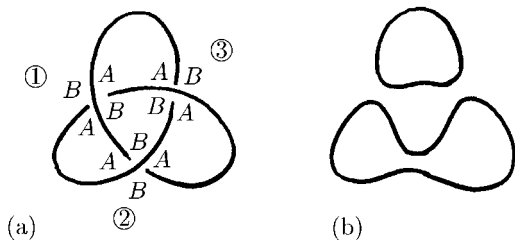


Рис. 3.4

Поясним это на примере трилистника (рис. 3.4(a)). Пусть диаграмма, изображенная на рис. 3.4(b), получена в результате уничтожения перекрестков этого трилистника. Тогда можно утверждать, что на перекрестках с пометками 1 и 3 дуги берутся в областях  $A$ , а на перекрестке с пометкой 2 дуги берутся в областях  $B$ .

Перед полиномом этой диаграммы стоит коэффициент  $a^2b = a^2a^{-1} = a$ ; этот коэффициент не зависит от того, в каком именно порядке уничтожаются перекрестки. Это — общий факт; его можно применить для доказательства существования и единственности полинома  $\langle L \rangle$ .

**3.4. Теорема.** *Существует единственный полином  $\langle L \rangle$ , удовлетворяющий соотношениям (1)–(3) из пункта 3.1.*

*Доказательство.* Занумеруем перекрестки диаграммы  $L$  и сопоставим  $i$ -му перекрестку его *состояние*, т.е. одно из формальных значений  $x_i = A$  или  $x_i = B$ . Определенный выбор состояний для всех перекрестков назовем *состоянием диаграммы  $L$* . Пусть количество перекрестков диаграммы  $L$  равно  $n$ . Тогда количество различных состояний диаграммы  $L$  равно  $2^n$ . Каждому состоянию  $s$  диаграммы  $L$  соответствует система попарно не пересекающихся окружностей,

полученная в результате перестройки каждого перекрестка в соответствии с его состоянием, как это показано на рис. 3.5.

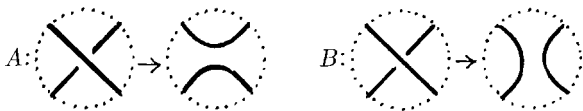


Рис. 3.5

Пусть  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  — количества перекрестков в состояниях  $A$  и  $B$  соответственно,  $\gamma(s)$  — количество окружностей, полученных в результате перестройки, соответствующей состоянию  $s$ . Если мы уничтожим все перекрестки диаграммы  $L$  с помощью соотношения (1), а затем воспользуемся соотношениями (2) и (3), чтобы вычислить полиномы полученных диаграмм, состоящих из непересекающихся окружностей, то в результате получим

$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= \sum_s a^{\alpha(s)} b^{\beta(s)} c^{\gamma(s)-1} = \\ &= \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)-1}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где сумма берется по всем  $2^n$  состояниям диаграммы  $L$ . Таким образом, полином, удовлетворяющий соотношениям (1)–(3), единствен.

Формула (3.3) показывает не только единственность полинома  $\langle L \rangle$ , но и его существование. В самом деле, давайте *определим* многочлен  $\langle L \rangle$  формулой (3.3). Тогда соотношения (2) и (3) для этого многочлена выполняются очевидным образом. А чтобы доказать свойство (1) для перекрестка с номером  $i$ , нужно разбить сумму по всем  $s$  на сумму по тем  $s$ , для которых  $x_i = A$ , и сумму по тем  $s$ , для которых  $x_i = B$ .  $\square$

**3.5. Полином Кауфмана.** В оставшейся части этого параграфа мы будем рассматривать *ориентированные* зацепления, т.е. будем считать, что на каждой компоненте задана ориентация (на рисунках она изображается стрелкой, указывающей направление обхода). Для диаграммы  $L$  ориентированного зацепления определим число

$$w(L) = \sum_i \varepsilon_i,$$



где сумма берется по всем перекресткам, а числа  $\varepsilon_i$  равны  $\pm 1$  в зависимости от знака  $i$ -го перекрестка, который определяется так, как показано на рис. 3.6.

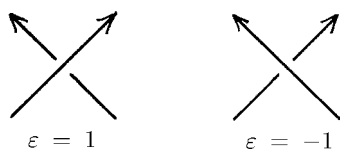


Рис. 3.6

Легко проверить, что если ориентации всех компонент зацепления заменить на противоположные, то число  $w(L)$  не изменится. Примеры вычисления числа  $w(L)$  представлены на рис. 3.7.

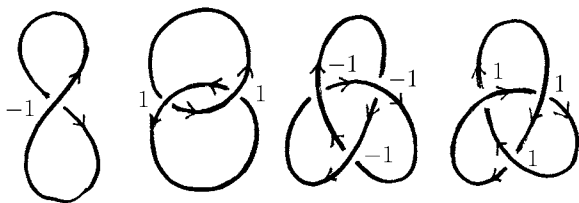


Рис. 3.7

Число  $w(L)$  инвариантно относительно преобразований Рейдемейстера  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . В самом деле, для преобразования  $\Omega_2$  знаки двух возникающих (или исчезающих) перекрестков противоположны, а для преобразования  $\Omega_3$  знаки перекрестков  $A, B, C$  (рис. 3.8) равны соответственно знакам перекрестков  $A', B', C'$ .

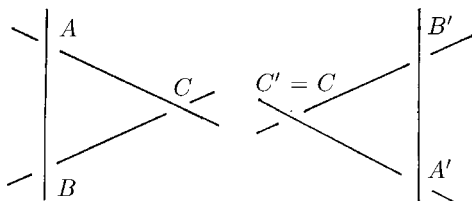


Рис. 3.8

При преобразовании  $\Omega_1$ , однако, либо один перекресток появляется, либо один перекресток исчезает, поэтому число  $w(L)$  изменяется на  $\pm 1$ .

Определим теперь многочлен  $X(L)$ , где  $L$  — диаграмма ориентированного зацепления, положив

$$X(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle, \quad (3.4)$$

где неориентированная диаграмма  $|L|$  получена из  $L$  забыванием ориентации всех компонент (стиранием стрелок).

**3.6. Теорема.** *Полином  $X(L)$  является инвариантом ориентированного зацепления относительно изотопий в пространстве.*

*Доказательство.* Так как ни  $w(L)$ , ни  $\langle |L| \rangle$  не изменяются при преобразованиях  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , то  $X(L)$  тоже не изменяется при этих преобразованиях. Что же касается преобразования  $\Omega_1$ , то при этом преобразовании число  $w(L)$  и полином  $\langle |L| \rangle$  изменяются, но в полиноме  $X(L)$  эти изменения взаимно уничтожаются. Например,

$$\langle \text{left trefoil} \rangle = -a^{-3} \langle \text{right trefoil} \rangle \quad \text{и} \quad w(\text{left trefoil}) = w(\text{right trefoil}) = -1,$$

поэтому из определения многочлена  $X(L)$  и из формулы (3.2) следует, что

$$X(\text{left trefoil}) = (-a^{-3})(-a^3)X(\text{right trefoil}) = X(\text{right trefoil}).$$

Аналогичные вычисления (использующие вторую формулу (3.2)) можно проделать и для петельки другого вида.

Таким образом, полином  $X(L)$  инвариантен относительно всех трех преобразований Рейдемейстера. Поэтому согласно теореме 1.7 он инвариантен относительно изотопии зацепления.  $\square$

С помощью полинома  $X(L)$  можно, в частности, доказать, что левый трилистник и правый трилистник — разные (неизотопные) узлы. В самом деле, из примера 3 следует, что

$$X(\text{left trefoil}) = -a^{16} + a^{12} + a^4,$$

$$X(\text{right trefoil}) = -a^{-16} + a^{-12} + a^{-4}.$$

Напомним, что полином  $\langle L \rangle$  был определен аксиоматически с помощью соотношений (1)–(3). Затем нам удалось доказать (это оказалось не таким уж сложным делом), что полином, удовлетворяющий этим соотношениям, существует и единствен (теорема 3.4). А вот полином  $X(L)$  был определен формулой (3.4), содержащей  $\langle |L| \rangle$ . Оказывается, что полином  $X(L)$  тоже допускает аксиоматическое определение посредством простых и весьма полезных соотношений.

Чтобы получить основное определяющее соотношение для полинома  $X(L)$ , воспользуемся дважды свойством (1) полинома  $\langle L \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= a \langle \text{C} \rangle + a^{-1} \langle \text{C} \rangle, \\ \langle \text{X} \rangle &= a^{-1} \langle \text{C} \rangle + a \langle \text{C} \rangle, \end{aligned}$$

Умножим первое соотношение на  $-a^{-1}$ , а второе на  $a$ . Сложив эти равенства, получим

$$a \langle \text{X} \rangle - a^{-1} \langle \text{X} \rangle = (a^2 - a^{-2}) \langle \text{C} \rangle.$$

Такое равенство выполняется, в частности, для диаграмм ориентированных зацеплений  $L^\pm$  и  $L^0$ , изображенных на рис. 3.9, т.е.

$$a \langle L^+ \rangle - a^{-1} \langle L^- \rangle = (a^2 - a^{-2}) \langle L^0 \rangle.$$

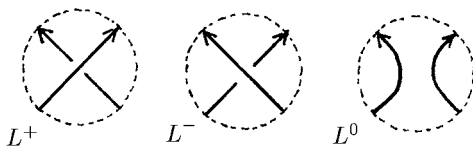


Рис. 3.9

Для диаграмм  $L^\pm$  и  $L^0$  легко проверить, что  $w(L^\pm) = w(L^0) \pm 1$ . Следовательно,

$$a(-a)^3 X(L^+) - a^{-1}(-a)^{-3} X(L^-) = (a^2 - a^{-2}) X(L^0). \quad (3.6)$$

Мы, наконец, готовы дать определение полинома Джонса.

**3.7. Определение полинома Джонса.** Сделаем в полиноме Кауфмана  $X(L)$  замену  $a = q^{-1/4}$ . В результате получим полином от  $q^{\pm 1/4}$ . Этот полином обозначают  $V(L)$  и называют *полиномом Джонса* ориентированного зацепления  $L$ . Полином Джонса удовлетворяет следующим соотношениям:

$$(1') \quad q^{-1}V(L^+) - qV(L^-) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(L^0);$$

$$(2') \quad V(L \sqcup \bigcirc) = -(q^{-1/2} + q^{1/2})V(L);$$

$$(3') \quad V(\bigcirc) = 1.$$

В соотношении (1') диаграммы  $L^+, L^-, L^0$  совпадают вне маленького круга, а внутри его они устроены так, как показано на рис. 3.9. Это соотношение называют *sklein relation*, или *соотношение типа Конвея*. Далее, в соотношении (2') диаграмма  $L \sqcup \bigcirc$  представляет собой диаграмму  $L$ , к которой добавлена окружность, не пересекающая проекцию соответствующего диаграмме зацепления. Наконец, соотношение (3') означает, что полином Джонса для окружности равен 1. Эти соотношения следуют из соответствующих свойств полинома  $X(L)$ . Например, (1') следует из (3.6).

Соотношения (1')–(3') предоставляют способ вычисления полинома  $V(L)$ , отличающийся от способа вычисления полинома  $\langle L \rangle$  (напомним, что вычисление этого полинома опиралось на уничтожение всех перекрестков с помощью соотношения (1) для полинома  $\langle L \rangle$ ). В случае же полинома  $V(L)$  соотношение (1') дает не только диаграмму с уничтоженным перекрестком, но и диаграмму с измененным типом перекрестка. Поэтому стратегия вычислений полинома Джонса заключается в «распутывании» зацепления с помощью изменения типов перекрестков (при распутывании мы сначала расцепляем компоненты зацепления, а затем развязываем каждую из них). Соотношение (1') мы применяем лишь к тем перекресткам, которые нужно изменить, чтобы распутать зацепление.

Прежде чем доказывать, что эта стратегия всегда позволяет вычислить полином Джонса, покажем, как она работает в случае трилистника. Применив соотношение (1') к любому перекрестку, получим тривиальный узел и зацепление Хопфа:

$$q^{-1}V(\text{Hopf}) - qV(\text{Hopf}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{Hopf}).$$

Применив соотношение (1') к зацеплению Хопфа, получим

$$q^{-1}V(\text{Hopf}) - qV(\text{Hopf}) = (q^{1/2} - q^{-1/2})V(\text{Hopf}).$$

Из соотношений (2') и (3') теперь следует, что

$$\begin{aligned} V(\text{Hopf}) &= -q^{-2}(q^{1/2} + q^{-1/2}) - q^{-1}(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \\ &= -q^{-1/2} - q^{-5/2}, \end{aligned}$$

а значит,

$$\begin{aligned} V(\text{Hopf}) &= q^{-2} + q^{-1}(q^{-1/2} + q^{-5/2})(q^{1/2} - q^{-1/2}) = \\ &= q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}. \end{aligned}$$

Это совпадает с результатом наших предыдущих вычислений

$$X(\text{Hopf}) = -a^{16} + a^{12} + a^4,$$

так как  $q = a^{-1/4}$ .

Аналогично можно вычислить полином Джонса любого  $m$ -компонентного зацепления  $L$ , представленного диаграммой с  $n$  перекрестками. В самом деле, пусть  $L_1, \dots, L_k$  — последовательность зацеплений, начинающаяся данным зацеплением  $L = L_1$  и заканчивающаяся тривиальным  $m$ -компонентным зацеплением  $L_k$ , причем все соседние зацепления  $L_i$  и  $L_{i+1}$  получаются друг из друга изменением типа ровно одного перекрестка. Тогда выполняется одно из двух соотношений

$$q^{-1}V(L_i) - qV(L_{i+1}) + (q^{-1/2} - q^{1/2})V(L'_i) = 0,$$

$$q^{-1}V(L_{i+1}) - qV(L_i) + (q^{-1/2} - q^{1/2})V(L'_i) = 0,$$

причем зацепление  $L'_i$  представлено диаграммой с  $n - 1$  перекрестком. Так как полином  $V(L_k) = (-q^{-1/2} - q^{1/2})^{m-1}$  известен, то мы сможем последовательно вычислить полиномы  $V(L_{k-1}), \dots, V(L_1) = V(L)$ , если нам удастся вычислить полиномы  $V(L'_i)$ . Диаграмма зацепления  $L'_i$  имеет менее  $n$  перекрестков, поэтому полиномы  $V(L'_i)$  можно вычислить, применив индукцию по числу перекрестков диаграммы.

Теперь, чтобы убедиться, что описанный алгоритм вычисления полинома  $V(L)$  действительно работает, остается лишь доказать, что существует требуемая распутывающая последовательность зацеплений  $L_1, \dots, L_k$ .

**3.8. Теорема.** Любое  $m$ -компонентное зацепление  $L$  можно превратить в тривиальное  $m$ -компонентное зацепление, изменив типы некоторых его перекрестков.

*Доказательство.* Предположим сначала, что  $m = 1$ , т.е.  $L$  — узел. Рассмотрим вместо диаграммы узла его полную проекцию (*тень*), т.е. плоскую кривую с точками самопересечения. Выберем в плоскости диаграммы некоторую прямую, не пересекающую тень узла. Будем двигать прямую  $l$  параллельно самой себе по направлению к тени до тех пор, пока они не коснутся в некоторой точке  $P$ . Выберем в пространстве две точки  $A$  и  $B$ , расположенные вертикально над точкой  $P$ , причем так, чтобы точка  $A$  лежала выше точки  $B$ . Рассмотрим траекторию точки, которая выходит из точки  $A$  и движется над тенью узла, равномерно сокращая расстояние до плоскости диаграммы, причем после одного полного оборота над тенью узла она попадает в точку  $B$  (рис. 3.10). Соединив точки  $A$  и  $B$  отрезком, получим тривиальный узел  $K$ . В самом деле, проекция узла  $K$  на плоскость, перпендикулярную опорной прямой  $l$ , не имеет точек самопересечения. Остается заметить, что узел  $K$  можно получить из исходного узла заменой типов перекрестков.

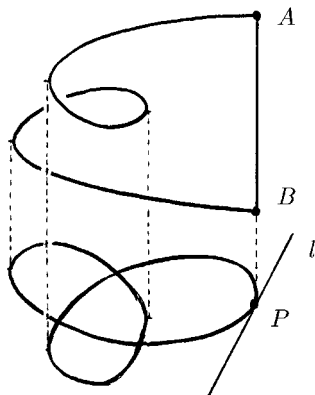


Рис. 3.10

В том случае, когда зацепление  $L$  состоит из нескольких компонент, ту же самую конструкцию можно применить к

каждой компоненте. При этом нужно лишь позаботиться о том, чтобы все полученные в результате тривиальные узлы  $K_i$  были расположены на разной высоте над плоскостью диаграммы. Иными словами, проекции отрезков  $A_i B_i$  на вертикальную ось должны попарно не пересекаться.  $\square$

Мы показали, что полином Джонса можно вычислить с помощью соотношения (1'), исходя из полиномов Джонса тривиальных зацеплений. Из этого, в частности, следует, что полином Джонса является полиномом от  $q^{\pm 1/2} = a^{\mp 2}$ , т.е. полином  $X(L)$  содержит лишь четные степени  $a$ . Оказывается, что для узла  $K$  полином  $X(K)$  содержит лишь степени  $a$ , делящиеся на 4. Более того, справедливо следующее утверждение.

**3.9. Теорема.** а) Если количество компонент ориентированного зацепления  $L$  нечетно (например, если  $L$  — узел), то полином Джонса  $V(L)$  содержит лишь члены вида  $q^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

б) Если количество компонент ориентированного зацепления  $L$  четно, то полином Джонса  $V(L)$  содержит лишь члены вида  $q^{(2k+1)/2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Доказательство.* Как мы уже говорили, из соотношений (2') и (3') следует, что полином Джонса тривиального  $m$ -компонентного зацепления равен

$$(-q^{-1/2} - q^{1/2})^{m-1} = q^{(m-1)/2}(-q^{-1} - 1)^{m-1},$$

поэтому для тривиального зацепления утверждение теоремы верно. Полином Джонса любого зацепления можно вычислить с помощью соотношения (1'), исходя из полиномов Джонса тривиальных зацеплений. Вид соотношения (1') показывает, что достаточно проверить следующие свойства зацеплений  $L^+, L^-, L^0$ :

- (1) числа  $m_+$  и  $m_-$  одной четности,
- (2) числа  $m_+$  и  $m_0$  разной четности,

где  $m_+, m_-$  и  $m_0$  — количества компонент зацеплений  $L^+, L^-$  и  $L^0$  соответственно.

Очевидно, что  $m_+ = m_-$ . Легко также проверить, что  $m_+ = m_0 \pm 1$ ; для этого нужно рассмотреть два случая (см. рис. 3.11).  $\square$

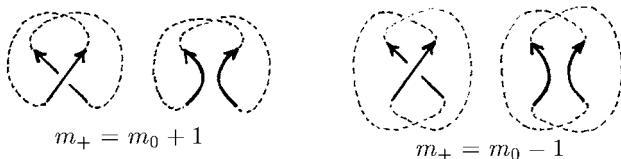


Рис. 3.11

**Задача 3.2.** Вычислите полиномы Джонса узлов, изображенных на рис. 3.12, двумя способами: сначала с помощью полинома  $\langle L \rangle$ , а затем с помощью соотношений (1')–(3'). Сравните полученные ответы.



Рис. 3.12

**3.10. Таблицы узлов.** Теперь мы можем провести классификацию узлов с небольшим числом перекрестков, а именно, узлов, у которых есть диаграммы с количеством перекрестков не более 7. Для этого нужно сначала перечислить все различные (с точностью до плоской изотопии) диаграммы узлов с  $0, 1, 2, \dots, 7$  перекрестками. (Эта комбинаторная задача весьма проста, но требует перебора большого числа различных вариантов; ее решение мы обсуждать не будем.) После того как это сделано, нужно вычислить полиномы Джонса узлов, соответствующих полученным диаграммам. Если двум диаграммам соответствует один и тот же полином Джонса, можно попытаться доказать эквивалентность соответствующих диаграмм узлов с помощью преобразований Рейдемейстера. Оказывается, что для диаграмм с ко-



личеством перекрестков не более 7 эти попытки всегда увенчиваются успехом. В итоге получаем таблицу узлов с не более чем 7 перекрестками (рис. 3.13); в этой таблице представлены только простые узлы.

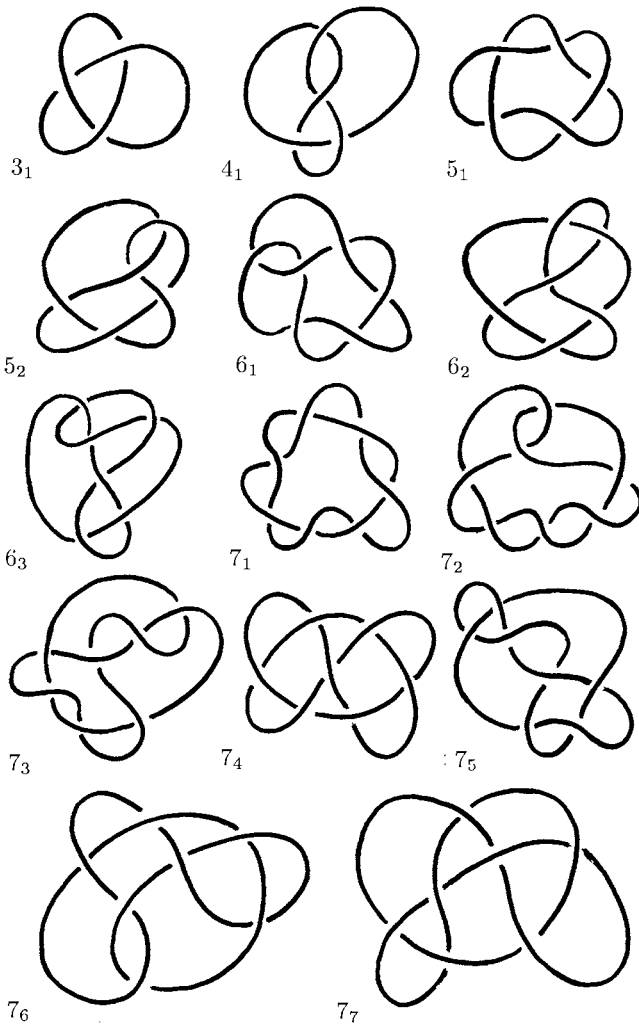


Рис. 3.13

Составные узлы с не более чем 7 перекрестками изображены отдельно на рис. 3.14.

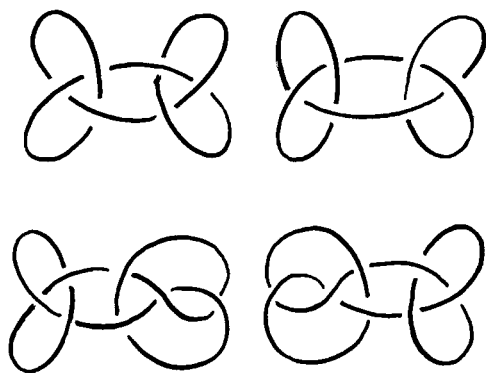


Рис. 3.14

Отметим, что все узлы на рис. 3.13 *альтернированные*, т.е. при обходе диаграммы перекрестки мы проходим поочередно то сверху, то снизу. Примером простого неальтернированного узла служит узел  $8_{19}$ , изображенный на рис. 3.15. (имеется в виду, что у этого узла нет ни одной альтернированной диаграммы.)

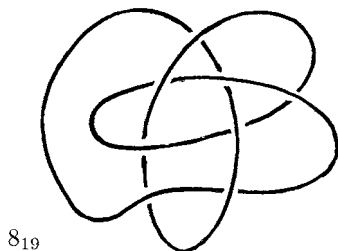


Рис. 3.15

**3.11.** Настала пора обсудить вопрос, всегда ли неизотопные узлы (зацепления) имеют разные полиномы Джонса. Ответ, к сожалению, — нет, не всегда. Наиболее простой пример использует операцию связной суммы. Напомним, что связная сумма узлов была определена в 1.4. Для зацеплений

с несколькими компонентами эта операция определена неоднозначно: результат может зависеть от того, какие именно компоненты мы соединяем друг с другом. Тем не менее, мы будем использовать обозначение  $L_1 \# L_2$ , не забывая при этом, что одно и то же обозначение может соответствовать нескольким неизотопным зацеплениям.

**Задача 3.3.** Докажите, что для любых двух зацеплений  $L_1$  и  $L_2$  выполняются следующие равенства:

$$\text{а) } V(L_1 \# L_2) = V(L_1) \cdot V(L_2);$$

$$\text{б) } V(L_1 \sqcup L_2) = -(q^{-1/2} + q^{1/2})V(L_1) \cdot V(L_2).$$

Имеется в виду, что формула задачи а) верна для любой из возможных связных сумм  $L_1 \# L_2$ .

**Задача 3.4.** Докажите, что полиномы Джонса зацеплений, изображенных на рис. 3.16, совпадают.

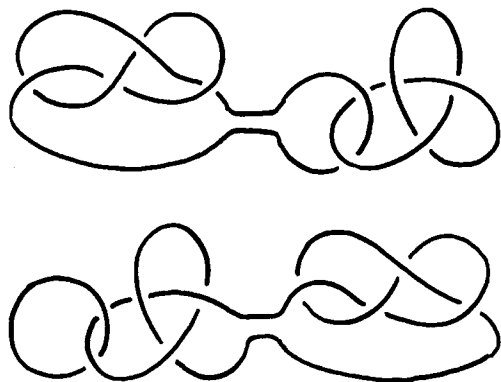


Рис. 3.16

Легко установить, что зацепления, изображенные на рис. 3.16, не изотопны. Поэтому мы получаем пример двух зацеплений, которые нельзя различить с помощью полинома Джонса. Причиной столь неприятного факта служит поведение полинома Джонса при неоднозначной операции связной суммы зацеплений. Для узлов этот трюк применить нельзя, но можно применить весьма похожий трюк, как это видно из следующей задачи.

**Задача 3.5.** Проверьте, что полиномы Джонса узлов, изображенных на рис. 3.17, совпадают.

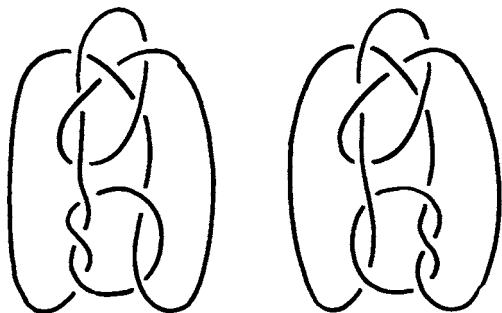


Рис. 3.17

Можно доказать, что эти два узла не изотопны. Поэтому полином Джонса не всегда различает и узлы. Это побуждает к поискам более сильных инвариантов. Один из таких инвариантов будет построен в следующем параграфе.

**3.12. Другие полиномиальные инварианты.** Полином Джонса — это далеко не единственный полиномиальный инвариант зацеплений. За полвека до полинома Джонса был открыт полином Александера. Ниже мы перечислим наиболее известные полиномиальные инварианты. Все они являются инвариантами зацеплений и принимают значение 1 на тривиальном узле. Кроме того, каждый из них удовлетворяет соотношению специального вида. Мы перечислим только названия полиномов и определяющие их соотношения.

*Полином Конвея*  $\nabla$  от одной переменной  $z$

$$\nabla(\text{crossing}) - \nabla(\text{crossing}) = z \nabla(\text{link}).$$

*Полином Александера*  $\Delta$  от одной переменной  $t$

$$\Delta(\text{crossing}) - \Delta(\text{crossing}) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \Delta(\text{link}).$$

Полином Джонса  $V$  от одной переменной  $q$

$$qV(\text{crossing}) - q^{-1}V(\text{crossing}) = \left(\frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q}\right)V(\text{cup})(\text{cap}).$$

Полином HOMFLY  $\mathcal{P}$  от двух переменных  $x, t$

$$x\mathcal{P}(\text{crossing}) - t\mathcal{P}(\text{crossing}) = \mathcal{P}(\text{cup})(\text{cap}).$$

Полином Джонса  $\mathcal{X}$  от двух переменных  $\lambda, q$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{q}}\mathcal{X}(\text{crossing}) - \sqrt{\lambda}\sqrt{q}\mathcal{X}(\text{crossing}) = \frac{\sqrt{q}-1}{\sqrt{q}}\mathcal{X}(\text{cup})(\text{cap}).$$

Отметим, что любой из этих полиномов можно получить из полинома Джонса от двух переменных подходящей заменой переменных.

## §4. Инварианты Васильева

**4.1.** Согласно теореме 3.18 любой узел можно развязать (т.е. преобразовать в тривиальный узел), совершив конечное число изменений типов перекрестков. Если представлять замену типа перекрестка как непрерывный процесс, то самым важным будет тот момент, когда две ветви узла встречаются, образуя точку самопересечения, в которой ветви пересекаются трансверсально. Численные инварианты, введенные Васильевым, основаны на простых соотношениях между значениями инварианта при таких заменах типа перекрестка. Но они требуют расширения класса объектов, с которыми мы работаем: наряду с обычными узлами мы будем рассматривать сингулярные узлы, т.е. кривые, не имеющие особых точек, кроме точек самопересечения. Точное определение таково: *сингулярным узлом*  $k$  называют кусочно линейное или гладкое отображение  $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , не имеющее других особых точек, кроме конечного числа точек трансверсального самопересечения. (Отметим, что ориентация  $S^1$  индуцирует ориентацию ее образа  $k(S^1)$ . В этом параграфе все сингулярные и несингулярные узлы считаются ориентированными.)

Численный инвариант  $v$  называют *инвариантом Васильева*, если он удовлетворяет соотношению

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \text{---} \times \text{---} \\ \text{---} \times \text{---} \end{array}\right). \quad (4.1)$$

Как и в предыдущем параграфе, формулы с картинками внутри маленьких пунктирных окружностей подразумевают, что мы рассматриваем несколько объектов, которые совпадают вне этих окружностей, а внутри них они устроены так, как показано на этих картинках. Под численным инвариантом мы подразумеваем изотопический инвариант сингулярного узла, принимающий значения в некотором коммутативном кольце с единицей (в дальнейшем мы будем считать, что этим кольцом является поле  $\mathbb{R}$ ). Отметим, что изотопия сингулярного узла должна сохранять точки самопересечения и их расположение, т.е. в окрестности точки самопересечения кривая предполагается локально плоской, и это свойство должно сохраняться в процессе изотопии.

По сравнению с предыдущим параграфом мы, с одной стороны, расширяем класс рассматриваемых объектов, включив в него сингулярные узлы, но, с другой стороны, мы исключаем из рассмотрения зацепления с двумя и более компонентами.

Следует также отметить, что (вновь в отличие от предыдущего параграфа) инварианты Васильева по очевидным причинам не единственны (например, умножение инварианта  $v$  на любую константу не нарушает соотношения (4.1)). Мы пока не будем заниматься вопросом о существовании инвариантов Васильева, а займемся вместо этого изучением свойств, которыми они должны обладать.

#### 4.2. Одночленное соотношение

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = 0. \quad (4.2)$$

Это соотношение непосредственно следует из определения (4.1). В самом деле,

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right) - v\left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}\right),$$

причем выражение в правой части равно нулю, поскольку два узла, встречающиеся в этом выражении, изотопны, а функция  $v$  на изотопных узлах принимает одно и то же значение.

**Задача 4.1.** Докажите, что если сингулярный узел устроен так, как показано на рис. 4.1 (строение узла внутри двух «коробок» не имеет значения), то для этого узла значение любого инварианта Васильева равно нулю.

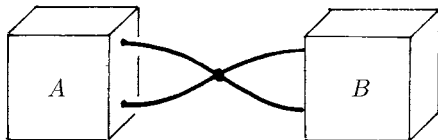


Рис. 4.1

Соотношение

$$v(\square \text{---} \square) = 0$$

будем называть *обобщенным одночленным соотношением*.

### 4.3. Четырехчленное соотношение

$$v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) + v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = 0. \quad (4.3)$$

*Доказательство.* Применив четыре раза соотношение (4.1), получим

$$\begin{aligned} v(\text{crossing}) &= v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = a - b, \\ v(\text{crossing}) &= v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = c - d, \\ v(\text{crossing}) &= v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = c - a, \\ v(\text{crossing}) &= v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}) = d - b, \end{aligned}$$

где одинаковыми буквами обозначены значения инварианта  $v$  на изотопных узлах. Ясно, что

$$(a - b) - (c - d) + (c - a) - (d - b) = 0. \quad \square$$

**4.4.** Инварианты Васильева образуют линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$  (или над любым другим полем, выбранным в качестве области значений инвариантов), так как любая линейная комбинация инвариантов Васильева удовлетворяет (линейному) соотношению (4.1). Это пространство, однако, бесконечномерное. В связи с этим удобно рассмотреть возрастающую последовательность конечномерных подпространств, которая содержит достаточно много инвариантов Васильева. Будем говорить, что инвариант  $v$  имеет *порядок* не более  $n$  (запись:  $\text{ord}v \leq n$ ), если он тождественно равен нулю на любом сингулярном узле с более чем  $n$  точками трансверсального самопересечения. Положим  $V_n = \{v | \text{ord}v \leq n\}$ . Тогда каждое множество  $V_n$  является линейным пространством, причем

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \dots$$

**4.5. Инварианты порядка 0 и 1.** Любой инвариант Васильева  $v_0$  порядка 0 обращается в нуль на любом сингулярном узле, имеющем хотя бы одну точку самопересечения. Если  $v_0$  принимает значение  $q$  на каком-либо узле без точек самопересечения, то он принимает то же самое значение и на всех других узлах без точек самопересечения. В самом деле, соотношение (4.1) показывает, что если два узла получаются друг из друга заменой типа одного перекрестка, то значения  $v_0$  для этих двух узлов отличаются на значение  $v_0$  для сингулярного узла с точкой самопересечения, соответствующей этому перекрестку. Но значение  $v_0$  на таком узле равно нулю. А так как любые два узла без точек самопересечения получаются друг из друга с помощью конечного числа замен типов перекрестков (см. теорему 3.8), то значение  $v_0$  на любом узле без особых точек равно  $q$ . Таким образом,  $V_0 = \mathbb{R}$  и  $\dim V_0 = 1$ .

Итак, с помощью инвариантов порядка 0 узлы различать нельзя. Оказывается, что инварианты порядка 1 тоже не различают узлы. Как мы сейчас увидим,  $V_1 = V_0$ , потому что любой инвариант  $v_1$  обращается в нуль на любом узле, имеющем хотя бы одну точку самопересечения (хотя и в определении говорится лишь то, что он равен нулю на узле с *двумя* точками самопересечения). В самом деле, пусть  $k_1$  — узел с одной точкой самопересечения, а узел  $k'_1$  получен из узла  $k_1$



одной заменой типа перекрестка. Тогда из соотношения (4.1) следует, что  $v_1(k_1) - v_1(k'_1) = v_1(k_2)$ , где узел  $k_2$  имеет две точки самопересечения. Согласно определению  $v_1(k_2) = 0$ , а значит,  $v_1(k_1) = v_1(k'_1)$ . Таким образом, при заменах типов перекрестков узла  $k_1$  значение инварианта  $v_1$  не изменяется. Если количество точек самопересечения узла  $k_1$  больше 1, то  $v_1(k_1) = 0$  по определению. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда узел  $k_1$  имеет ровно одну точку самопересечения. Она разбивает узел на две части. Каждую из них можно превратить в тривиальный узел, а затем их можно расцепить, изменяя подходящим образом типы перекрестков (рис. 4.2); значение инварианта  $v_1$  при этом не изменяется. В результате получаем узел  $\infty$ , для которого значение любого инварианта Васильева равно нулю в силу одночленного соотношения (4.2). Итак, мы получили неутешительный результат:

$$V_0 = V_1 = \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

К счастью, теория становится содержательной уже на следующем шаге, т.е. для инвариантов порядка 2. Но предварительно нам потребуются еще некоторые основные определения и факты.

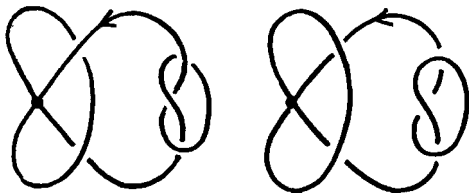


Рис. 4.2

Отметим, что использованные в связи с рис. 4.2 рассуждения фактически доказывают следующее более общее утверждение.

**4.6. Лемма.** *Значение инварианта Васильева порядка  $n$  на узле с ровно  $n$  точками самопересечения не изменяется при заменах типа перекрестков.*

**4.7. Символ.** Займемся теперь инвариантами произвольного порядка  $n$ . Для этого попытаемся описать строение

факторпространства  $V_n/V_{n-1}$ . Если нас интересует инвариант порядка  $n$  с точностью до инвариантов порядка  $n - 1$ , то удобно рассматривать не сам инвариант, а его символ.

*Символом* инварианта Васильева порядка  $n$  называют его ограничение на множество сингулярных узлов, имеющих ровно  $n$  точек самопересечения.

Важность понятия символа инварианта связана с тем, что два инварианта порядка  $n$  с одним и тем же символом отличаются на инвариант порядка не более  $n - 1$ . В самом деле, их разность  $v$  обращается в нуль на любом узле с  $n$  точками самопересечения. Формула (4.1) показывает, что значение любого инварианта Васильева на узле с  $n + 1$  точкой самопересечения равно разности его значений на двух узлах с  $n$  точками самопересечения. Поэтому  $v$  обращается в нуль на всех узлах с  $n + 1$  точкой самопересечения. Аналогично  $v$  обращается в нуль на всех узлах с  $n + 2$  точками самопересечения и т.д.

**4.8. Диаграммы Гаусса.** Лемма 4.6 показывает, что значение инварианта порядка  $n$  на узлах с  $n$  точками самопересечения (т.е. значение символа инварианта) не изменяется при замене типов перекрестков. Таким образом, это значение не зависит от заузленности, а зависит лишь от того, в какой последовательности встречаются точки самопересечения при обходе узла. Эту последовательность удобно задавать следующим образом. Рассмотрим узел  $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  с  $n$  точками самопересечения. Будем обходить окружность  $S^1$  в соответствии с ее ориентацией и отмечать на ней точки, образы которых соответствуют точкам самопересечения. Затем каждую пару отмеченных точек, соответствующих одной и той же точке самопересечения, соединим хордой (рис. 4.3). То, что получается в результате такой операции, называют *хордовой диаграммой* или *диаграммой Гаусса* порядка  $n$ .

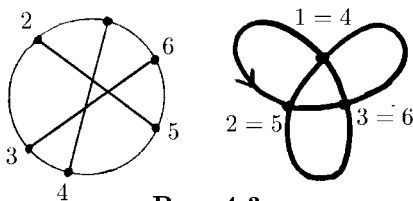


Рис. 4.3

Две диаграммы Гаусса считаются эквивалентными, если они получаются друг из друга диффеоморфизмом окружности  $S^1$ , сохраняющим ориентацию. На рис. 4.4 изображены все различные диаграммы Гаусса порядка  $n = 1, 2, 3$ . Отметим, что у всех узлов без точек самопересечения хордовая диаграмма одна и та же (она состоит из пустого множества хорд).

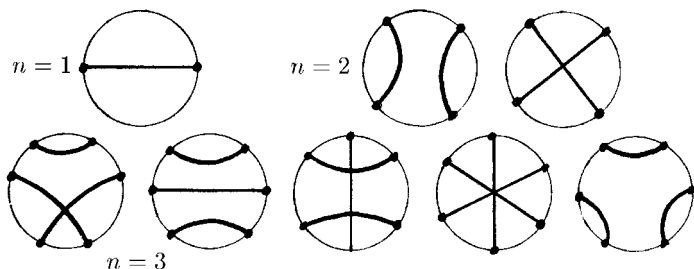


Рис. 4.4

**Задача 4.2.** Проверьте, что все диаграммы Гаусса порядка  $n \leq 3$  эквивалентны своим зеркальным отражениям, а при  $n = 4$  укажите пример диаграммы, неэквивалентной своему зеркальному образу.

Легко убедиться, что любая хордовая диаграмма соответствует некоторому сингулярному узлу. В самом деле, рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  движущуюся точку. На ее траектории начнем отмечать будущие точки самопересечения в том порядке, в каком они встречаются на данной хордовой диаграмме. Если должна появиться точка самопересечения, соответствующая уже отмеченной ранее точке  $A$  траектории, то направим траекторию к точке  $A$  и пересечем в ней траекторию трансверсально. Так будем действовать до тех пор, пока не исчерпаем все точки самопересечения. После этого направим траекторию к начальной точке, чтобы получить замкнутую траекторию. В трехмерном пространстве нет препятствий к этой процедуре. На рис. 4.5 изображены два узла с двумя точками самопересечения, соответствующие двум диаграммам Гаусса порядка 2.

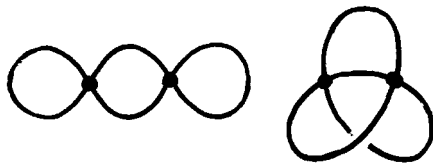


Рис. 4.5

**Задача 4.3.** Нарисуйте 5 узлов, соответствующих диаграммам Гаусса порядка 3.

Для последующего изложения полезно переформулировать лемму 4.6 на языке символов и хордовых диаграмм.

**4.9. Лемма.** *Значение символа инварианта Васильева порядка  $n$  на узле с  $n$  точками самопересечения зависит только от диаграммы Гаусса этого узла.*

**4.10.** Пусть  $e_1, \dots, e_k$  — множество всех различных хордовых диаграмм порядка  $n$ . Так как символ зависит только от диаграммы Гаусса и не зависит от заузленности (см. лемму 4.9), то любой символ порядка  $n$  полностью определяется своими значениями на диаграммах  $e_1, \dots, e_k$ . Поэтому любому элементу  $v_n$  пространства  $V_n/V_{n-1}$  можно сопоставить набор чисел  $(v_n(e_1), \dots, v_n(e_k)) \in \mathbb{R}^k$ , а этому набору можно сопоставить линейную функцию на пространстве  $\mathbb{R}^k$  с фиксированным базисом  $e_1, \dots, e_k$ . В результате получаем монормфное линейное отображение  $V_n/V_{n-1} \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$ . Легко убедиться, что это отображение не эпиморфно. Например, любой инвариант Васильева обращается в нуль на узле  $\infty$ , соответствующем диаграмме  $\bigoplus$ . Поэтому линейной функции, принимающей на элементе  $\bigoplus$  ненулевое значение, не может соответствовать никакой элемент пространства  $V_1/V_0$ .

На языке хордовых диаграмм одночленное соотношение и обобщенное одночленное соотношение записываются следующим образом:

$$\bigcirc = 0, \quad \bigoplus = 0. \quad (4.5)$$

Эти формулы означают, что символ любого инварианта конечного порядка обращается в нуль на хордовой диаграмме, одна из хорд которой не пересекает остальные хорды.

Что же касается четырехчленного соотношения, то на языке хордовых диаграмм оно выражается следующей формулой:

$$\text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} = 0. \quad (4.6)$$

Эта формула означает, что альтернированная сумма символов диаграмм, у которых  $n - 2$  хорды совпадают (на рисунке они не изображены), а две оставшиеся хорды устроены так, как показано на рисунке, равна нулю при условии, что отсутствующие  $n - 2$  хорды не заканчиваются в запретных дугах окружности (на рисунке эти дуги выделены утолщением). Чтобы доказать это утверждение, возьмем предыдущую версию четырехчленного соотношения (4.3) и дополним кривые, расположенные внутри пунктирной окружности до замкнутой кривой (это можно сделать двумя существенно различными способами: см. рис. 4.6). Из полученных двух картинок вытекает соотношение (4.6).

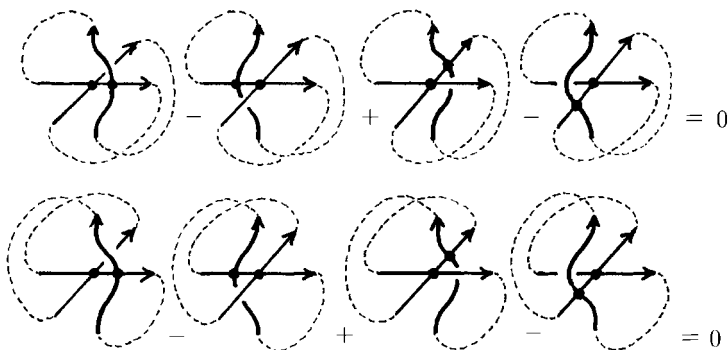


Рис. 4.6

4.11. Пусть  $U$  — линейное пространство с базисом  $e_1, \dots, e_k$ , а  $U^*$  — двойственное пространство, т.е. пространство линейных функций на  $U$ . Рассмотрим в  $U^*$  подмножество  $F$ , любой элемент  $f$  которого удовлетворяет соотношениям

$$\sum \lambda_{1i} f(e_i) = 0, \dots, \sum \lambda_{pi} f(e_i) = 0,$$

где  $\lambda_{ij}$  — фиксированные действительные числа. Рассмотрим также подпространство  $U_1 \subset U$ , порожденное векторами

$$w_1 = \sum \lambda_{1i} e_i, \dots, w_p = \sum \lambda_{pi} e_i.$$

Любой элемент  $f \in F$  обращается в нуль на пространстве  $U_1$ , поэтому  $F$  можно отождествить с некоторым подмножеством в пространстве  $(U/U_1)^*$ .

Вернемся к рассмотрению пространства  $\mathbb{R}^k$ , базисом которого служат все различные хордовые диаграммы  $e_1, \dots, e_k$  порядка  $k$ . Запишем в этом базисе все равенства, вытекающие из одночленного соотношения (4.5) и четырехчленного соотношения (4.6). Пусть эти равенства имеют вид

$$\begin{aligned} v(e_p) = 0, \dots, v(e_s) = 0, \\ v(e_a) - v(e_b) + v(e_c) - v(e_d) = 0, \dots, \\ v(e_\alpha) - v(e_\beta) + v(e_\gamma) - v(e_\delta) = 0. \end{aligned}$$

Тогда символ инварианта порядка  $n$  можно отождествить с некоторой линейной функцией на пространстве  $\Delta_n = \mathbb{R}^k/U_1$ , где пространство  $U_1$  порождено векторами

$$e_p, \dots, e_s, e_a - e_b + e_c - e_d, \dots, e_\alpha - e_\beta + e_\gamma - e_\delta.$$

Пространство  $\Delta_n$  можно представлять себе как пространство, порожденное векторами  $e_1, \dots, e_k$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$e_p = 0, \dots, e_s = 0, e_a + e_c = e_b + e_d, \dots, e_\alpha + e_\gamma = e_\beta + e_\delta.$$

Мы показали, что существует естественный мономорфизм пространства  $V_n/V_{n-1}$  в пространство  $\Delta_n^*$ .

Это утверждение может, однако, не выражать ничего содержательного: мы не доказали, что ненулевые инварианты Васильева конечного порядка действительно существуют. Доказательство их существования содержится в работах [Vas1], [Car], [BN]. Справедливо также следующее более сильное утверждение.

**4.12. Теорема Концевича.** *Инварианты Васильева порядка  $n$  образуют такое линейное пространство  $V_n$ , что факторпространство  $V_n/V_{n-1}$  изоморфно пространству  $\Delta_n^*$  линейных функций на хордовых диаграммах порядка  $n$  по модулю одночленного и четырехчленного соотношения.*

Доказательство этой теоремы весьма сложно (см. [BN]); мы его не приводим.

**4.13.** Чтобы вычислить значения инвариантов Васильева для конкретного узла, нужно выбрать базис в пространстве  $\Delta_n$  хордовых диаграмм и разложить по этому базису остальные ненулевые диаграммы. С увеличением  $n$  сложность решения этой задачи стремительно возрастает. Уже при  $n = 9$  ее решение требует многодневной работы мощного компьютера. Мы ограничимся нахождением базисов для  $n = 2, 3$  и 4.

Пространство  $\Delta_2$  порождено диаграммой  $\bigotimes$ . Другая диаграмма с двумя хордами  $\bigcirc \bigcirc$  равна нулю в силу одночленного соотношения.

В пространстве  $\Delta_3$  есть две ненулевые диаграммы, а именно,  $\bigotimes$  и  $\bigoplus$ . Но эти диаграммы линейно зависимы. В самом деле, из четырехчленного соотношения (4.6) следует, что

$$\bigcirc \bigcirc \bigcirc - \bigcirc \bigcirc \bigcirc + \bigcirc \bigcirc \bigcirc - \bigcirc \bigcirc \bigcirc = 0.$$

А так как третья диаграмма нулевая в силу одночленного соотношения, получаем

$$v_3(\bigotimes) = 2v_3(\bigoplus) \tag{4.7}$$

для любого  $v_3 \in V_3$ .

**Задача 4.4.** а) Доказать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bigotimes &= \bigoplus + \bigoplus, & \bigoplus + \bigoplus &= 2\bigoplus \\ \bigoplus &= \bigoplus + \bigoplus, & \bigotimes &= \bigoplus + \bigoplus \\ \bigoplus + \bigoplus &= \bigotimes + \bigoplus. \end{aligned}$$

б) Доказать, что  $\dim \Delta_4 = 3$ , причем в качестве базиса этого пространства можно выбрать диаграммы

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right\}.$$

**4.14.** Теперь мы можем произвести конкретные вычисления инвариантов Васильева для простейших узлов. Мы убедились в 4.5, что инварианты порядков 0 и 1 не различают узлы, поэтому начнем с инвариантов порядка 2. Символы инвариантов порядка 2 образуют одномерное пространство. Чтобы фиксировать базисный инвариант  $v_2 \in V_2$ , можно положить

$$v_2(\otimes) = 1, \quad v_2(\circ) = 0. \quad (4.8)$$

Первое условие определяет символ инварианта  $v_2$ , а выполнения второго условия можно добиться, вычтя (при необходимости) инвариант порядка 0 (а именно, если  $v_2(\circ) = r \neq 0$ , то нужно вычесть инвариант порядка 0, принимающий значение  $r$  на всех узлах без точек самопересечения).

Вычисление начнем с трилистника. Для краткости вместо  $v(k) = v(k_1) + v(k_2)$  будем писать  $k = k_1 + k_2$ , опуская в подобных случаях  $v$ . Так как после изменения типа любого перекрестка трилистник превращается в тривиальный узел, то мы имеем соотношения, изображенные на рис. 4.7.

$$\begin{array}{ccccccc} k & = & \text{---} & = & \text{---} & + & \text{---} & = \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & \\ & = & \text{---} & = & \text{---} & + & \text{---} & = \\ & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & \end{array}$$

Рис. 4.7



Аналогичные вычисления для левого трилистника приводят к результату, изображенному на рис. 4.8. В обоих случаях получаем узел с хордовой диаграммой  $\otimes$ , поэтому, для обоих узлов значение инварианта  $v_2$  равно 1.

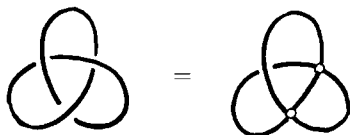


Рис. 4.8

Но инварианты Васильева третьего порядка уже позволяют отличить левый трилистник от правого. В самом деле, вычисления, изображенные на рис. 4.9 приводят к сингулярному узлу с диаграммой Гаусса  $\otimes$ . Следовательно, если мы положим  $v_3(\otimes) = 1$ , то значения инварианта  $v_3$  на левом трилистнике и правом трилистнике будут отличаться на 1.

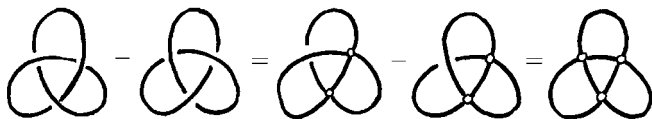


Рис. 4.9

Рассмотрим теперь узел восьмерку (рис. 4.10). У этого узла есть два вида перекрестков, помеченных знаками + и -.

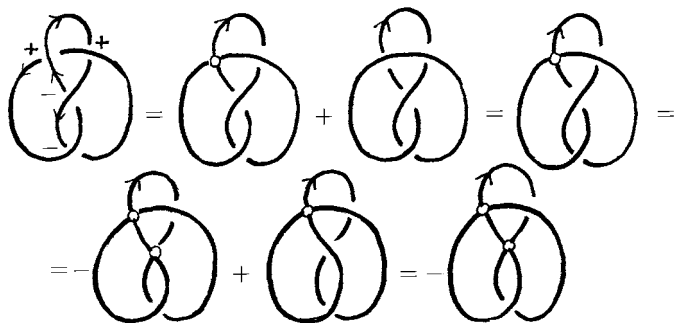


Рис. 4.10

Согласно соотношению (4.1), после замены типа перекрестка для перекрестков, помеченных знаком  $+$ , узел с новой точкой самопересечения нужно прибавить, а для перекрестка, помеченного знаком  $-$ , его нужно вычесть. Учитывая это, получаем равенства, изображенные на рис. 4.10. Следовательно, значение инварианта  $v_2$  для узла восьмерка равно  $-1$ .

Наконец, вычислим значение инварианта  $v_2$  для торического узла типа  $(2,5)$  (на рис. 4.11 этот узел третий с конца).

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} = (\text{Diagram 4} - \text{Diagram 5}) - (\text{Diagram 6} - \text{Diagram 7}) = \\
 & = \text{Diagram 8} - 2 \text{Diagram 9} \Rightarrow v_2(\text{Diagram 8}) = 2v_2(\text{Diagram 9}) + v_2(\text{Diagram 10}) = 3
 \end{aligned}$$

Рис. 4.11

Вычисления удобно начать с узла с двумя точками самопересечения (на рисунке этот узел первый), а затем уничтожить точки самопересечения с помощью соотношения (4.1). В результате получим наш торический узел, тривиальный узел и два трилистника. Значение  $v_2$  на тривиальном узле равно 0 в силу условия нормировки (4.8). Согласно лемме 4.9 значение инварианта  $v_2$  на узле с двумя точками самопересечения полностью определяется его диаграммой Гаусса. Для первого узла на рис. 4.11 диаграмма Гаусса имеет вид  $\otimes$ , поэтому значение  $v_2$  на этом узле равно 1. В итоге получаем, что значение  $v_2$  на торическом узле типа  $(2,5)$  равно 3.

## Комментарии

В нашем изложении полиномиальные инварианты узлов (зацеплений) появились в порядке, обратном их хронологическому порядку. Это связано с тем, что позднейшие изобретения более элементарны, чем предшествующие, но они позволяют воспроизвести ранние версии. Исторически первым появился полином Александра ([Ale2], 1923). Первоначально

он был построен, грубо говоря, как определитель оператора монодромии в одномерной группе гомологий абелева накрытия дополнения данного узла. Подробное и весьма понятное изложение полинома Александра читатель может найти в книге [CF]. Хотя Александр (как и многие другие, занимавшиеся теорией узлов) знал и использовал соотношение типа Конвея (см. (1') на с. 44), лишь много лет спустя Дж. Конвей обнаружил, что это соотношение можно использовать в качестве основы для аксиоматического подхода к полиномиальным инвариантам, и изобрел свою версию полинома Александра ([Con], 1973; следует отметить, что эта чрезвычайно важная работа в Советском Союзе была недоступна — она стала известна российским топологам лишь в конце 80-х, после появления работы [Jon 1]). После этого и после появления полинома Джонса новые полиномы, опирающиеся на различные версии соотношения Конвея, начали появляться в изобилии.

Наиболее естественный полином от двух переменных с «однородным» соотношением (см. 3.12) был открыт одновременно почти дюжиной математиков. На западе шестеро из них (P. Freyd, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, D. Yetter) опубликовали совместную работу [FH...], а двое польских исследователей (J. Przytycki и P. Trazcyk) позднее опубликовали работу [PT]. В соответствии с первой публикацией этот полином не слишком справедливо называют НОМ-FLY в честь шестерых западных авторов.

Открытие полинома Джонса было весьма неожиданно и драматично. Воган Джонс, математик из Новой Зеландии, занимавшийся представлениями алгебр фон Неймана, использовал для их исследования так называемый след Окнеану. После одного из его докладов Джоан Бирман, ведущий специалист по теории кос, указала на поразительное формальное сходство между свойствами этого следа и преобразованиями Маркова (они устанавливают связь между косами и зацеплениями; мы обсудим их в следующей главе). После этого, проделав некоторые остроумные вычисления, Джонс смог построить свой полином ([Jon 1]). Мы не включили эту конструкцию в нашу книгу по двум причинам. Во-первых, она далеко не элементарна (она опирается, среди всего прочего,

на алгебры Гекке, след Окнеану и теорему Маркова о косах). Во-вторых, подробное изложение этой конструкции, позднее опубликованное самым Джонсом, столь ясно и полно, что мы советуем заинтересованному читателю обратиться непосредственно к статье [Jon 2].

На работу Вогана Джонса немедленно обратили внимание, в частности, М. Атья (на его семинаре Джонс сделал доклад), «Н. Бурбаки» (на семинаре Бурбаки первые сообщения об этой работе были сделаны А. Конном и П. Картье), О. Виро и В. Тураев в Ленинграде и один из авторов этой книги в Москве. Воодушевление математического сообщества было вызвано не столько чисто теоретико-узловыми аспектами этой работы, сколько открывающимися глубокими связями с операторными алгебрами (оригинальная статья В. Джонса), статистической физикой (В. Джонс [Jon 3] и Л. Кауфман [Kau 2]), алгебрами Хопфа (В. Дринфельд [Dri 1-2]) и квантовой теорией поля (Э. Виттен [Wit2] и М. Атья [Ati 1-3]). Как и следовало ожидать, Воган Джонс был награжден медалью Филдса в 1990 году вместе с Дринфильдом и Виттеном. Математическая версия инвариантов Виттена (основанная на работах многих авторов, включая В. Тураева, Н. Решетихина, О. Виро и В. Б. Р. Ликориша (см. [RT 1-2], [TV], [Lic 4]) содержится в главе IX этой книги.

При изложении полинома Джонса мы использовали замечательный подход Луиса Кауфмана, инспирированный методами статистической физики.

В противоположность полиному Джонса потребовалось весьма много времени, чтобы инварианты Васильева (иногда их называют *инвариантами конечного типа*) стали известны достаточно широкому кругу математиков. И это несмотря на то, что оригинальная работа Васильева была опубликована по-английски с полными доказательствами сразу же после того, как она была завершена ([Vas 1], 1990), причем с самого начала было ясно, что эти инварианты сильнее полинома Джонса от одной переменной и их можно обобщить и на другие объекты. Общая конструкция спектральной последовательности Васильева, предназначенной для вычисления значений инвариантов узлов и других объектов, появилась вскоре в виде книги [Vas 2]. (М. Гусаров, независимо от Ва-

ильева, обнаружил другой подход к инвариантам конечного типа, но его препринт на эту тему был опубликован гораздо позже.) Замечательную связь между инвариантами Васильева и Джонса нашли вскоре Джоан Бирман и К.-С. Лин; их препринт был широко известен задолго до появления совместной статьи [BL]. Доклады Дж. Бирман способствовали тому, что эта тема стала более популярной. Популяризации инвариантов Васильева послужили также препринт [Sos] и пленарный доклад В.И. Арнольда на Первом математическом Евроконгрессе. Более содержательными были замечательные статьи М. Концевича [Kon 1-2], в которых появился весьма необычный интеграл, выражающий инварианты Васильева, а также статья Д. Бар Натана [BN], который дал доказательство теоремы Концевича (см. 4.12) и предложил совсем другой подход к инвариантам Васильева, основанный на представлениях простых алгебр Ли. Позднее П. Картье нашел «чисто комбинаторное» доказательство существования инвариантов Васильева, а С. Чмутов, С. Дужин и С. Ландо ([CDL]) обнаружили глубокую связь между этими инвариантами и полиномами Татта (обобщающими хроматический полином графа).

До сих пор не известно, являются ли инварианты Васильева полной системой инвариантов узлов, т.е. всегда ли они позволяют различить два неизотопных узла (*гипотеза Васильева*). Но, как мы убеждены, их важное значение не зависит от того, сколь хорошо они осуществляют классификацию узлов. Оно связано с общностью подхода к определению инвариантов (многих различных объектов), который можно назвать подходом Арнольда–Васильева. Помимо узлов этот подход сейчас применен к зацеплениям, косам, плоским кривым, погружениям в плоскость нескольких окружностей, некоторым многомерным зацеплениям, вложениям графов и даже к нильпотентным группам. Этот список наверняка увеличится к тому моменту, когда эта книга выйдет из печати.

## Глава III

### Косы

Косы — это очень красивый и полезный объект. Мы уже рассматривали косы на интуитивном уровне в §2 и отметили, что косы (в отличие от узлов) образуют группу. Первоначально они были предложены Э. Артином в качестве математической модели для использования в текстильной промышленности, но их приложения оказались многочисленными как в математике (комплексные полиномы, узлы и зацепления, представление функции от  $n$  переменных в виде композиции функций от меньшего числа переменных), так и в физике (классическая механика, статистическая физика, квантовая теория поля). В некотором смысле (этому можно придать точное значение) можно сказать, что косы являются квантовыми аналогами подстановок. Помимо того, соотношения Артина для группы кос (см. (5.1)) оказываются просто-напросто другим способом записи уравнений Янга–Бэкстера (фундаментальное соотношение в двумерной статистической физике, которое также описывает поведение частиц в одномерной квантовой теории). Эта аналогия является одним из главных источников глубоких связей между физикой и теорией узлов.

Именно тесная связь между косами и зацеплениями (которую мы обсудим в §6) и аналогии с физикой привели Э. Виттена и его последователей к обобщению полинома Джонса до инвариантов зацеплений в произвольных замкнутых ориентируемых трехмерных многообразиях. Но нам придется пройти немалый путь, прежде чем обратиться непосредственно к этой теме (глава IX).

Мы начнем с того, что взглянем на группу кос с точки зрения геометрии, алгебры, комплексных полиномов, гомотопической топологии и классической механики.

## §5. Группа кос

**5.1. Геометрическое определение.** Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^3$  точки  $A_i = (i, 0, 0)$  и  $B_i = (i, 0, 1)$ , где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Будем называть ломаную, соединяющую точку  $A_i$  с некоторой точкой  $B_j$  *восходящей*, если при движении точки по ломаной от  $A_i$  к  $B_j$  ее  $z$ -координата монотонно возрастает. Иными словами, каждая горизонтальная плоскость пересекает восходящую ломаную ровно в одной точке.

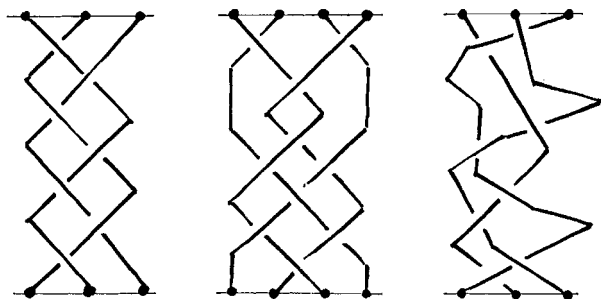


Рис. 5.1

*Косой* из  $n$  нитей называют набор из  $n$  попарно непересекающихся восходящих ломаных, соединяющих точки  $A_1, \dots, A_n$  с точками  $B_1, \dots, B_n$  (в произвольном порядке). Примеры кос изображены на рис. 5.1.

*Эквивалентность* кос определяется аналогично эквивалентности (полигональных) узлов и зацеплений (рис. 5.2 (а)) с единственным дополнительным условием: ломаная  $ABC$  должна быть восходящей, т. е. преобразование, изображенное на рис. 5.2 (b), недопустимо.

Термин «коса» мы будем использовать как для класса эквивалентности, так и для конкретного представителя этого класса. Что именно имеется в виду, всегда ясно из контекста.

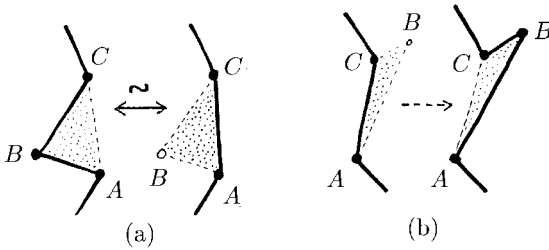


Рис. 5.2

Можно также рассматривать косы, нитями которых являются восходящие гладкие кривые, а не ломаные. Эквивалентность кос в этом случае определяется как изотопия, т.е. непрерывная деформация в классе кос. Как и в случае зацеплений, это приводит к той же самой теории, что и полигональный подход.

**5.2. Групповая структура.** Множество классов эквивалентных кос из  $n$  нитей имеет естественную структуру группы.

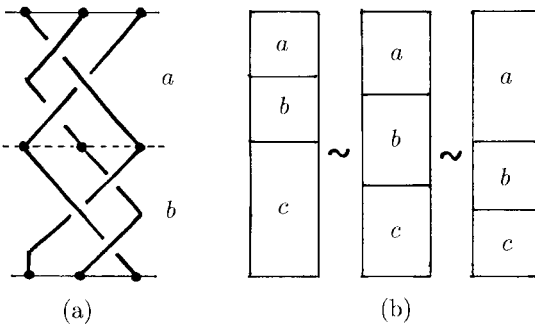


Рис. 5.3

Произведение двух кос  $a$  и  $b$  получается в результате соединения их концов. Более точно, это означает следующее. Сожмем косу  $a$  в вертикальном направлении в два раза, оставляя ее верхние точки неподвижными, а косу  $b$  сожмем в вертикальном направлении в два раза, оставляя неподвижными ее нижние точки. Тогда *произведением* двух кос  $a$  и



$b$  называют объединение двух сжатых кос (рис. 5.3 (а)). Из рис. 5.3 (б) видно, что определенное таким образом произведение ассоциативно на множестве классов эквивалентности кос, т.е.  $(ab)c = a(bc)$  для любых трех классов  $a, b, c$ .

Единичным элементом служит коса, состоящая из  $n$  параллельных вертикальных нитей. Легко убедиться (рис. 5.4), что обратным элементом  $b^{-1}$  к данной косе  $b$  служит коса, полученная из косы  $b$  симметрией относительно плоскости  $z = 1/2$  (вспомните фокус с расплетением кос из §2).

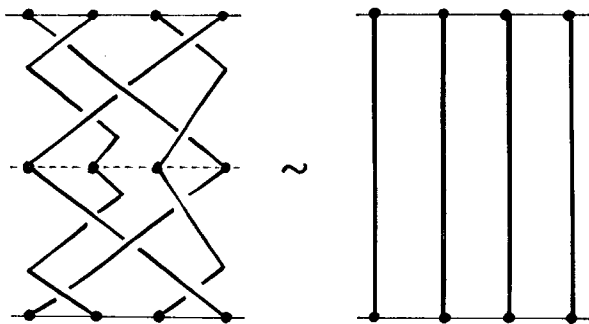


Рис. 5.4

Множество классов эквивалентности кос из  $n$  нитей с заданной указанным выше способом операцией называют *группой кос* и обозначают  $B_n$ .

**5.3. Образующие группы кос.** Группу кос  $B_n$  можно задать с помощью образующих и соотношений между образующими. Чтобы сделать это, заметим сначала, что в классе эквивалентности каждой косы есть представитель, проекция которого на координатную плоскость  $xz$  обладает следующими свойствами:

- (1) проекции нитей не касаются друг друга ни в какой точке;
- (2) ни в какую точку плоскости  $xz$  не попадают проекции трех и более различных нитей;
- (3) все перекрестки расположены на разной высоте (над плоскостью  $xy$ ).

Можно считать, что этот представитель устроен так, как показано на рис. 5.5 (а). Поэтому любую косу можно представить в виде произведения элементов  $b_i^{\pm 1}$ , где  $b_i$  — коса, изображенная на рис. 5.5 (б). Таким образом, элементы  $b_1, \dots, b_{n-1}$  порождают группу  $B_n$ .

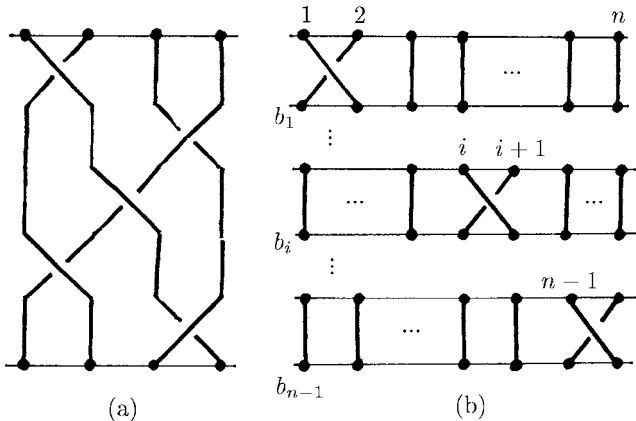


Рис. 5.5

**5.4. Соотношения Артина.** Чтобы найти соотношения между образующими, нужно рассмотреть преобразования, при которых нарушаются свойства (1)–(3). Свойство (1) нарушается при преобразовании, изображенном на рис. 5.6. Это преобразование приводит к соотношению  $b_i b_i^{-1} = 1$ , которое выполняется в любой группе.

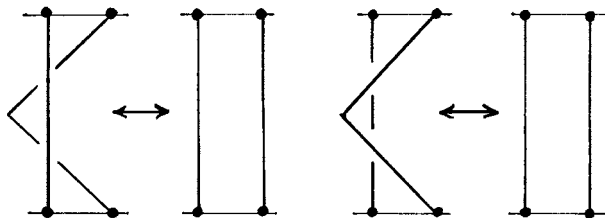


Рис. 5.6

Свойство (2) нарушается при нескольких различных преобразованиях. Три из них изображены на рис. 5.7. Первое

преобразование приводит к соотношению

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}, \quad (5.1)$$

второе и третье преобразования приводят к соотношениям

$$b_i b_{i+1} b_i^{-1} = b_{i+1}^{-1} b_i b_{i+1}, \quad b_i^{-1} b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1}^{-1},$$

но эти соотношения эквивалентны соотношению (5.1). Остальные преобразования, при которых появляются тройные точки пересечения, получаются из преобразований, изображенных на рис. 5.7, с помощью симметрии относительно плоскости диаграммы. Эти преобразования тоже приводят к соотношениям, которые сводятся к соотношению (5.1).

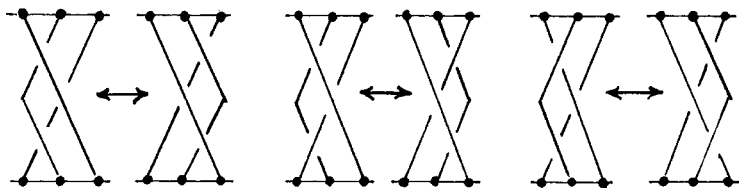


Рис. 5.7

Свойство (3) нарушается при преобразовании, изображенном на рис. 5.8. Это преобразование приводит к соотношению (называемому *дальней коммутативностью*)

$$b_i b_j = b_j b_i \quad \text{при} \quad |i - j| \geq 2, \quad (5.2)$$

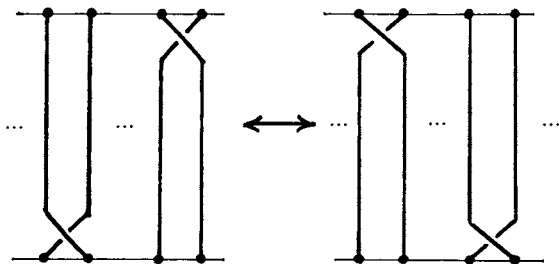


Рис. 5.8

Оказывается, что полученные нами соотношения полностью описывают группу  $B_n$  с алгебраической точки зрения.

**5.5. Теорема Артина.** *Группа кос  $B_n$  изоморфна абстрактной группе, порожденной образующими  $b_1, \dots, b_{n-1}$ , которые удовлетворяют соотношениям (5.1) и (5.2).*

*Доказательство.* Мы уже показали, что группа  $B_n$  порождена элементами  $b_1, \dots, b_{n-1}$  и эти элементы удовлетворяют соотношениям Артина (5.1) и (5.2). Остается доказать, что любое соотношение между косами следует из этих соотношений (и тривиальных групповых соотношений  $bb^{-1} = b^{-1}b = 1$ ,  $b1 = 1b = b$ ). С геометрической точки зрения это означает, что если некоторая коса эквивалентна тривиальной косе, то эту эквивалентность можно установить с помощью геометрических преобразований, соответствующих указанным в формулировке теоремы соотношениям.

Определение эквивалентности кос показывает, что достаточно рассмотреть элементарное преобразование  $[AB] \mapsto [AC] \cup [CB]$ . В этом случае доказательство аналогично доказательству теоремы Рейдемейстера (см. 1.7). Прежде всего разобьем треугольник  $ABC$  на мелкие треугольники типов I–IV (см. начало доказательства теоремы 1.7 и рис. 1.13) и заменим рассматриваемое элементарное преобразование последовательностью элементарных преобразований для полученных мелких треугольников, начиная со стороны  $[AB]$  и двигаясь к  $[AC] \cup [CB]$ .

Завершение доказательства аналогично доказательству теоремы Рейдемейстера, за исключением двух моментов. Во-первых, нам не нужно заботиться о «входящих звеньях» (вспомните рис. 1.12 (а)), потому что в случае косы таких звеньев нет (нити косы восходящие). Во-вторых, мы должны позаботиться о запрещенной проекции типа (3) (перекрестки на одной высоте), которая не интересовала нас в 1.7. Такая проекция может возникнуть в том случае, когда элементарное преобразование для маленького треугольника приводит к плоской изотопии, изменяющей высоту (т.е. координату  $z$ ) перекрестка. Но это в точности соответствует ситуации, в которой появляется соотношение (5.2). Что же касается двух других запрещенных проекций, то (1) соответствует преобразованию  $\Omega_2$ , т.е. одному из тривиальных соотноше-

ний в группе, а (2) соответствует преобразованию  $\Omega_3$ , т.е. соотношению, эквивалентному соотношению (5.1).

Таким образом, все элементарные преобразования для мелких треугольников соответствуют соотношениям из перечисленного выше списка, что и доказывает теорему.  $\square$

При малых  $n$  группы  $B_n$  устроены следующим образом. Группа  $B_1$  состоит из одного единичного элемента. Группа  $B_2$  изоморфна  $\mathbb{Z}$ , а группа  $B_3$  порождена двумя образующими  $x$  и  $y$ , связанными единственным соотношением  $xyx = yxy$ .

**Задача 5.1.** а) Доказать, что группа  $B_3$  изоморфна группе, порожденной образующими  $a$  и  $b$ , связанными соотношением  $a^2 = b^3$ .

б) Доказать, что элемент  $(xy)^3$  лежит в центре группы  $B_3$ .

**5.6. Механическая интерпретация.** Рассмотрим конфигурационное пространство  $C(n, \mathbb{R}^2)$  механической системы, состоящей из  $n$  неразличимых попарно не совпадающих точек на плоскости. Пространство  $C(n, \mathbb{R}^2)$  состоит из неупорядоченных наборов из  $n$  попарно различных точек  $\mathbb{R}^2$ ; оно снабжено естественной топологией. В качестве отмеченной точки этого пространства возьмем набор  $\omega = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$ . Легко убедиться, что петли в пространстве  $C(n, \mathbb{R}^2)$  с началом и концом в точке  $\omega$  находятся во взаимно однозначном соответствии с косами из  $n$  нитей. В самом деле, пусть в момент времени  $t_0$ , где  $0 \leq t_0 \leq 1$ , петля проходит через элемент  $x(t_0) \in C(n, \mathbb{R}^2)$ . Элемент  $x(t_0)$  представляет собой плоскость с выделенными  $n$  точками. Поместим эту плоскость в трехмерном пространстве, добавив третью координату  $z = t_0$  (рис. 5.9). Сделав так для всех  $t_0 \in [0, 1]$ , получим косу из  $n$  нитей.

Ясно, что изотопия кос соответствует гомотопии петель, а умножение кос соответствует умножению петель. Таким образом, мы доказали, что

$$B_n = \pi_1(C(n, \mathbb{R}^2)),$$

т.е. фундаментальная группа конфигурационного пространства системы из  $n$  неразличимых точек на плоскости изоморфна группе кос  $B_n$ .

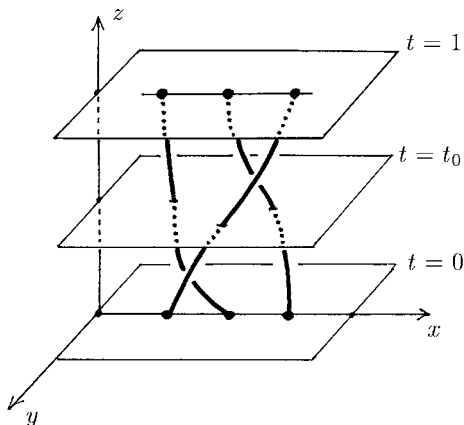


Рис. 5.9

Как показывает следующая задача, представленная выше механическая интерпретация допускает и чисто геометрическое описание.

**Задача 5.2.** Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{C}^n$  точки с попарно различными координатами и отождествим все точки, полученные друг из друга перестановкой координат. Докажите, что полученное в результате пространство гомеоморфно  $C(n, \mathbb{R}^2)$ .

**5.7. Интерпретация с комплексными полиномами.** Обозначим через  $P(n, \mathbb{C})$  топологическое пространство (с естественной топологией) полиномов степени  $n$  над полем  $\mathbb{C}$  со старшим коэффициентом 1 и без кратных корней.

**Задача 5.3.** Докажите, что  $\pi_1(P(n, \mathbb{C})) \cong B_n$ .

**Задача 5.4.** а) Докажите, что пространство  $P(3, \mathbb{C})$  гомотопически эквивалентно  $S^3 \setminus K$ , где  $S^3$  — трехмерная сфера,  $K$  — узел трилистник.

б) Докажите, что  $B_3 \cong \pi_1(S^3 \setminus K)$ .

**5.8. Проблема тождества для группы кос.** Проблема тождества для группы, заданной системой образующих и соотношений, заключается в том, чтобы найти алгоритм, позволяющий для любой пары слов в алфавите, состоящем из

образующих группы и обратных к ним элементов, выяснить, представляют ли эти слова один и тот же элемент группы или же разные элементы (т.е. можно ли одно слово преобразовать в другое слово, используя соотношения между образующими). Проблема тождества разрешима для группы кос  $B_n$  при всех  $n$ . Эта теорема была доказана Э. Артином (см. [Art2]). Однако соответствующий алгоритм весьма сложен и работает медленно. Вместо него мы опишем другой алгоритм, более свежий и более эффективный.

**5.9. Алгоритм Дюорнуа.** Этот алгоритм, как и алгоритм Артина, решает проблему тождества для группы кос. Его легко реализовать на компьютере. Чтобы описать работу этого алгоритма, нам понадобится одно определение и несколько обозначений.

Пусть  $B_n$ ,  $n \geq 2$ , — группа кос со стандартными образующими  $b_1, \dots, b_{n-1}$ . Слово  $w \in B_n$  назовем *редуцированным*, если буквы  $b_i$  и  $b_i^{-1}$  (в том случае, когда они обе встречаются в слове  $w$ ) всегда отделены друг от друга по крайней мере одной буквой  $b_j^{\pm 1}$ , где  $j < i$ . Например, слово  $b_2 b_1 b_2^{-1}$  редуцированное, а слово  $b_2 b_3 b_2^{-1}$  нередуцированное. Покажем, как любой элемент  $b \in B_n$  можно представить редуцированным словом. Пусть  $w$  — некоторое слово, представляющее элемент  $b$ . Если слово  $w$  нередуцированное, то оно имеет вид  $w_0 b_i^e w_1 b_i^{-e} w_2$ , где  $e = \pm 1$ , слово  $w_0$  редуцированное, а в слове  $w_1$  входят только буквы  $b_j^{\pm 1}$ , где  $j > i$ . Заменим слово  $w$  словом

$$R(w) = w_0 b_{i+1}^{-e} b_{i+2}^{-e} \dots b_{j-1}^{-e} f(w_1) b_{j-1}^e \dots b_{i+2}^e b_{i+1}^e w_2,$$

где  $j$  — наименьшее целое число, обладающее следующим свойством: при  $l \geq j$  буквы  $b_l$  и  $b_l^{-1}$  не входят в слово  $w_1$ , а преобразование  $f$  заменяет  $b_k^{\pm 1}$  на  $b_{k-1}^{\pm 1}$  при  $i < k < j$  и не изменяет другие образующие. Если  $j = i + 1$ , то  $b_j^{-e}$  и  $b_j^e$  сокращаются и  $f$  тождественно. Геометрически переход от  $w$  к  $R(w)$  выглядит так, как показано на рис. 5.10. Назовем операцию  $w \mapsto R(w)$  *элементарной редуkcией*. Ясно, что коса  $w$  изотопна косе  $R(w)$ , причем  $R(w)$  уже не содержит запрещенной комбинации  $b_i^e w_1 b_i^{-e}$ .

Повторяя эту процедуру, получим редуцированное слово, эквивалентное  $w$ .

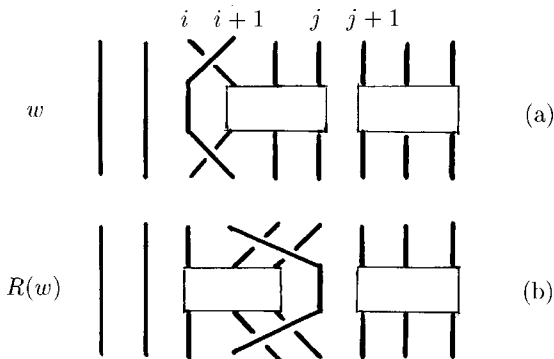


Рис. 5.10

Пусть, например,  $w = b_1^{-1}b_2b_1b_3^{-1}b_1^{-1}b_3^{-1}b_1$ . Будем производить элементарные редукции для запрещенных комбинаций, заключенных в скобки:

$$\begin{aligned}
 w &= (b_1^{-1}b_2b_1)b_3^{-1}b_1^{-1}b_3^{-1}b_1 \\
 R(w) &= b_2(b_1b_2^{-1}b_3^{-1}b_1^{-1})b_3^{-1}b_1 \\
 R^2(w) &= (b_2b_2^{-1})b_3^{-1}b_1^{-1}b_2^{-1}b_3b_2b_3^{-1}b_1 \\
 R^3(w) &= b_3^{-1}b_1^{-1}(b_2^{-1}b_3b_2)b_3^{-1}b_1 \\
 R^4(w) &= b_3^{-1}(b_1^{-1}b_3b_2b_3^{-1}b_3^{-1}b_1) \\
 R^5(w) &= b_3^{-1}b_2b_3b_2b_1b_2^{-1}b_2^{-1}b_3^{-1}b_2^{-1}
 \end{aligned}$$

Теперь мы можем описать алгоритм Дюорнуа. Пусть даны два слова  $w_1, w_2 \in B_n$ . Будем применять к ним элементарные редукции до тех пор, пока не получим редуцированные слова  $w'_1$  и  $w'_2$ . Сравним слова  $w'_1$  и  $w'_2$ . Если они совпадают (побуквенно), то данные слова представляют один и тот же элемент группы  $B_n$ . В противном случае, слова  $w_1$  и  $w_2$  представляют разные элементы группы  $B_n$ .

Возможность применения такого алгоритма основывается на следующих утверждениях, доказанных Дюорнуа:

- (1) Алгоритм редукции заканчивает свою работу за конечное число шагов.
- (2) Два слова представляют один и тот же элемент группы  $B_n$  тогда и только тогда, когда их редуцированные формы совпадают.



Мы не будем приводить весьма сложное доказательство этих утверждений (см. [Duh]). Сам алгоритм, однако, весьма прост (его легко реализовать на компьютере) и очень быстро работает: время работы предположительно пропорционально квадрату длины данных слов.

## §6. Теоремы Александра и Маркова

В этом параграфе мы изучим связь между косами и зацеплениями, возникающую из операции замыкания, при которой косе естественным образом сопоставляется зацепление. Мы покажем, что это сопоставление сюръективно (теорема Александра), но, как видно из простых примеров, не инъективно. «Степень неинъективности» алгебраически характеризует теорема Маркова.

**6.1.** *Замыканием* косы  $b$  называют зацепление  $\beta(b)$ , полученное из косы  $b$  в результате соединения верхних концов нитей с нижними, как показано на рис. 6.1. Сразу же возникает естественный вопрос: для каких кос их замыкания являются узлами, как на рис. 6.2 (а), а не многокомпонентными зацеплениями, как на рис. 6.2 (b)–(c). Чтобы ответить на этот вопрос нужно предварительно описать важную связь между группой кос и группой подстановок.

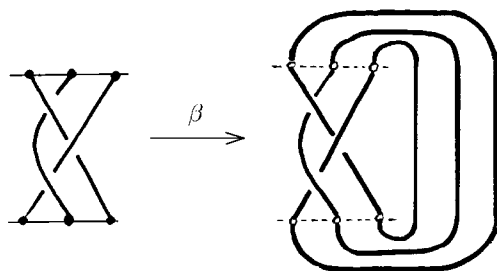


Рис. 6.1

**6.2.** Имеется естественный эпиморфизм  $\sigma : B_n \rightarrow S_n$  группы кос на группу подстановок. С геометрической точки зрения  $\sigma(b)$  представляет собой подстановку конечных точек косы, индуцированную нитями косы; например, для рис. 6.2 (c)

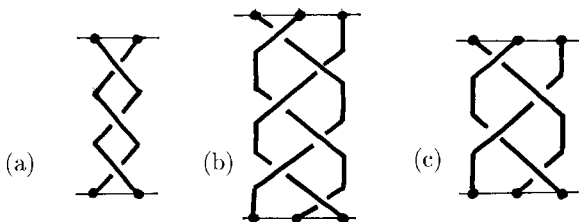


Рис. 6.2

получаем  $\sigma(b) = (2, 3, 1)$ . В терминах образующих отображение  $\sigma$  задается сопоставлением  $b_i \mapsto s_i$ , где  $s_i$  — транспозиция элементов с номерами  $i$  и  $i + 1$ . С терминах соотношений группа  $S_n$  получается из  $B_n$  добавлением соотношений  $b_i^2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Сюръективность отображения  $\sigma$  следует непосредственно из определения.

**6.3.** Теперь мы можем ответить на вопрос, поставленный в 6.1: замыкание  $\beta(b)$  косы  $b$  является узлом тогда и только тогда, когда подстановка  $\sigma(b)$ , соответствующая косе  $b$ , порождает в группе  $S_n$  циклическую подгруппу порядка  $n$ . Доказательство очевидно: узел мы получим тогда и только тогда, когда из одного конца косы можно попасть во все остальные, а это эквивалентно тому, что подстановка является циклом порядка  $n$ .

**6.4.** Другой естественный вопрос с простым (положительным) ответом заключается в следующем: могут ли замыкания неизотопных кос быть изотопными зацеплениями?

**Задача 6.1.** а) Докажите, что замыкания кос  $b_1, b_1^{-1} \in B_2$  совпадают и замыкания кос  $b_1^2, b_1^{-2} \in B_2$  тоже совпадают.

б) Докажите, что замыкания кос  $b_1^3, b_1^{-3} \in B_3$  различны.

**Задача 6.2.** Какой узел и какие зацепления получатся при замыкании кос, изображенных на рис. 6.2?

Теперь, когда мы знаем, что отображение замыкания не инъективно, естественно задать вопрос, будет ли оно сюръективно.

**6.5. Теорема Александра.** *Отображение, сопоставляющее косе ее замыкание, сюръективно, т.е. любое за-*

цепление (в частности, любой узел) можно представить в виде замыкания косы.

*Доказательство.* Пусть задана диаграмма зацепления  $L$ . Будем говорить, что  $L$  обвивается вокруг точки  $O$ , если любое звено  $L$  (зацепление  $L$  мы считаем полигональным) из точки  $O$  видно как ориентированное справа налево (как на рис. 6.3 (а)); в таком случае будем говорить, что звено *положительно*.

Если для зацепления  $L$  есть точка  $O$ , вокруг которой оно обвивается, то доказательство очевидно: разрежем  $L$  вдоль луча, выходящего из точки  $O$ , и раздвинем точки разреза (рис. 6.3 (b)).

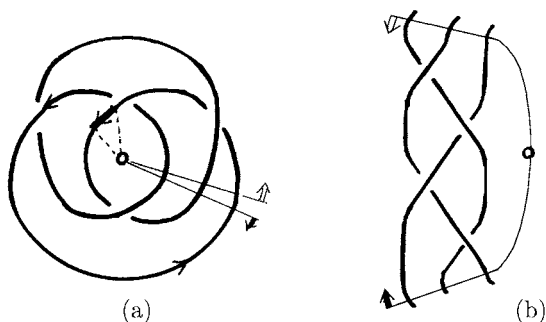


Рис. 6.3

Чтобы доказать теорему, остается показать, что любое зацепление изотопно зацеплению, обвивающемуся вокруг некоторой точки. Этого можно добиться с помощью *трюка Александра*, который заключается в том, что отрицательное звено зацепления  $L$  (относительно произвольной фиксированной точки  $O$ ) заменяется на две стороны (которые будут положительными!) треугольника  $ABC$ , вершина  $C$  которого расположена «позади» точки  $O$  (см. рис. 6.4 (а)). Этот трюк повторяется до тех пор, пока отрицательных звеньев больше не останется. Тогда полученное зацепление будет обвиваться вокруг точки  $O$ .

Опишем эту конструкцию более подробно. В простейшем случае, когда отрицательное звено  $AB$  не содержит перекрестков, трюк Александра производится непосредственно

(рис. 6.4(a)). В самом деле, поднимая точку  $C$  вверх перпендикулярно плоскости  $ABO$ , можно добиться того, чтобы внутри треугольника  $ABC$  не было точек зацепления  $L$ . Двигая точку  $C$  вверх вдоль этого перпендикуляра, можно добиться выполнения этого условия и в том случае, когда отрицательное звено  $AB$  содержит ровно один перекресток, причем звено  $AB$  расположено выше другого звена (рис. 6.4(b)). Если же отрицательное звено  $AB$  содержит ровно один перекресток, но расположено ниже другого звена (рис. 6.4(c)), то треугольник  $ABC$  можно освободить от точек зацепления  $L$ , двигая точку  $C$  вниз вдоль того же перпендикуляра. Наконец, если звено содержит несколько перекрестков, то его можно разбить на меньшие звенья, каждое из которых содержит ровно один перекресток.  $\square$

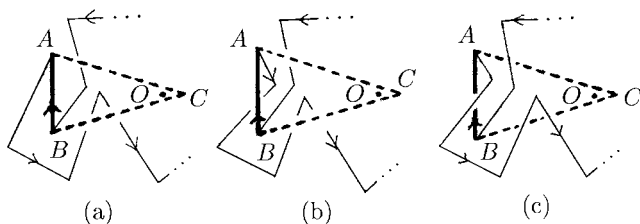


Рис. 6.4

Отметим, что алгоритм, примененный для доказательства теоремы Александра, не оптимален: для достижения цели может понадобиться очень много раз применить трюк Александра, особенно если точка  $O$  выбрана неудачно.

**6.6. Алгоритм Вожеля.** Предложенное выше доказательство теоремы Александра содержит вполне конкретный алгоритм. Но эта конструкция неудобна для реализации на компьютере. И конструкция, использованная для доказательства теоремы Александра в книгах [BZ] и [Ada], — тоже.

Сейчас мы опишем алгоритм представления зацепления в виде замыкания косы, предложенный П. Вожелем ([P.Vogel]). Мы не будем доказывать сходимость этого алгоритма.

Начнем с определения некоторых основных понятий. Будем говорить, что диаграмма ориентированного узла или зацепления *заплетена как коса*, если существует точка, вокруг

которой она обвивается. Зацепление, диаграмма которого заплетена как коса, очевидным образом представляется в виде замыкания косы (вспомните рис. 6.3).

Например, простейшая диаграмма трилистника заплетена как коса, а наиболее распространенная диаграмма узла восьмерка — нет. Однако у узла восьмерка есть диаграмма, заплетенная как коса. Эта диаграмма получается «перебрасыванием через бесконечность» подходящей дуги (вспомните трюк на сфере из §2). Эту операцию (рис. 6.5), которую мы назовем *заменой бесконечности*, в действительности можно выполнить и на плоскости (а не только на двумерной сфере) с помощью второго и третьего преобразований Рейдемейстера.

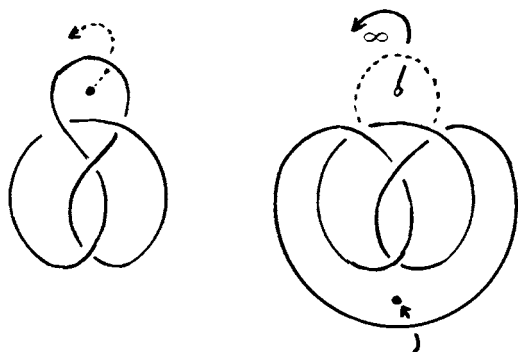


Рис. 6.5

Для ориентированного узла имеется корректно определенная операция *уничтожения перекрестка*, изображенная на рис. 6.6 (а). Если уничтожить все перекрестки, то диаграмма узла распадется на (ориентированные) замкнутые кривые, которые называют *окружностями Зейферта* (рис. 6.6 (d), (e)).

**Задача 6.3.** С помощью окружностей Зейферта докажите, что любой узел является краем ориентируемой поверхности в  $\mathbb{R}^3$ .

Множество окружностей Зейферта диаграммы узла назовем *гнездом*, если все они индуцируют одну и ту же ориентацию плоскости и при этом ограничивают вложенную систему

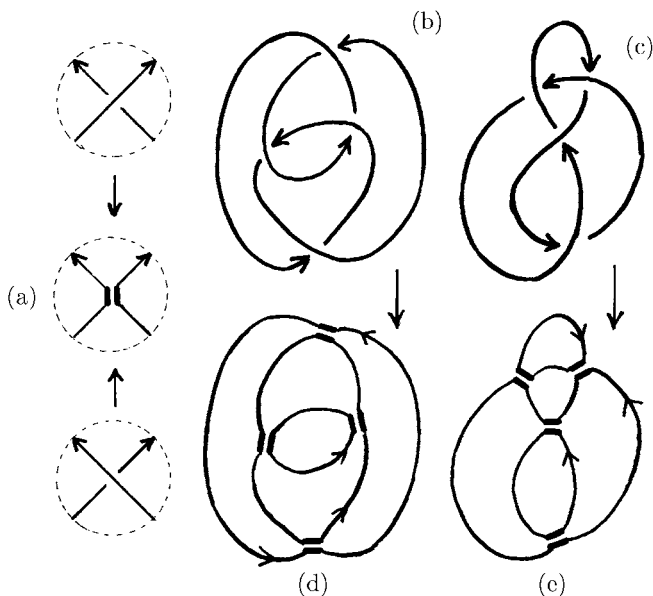
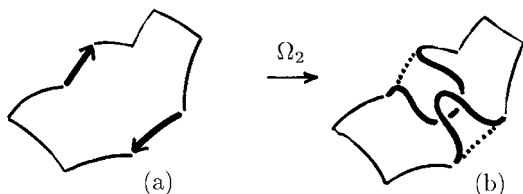


Рис. 6.6

дисков (рис. 6.6 (d)). Если множество окружностей Зейферта для данной диаграммы узла является гнездом, то эта диаграмма заплетена как коса (см. рис. 6.6 (b)).

Рассмотрим теперь *тень* ориентированного узла, т.е. полную проекцию узла, без указания того, какая ветвь на перекрестке проходит сверху, а какая снизу. Тень можно считать ориентированным плоским графом, вершинами которого служат перекрестки, а ребрами служат ориентированные дуги, соединяющие их. Можно рассматривать также грани — области, ограниченные дугами. Назовем грань *неупорядоченной*, если у нее есть два *противоположных* ребра, т.е. два ребра, принадлежащих разным окружностям Зейферта и индуцирующих одну и ту же ориентацию грани (рис. 6.7 (a)). К противоположным ребрам любой неупорядоченной области можно применить второе преобразование Рейдемейстера  $\Omega_2$  (рис. 6.7 (b)). В результате происходит перестройка областей: появляется новая центральная область (которая уже не будет неупорядоченной) и несколько других областей (состо-

ящих из частей бывшей неупорядоченной области и ее соседей).



**Рис. 6.7**

Теперь мы представим алгоритм Вожеля в виде «программы», написанной на неформальном языке типа языка Паскаль:

```

DO: УНИЧТОЖИТЬ ВСЕ ПЕРЕКРЕСТКИ;
WHILE СУЩЕСТВУЕТ НЕУПОРЯДОЧЕННАЯ ОБЛАСТЬ
  DO:  $\Omega_2$ ;
  DO: УНИЧТОЖИТЬ ВСЕ ПЕРЕКРЕСТКИ;
ENDWHILE
IF ВСЕ ОКРУЖНОСТИ ЗЕЙФЕРТА ОБРАЗУЮТ ГНЕЗДО
  STOP;
ELSE
  DO: ЗАМЕНИТЬ БЕСКОНЕЧНОСТЬ;
STOP

```

Условия СУЩЕСТВУЕТ НЕУПОРЯДОЧЕННАЯ ОБЛАСТЬ и ВСЕ ОКРУЖНОСТИ ЗЕЙФЕРТА ОБРАЗУЮТ ГНЕЗДО были объяснены выше, как и команды УНИЧТОЖИТЬ ВСЕ ПЕРЕКРЕСТКИ, ЗАМЕНИТЬ БЕСКОНЕЧНОСТЬ и DO:  $\Omega_2$  (в применении к неупорядоченной области). Эту программу несложно написать и на настоящем языке программирования, если задан подходящий способ кодирования диаграмм узлов.

На рис. 6.8 показано, как действует эта программа, если ее применить к узлу  $5_2$  из таблицы узлов (см. §3).

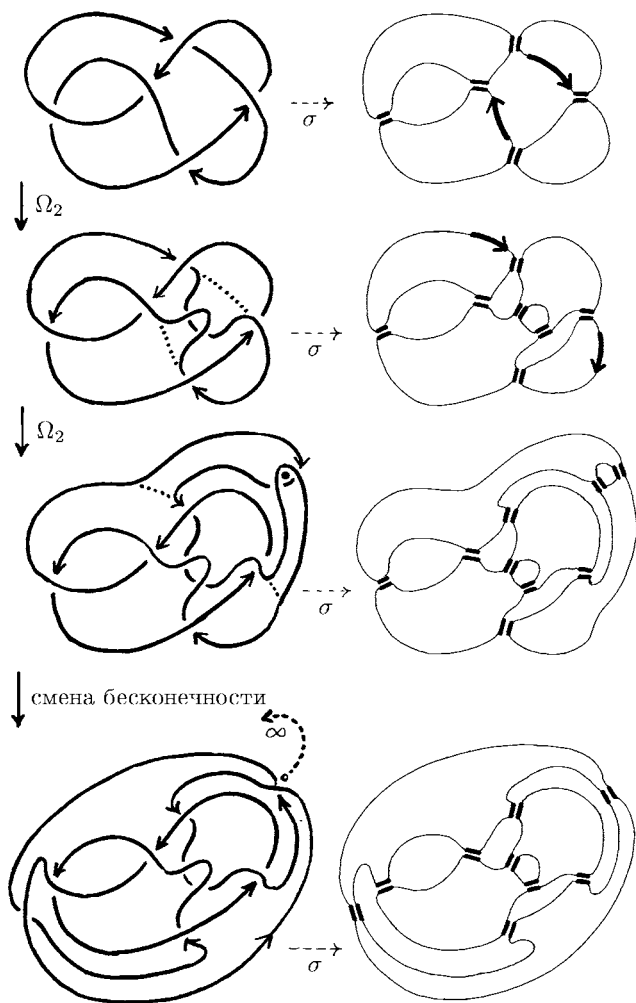


Рис. 6.8



Отдельно, на рис. 6.9, мы представили более симметричное изображение этого узла, когда он заплетен как коса, а также соответствующую косу.

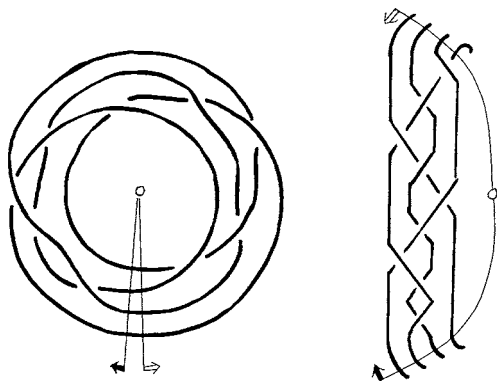


Рис. 6.9

В общем случае не очевидно, что алгоритм Вожеля всегда закончит свою работу за конечное число шагов.

**Задача 6.4.** Докажите, что алгоритм Вожеля заканчивает работу за конечное число шагов. А именно, установите следующие оценки:

а) алгоритм Вожеля заканчивает работу после применения не более  $w$  операций  $\Omega_2$ , где  $w = (s - 1)(s - 2)/2$ , а  $s$  — количество окружностей Зейферта для данной диаграммы узла;

б) полученная коса состоит из  $n$  нитей и ее длина (т.е. количество образующих в ее представлении в виде произведения образующих) не превосходит  $n + (s - 1)(s - 2)$ , где  $n$  — количество перекрестков.

**6.7. Преобразования Маркова.** Теперь мы обсудим более подробно, в каких случаях неизотопные косы имеют изотопные замыкания. Для этого нам понадобятся следующие алгебраические преобразования кос, представленных в виде произведения стандартных образующих  $b_i$ .

*Первое преобразование Маркова.*  $b \leftrightarrow aba^{-1}$ , где  $a, b \in B_n$ .

*Второе преобразование Маркова.*  $b \leftrightarrow bb_n^{\pm 1}$ , где  $b \in B_n$  и  $bb_n^{\pm 1}$  — элемент, изображенный на рис. 6.10 (обратите вни-

мание, что  $b_n \notin B_n$ , поэтому обозначение  $bb_n$  имеет смысл лишь в том случае, когда мы отождествим  $b$  с его образом при естественном вложении  $B_n \hookrightarrow B_{n+1}$ .

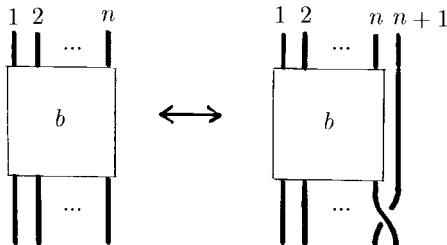


Рис. 6.10

**6.8. Теорема Маркова.** *Замыкания двух кос изотопны тогда и только тогда, когда одну косу можно получить из другой конечным числом преобразований Маркова.*

**Доказательство.** Мы не будем доказывать трудную (только тогда) часть теоремы Маркова (см. [Bir1] или [Mor2]). Чтобы доказать легкую (тогда) часть теоремы Маркова, достаточно проверить, что оба преобразования Маркова не изменяют замыкание косы. Для первого преобразования это видно из рис. 6.11 (а). Для второго преобразования доказательство еще проще: после замыкания преобразованной косы получается дополнительная петелька, которую легко устранить (например, применив преобразование Рейдемейстера  $\Omega_1$ , см. рис. 6.11 (b)).  $\square$

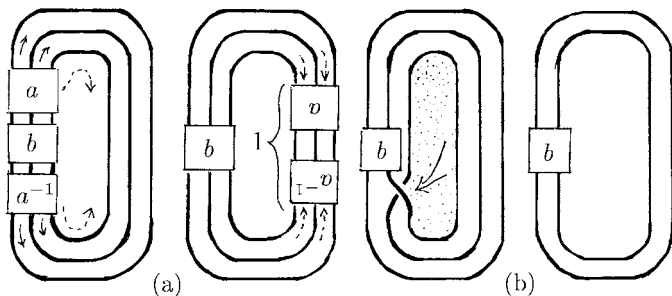


Рис. 6.11

## §7. Крашенные косы

**7.1.** Пусть нить косы  $b$  соединяет точку  $A_i = (i, 0, 0)$  с точкой  $B_j = (j, 0, 1)$ . Косу  $b$  называют *крашеной*, если каждая ее нить соединяет точки с одинаковыми номерами, т.е.  $i = j$  для всех  $i$ . В этом случае, если каждую нить окрасить своим цветом, то верхний и нижний ряды точек будут раскрашены одинаково. Две крашенные косы считают *эквивалентными*, если они эквивалентны как обычные косы. Произведение двух крашенных кос является крашеной косой. Поэтому классы эквивалентности крашенных кос образуют группу, которую называют *группой крашенных кос* и обозначают  $K_n$ .

Косе из  $n$  нитей соответствует (см. 5.6) петля в пространстве неупорядоченных наборов из  $n$  различных точек плоскости. Аналогичным образом крашеной косе соответствует петля в пространстве *упорядоченных* наборов из  $n$  различных точек плоскости, а изотопия кос соответствует гомотопии петель. Поэтому  $K_n = \pi_1(C - \Delta)$ , где

$$\Delta = \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\}.$$

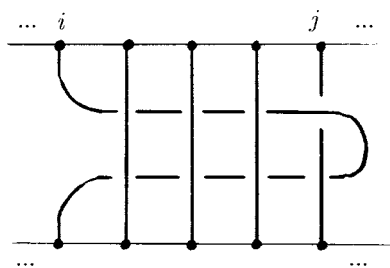


Рис. 7.1

**7.2. Теорема.** У группы крашенных кос  $K_n$  есть конечная система образующих, а именно, косы  $b_{ij}$ , где  $1 \leq i < j \leq n$  (рис. 7.1).

*Доказательство.* Применим индукцию по  $n$ . При  $n = 2$  достаточно распрямить вторую нить; тогда первая нить не-

сколько раз обовьется вокруг второй и в результате мы получим косу  $b_{12}^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Предположим, что утверждение теоремы доказано для крашенных кос из  $n$  нитей, т.е. любую крашеную косу  $a_n \in K_n$  можно представить в виде произведения степеней элементов  $b_{ij}$ . Рассмотрим теперь крашеную косу  $d_{n+1} \in K_{n+1}$ . Если мы уберем ее первую нить, то получим некоторую косу  $a_n \in K_n$ . Добавим к косе  $a_n^{-1}$  вертикальный отрезок (он будет первой нитью новой косы из  $n+1$  нитей), незацепленный с остальными нитями косы. В результате получим косу  $d'_{n+1}$ . Существует изотопия, переводящая последние  $n$  нитей косы  $c_{n+1} = d'_{n+1}d_{n+1}$  в параллельные вертикальные отрезки. При этом первая нить будет обвиваться вокруг них. Косу  $c_{n+1}$  можно представить в виде произведения кос  $b_{ij}$ . Это делается так: каждый раз, когда первая нить проходит над какой-либо нитью, первую нить нужно протащить под остальными нитями до левого края (рис. 7.2).

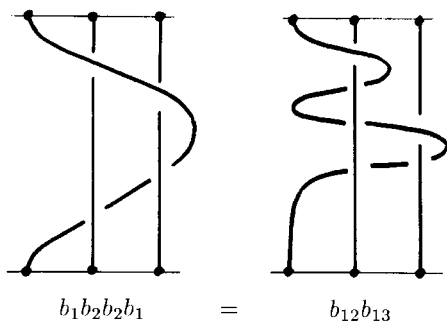


Рис. 7.2

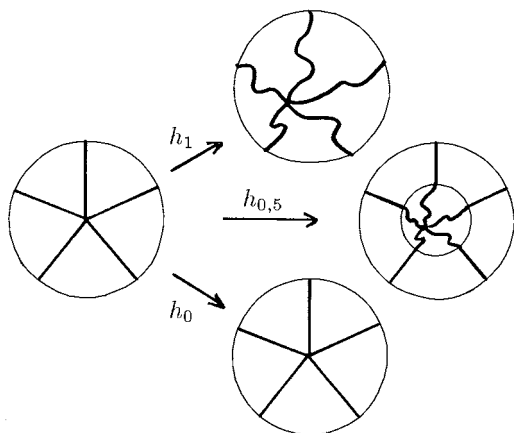
По предположению индукции косу  $a_n^{-1}$  (а значит, и косу  $d'_{n+1}$ ) можно представить в требуемом виде. Поэтому косу  $d_{n+1} = (d'_{n+1})^{-1}c_{n+1}$  тоже можно представить в требуемом виде.  $\square$

**7.3.** Обозначим через  $H_n$  группу изотопических классов эквивалентности гомеоморфизмов круга с  $n$  дырками, причем эти гомеоморфизмы неподвижны (тождественны) на границе. Оказывается, что группа крашенных кос  $K_n$  тесно связана с группой  $H_n$ . Прежде чем выяснить эту связь в общем случае, рассмотрим случай  $n = 0$ .

**7.4. Теорема Александра о гомеоморфизме.** *Группа  $H_0$  единичная, т.е. любой гомеоморфизм круга, неподвижный на крае, изотопен тождественному гомеоморфизму.*

*Доказательство.* Изотопию  $h_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , связывающую гомеоморфизм  $h = h_1$  с тождественным гомеоморфизмом  $\text{id} = h_0$ , можно описать следующим образом. Гомеоморфизм  $h_t$  тождествен на кольце  $t \leq |z| \leq 1$ , а на круге  $|z| \leq t$  он устроен точно так же, как гомеоморфизм  $h$  устроен на круге  $|z| \leq 1$  (рис. 7.3). Если мы положим  $h(z) = z$  при  $|z| \geq 1$ , то для  $t \neq 0$  гомеоморфизм  $h_t$  задается формулой

$$h_t(z) = t(h(t^{-1}z)). \quad \square$$



**Рис. 7.3**

**7.5.** Предыдущую теорему можно использовать для вычисления группы  $H_n$ . Пусть  $g \in H_n$  — гомеоморфизм круга с  $n$  дырками, тождественный на границе. Его можно продолжить до гомеоморфизма  $h$  всего круга в себя, т.е.  $g$  можно продолжить с границы дырки на саму дырку. Это можно сделать, отображив каждую дырку, представляющую собой круг, в себя тождественно (на крае  $g$  по предположению тождественно). Согласно теореме 7.4 существует изотопия  $h_t$ ,

связывающая гомеоморфизм  $h = h_1$  с тождественным гомеоморфизмом  $\text{id} = h_0$ . Пусть  $x_0$  — фиксированная точка круга. Множество точек

$$(t, h_t(x_0)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (7.1)$$

представляет собой дугу, соединяющую точки верхнего и нижнего основания цилиндра  $I \times D^2$ , где  $I$  — отрезок  $[0, 1]$ ,  $D^2$  — круг. Если мы рассмотрим такие дуги для точек  $x_1, \dots, x_n$ , принадлежащих дыркам, то в результате получим крашеную косу (рис. 7.4).

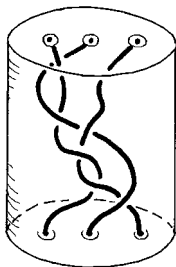


Рис. 7.4

Эта коса дает существенную информацию о гомеоморфизме  $h$ , но этой информации недостаточно для полного описания гомеоморфизма с точностью до изотопии. Чтобы получить полную информацию, нужно рассмотреть дуги (7.1) для всех точек края дырки. Для каждой дырки эти дуги образуют цилиндрическую поверхность. Чтобы описать гомеоморфизм, достаточно указать эти цилиндрические поверхности для всех дырок и на каждой из них нарисовать одну из дуг. Полученную таким образом картинку назовем *утолщенной косой*.

Пусть  $\gamma$  — некоторая замкнутая кривая в рассматриваемом круге с дырками. Определим гомеоморфизм специального вида, связанный с кривой  $\gamma$ . Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $C$  кривой  $\gamma$ , гомеоморфную  $S^1 \times [0, 1]$ . Пусть  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  — компоненты края  $C$  (рис. 7.5). Закрепим кривую  $\gamma_1$ , а кривую  $\gamma_2$  начнем поворачивать вдоль себя; кольцо  $C$  мы при этом считаем эластичным и вследствие этого точки, очень близкие

к  $\gamma_2$ , потянутся за точками  $\gamma_2$ , а точки, близкие к  $\gamma_1$ , едва сдвинутся с места. Когда кривая  $\gamma_2$  повернется вдоль себя на  $360^\circ$ , все ее точки вернуться на свои прежние места. Поэтому в результате мы получим гомеоморфизм круга с дырками, тождественный на крае. Схематично он изображен на рис. 7.5. Будем называть этот гомеоморфизм *скручиванием вдоль кривой  $\gamma$* .

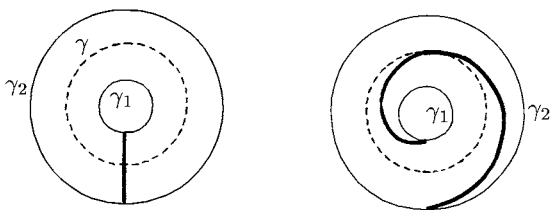


Рис. 7.5

Рассмотрим в качестве примера гомеоморфизмы круга с двумя дырками. Скручивания вдоль кривых, изображенных пунктиром на рис. 7.6 (а) и (b), соответствуют утолщенным косам, изображенным на рис. 7.6 (с) и (d) соответственно.

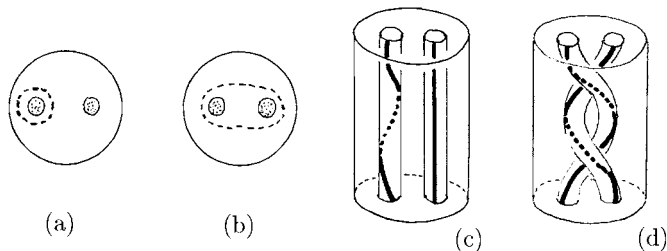


Рис. 7.6

Мы объяснили, как гомеоморфизму сопоставляется утолщенная коса. Покажем теперь, как утолщенной косе можно сопоставить гомеоморфизм. Не нарушая общности, можно считать, что рассматриваемая коса не выходит за пределы цилиндра над кругом. Верхнее основание цилиндра можно считать эластичным кругом с  $n$  круглыми дырками. Будем также считать, что внешний край круга и края дырок

представляют собой жесткие обручи. Кроме того, представим каждую выделенную дугу на границе утолщенной нити в виде небольшого узкого желоба. Каждый обруч, соответствующий дырке, снабжен шипом, который вставлен в желоб (рис. 7.7). Обручи прикреплены к эластичной поверхности верхнего основания и при движении увлекают за собой близлежащие точки.

Начнем опускать эластичный круг с дырками так, чтобы точки внешнего края двигались вертикально вниз параллельно оси цилиндра, а сам круг оставался все время плоским. Внутренние обручи будут при этом винтообразно опускаться вниз, следуя изгибам цилиндрических поверхностей, одновременно поворачиваясь вслед за шипами, скользящими по желобам. Когда круг опустится до нижнего основания, мы получим требуемый гомеоморфизм.

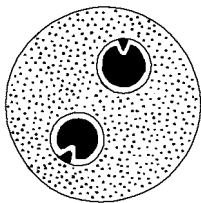


Рис. 7.7

Группа утолщенных кос является расширением группы крашенных кос  $K_n$ . Если сказать точнее, то каждая утолщенная коса характеризуется крашеной косой вместе с целыми числами (указывающими число оборотов желоба), сопоставленными каждой нити. Таким образом, каждой нити соответствует дополнительный элемент бесконечного порядка, лежащий в центре группы. Поэтому группа утолщенных кос изоморфна прямой сумме  $K_n \oplus \mathbb{Z}^n$ , где  $\mathbb{Z}^n$  — прямая сумма  $n$  слагаемых, изоморфных  $\mathbb{Z}$ .

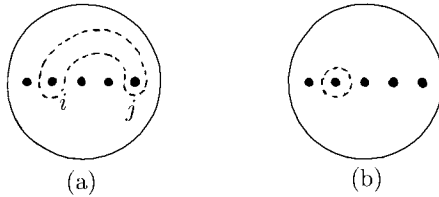
Теперь мы можем доказать следующее утверждение, которое играет важную роль при описании группы гомеоморфизмов двумерных поверхностей (§13).

**7.6. Теорема.** *Группа  $H_n$  гомеоморфизмов круга с  $n$  дырками (рассматриваемых с точностью до изотопии) поро-*



ждена конечным числом скручиваний вдоль кривых, расположенных в этом круге.

*Доказательство.* Группа  $H_n$  изоморфна группе (изотопических классов) утолщенных кос. Пусть гомеоморфизму  $h \in H_n$  соответствует утолщенная коса  $\alpha'_n = \alpha_n + a$ , где  $\alpha_n \in K_n$  и  $a \in \mathbb{Z}^n$ . Согласно теореме 7.2 крашеную косу  $\alpha_n$  можно представить в виде произведения образующих  $b_{ij}$ . Легко убедиться, что коса  $b_{ij}$  соответствует скручиванию вдоль кривой, изображенной на рис. 7.8 (а).



**Рис. 7.8**

Взяв композицию таких скручивающих гомеоморфизмов, получим гомеоморфизм, соответствующий утолщенной косе  $\alpha_n + b$  для некоторого  $b \in \mathbb{Z}^n$ . Чтобы получить вместо  $b$  нужное значение  $a$ , достаточно применить подходящие скручивания вдоль кривых, изображенных на рис. 7.8 (b).  $\square$

## Комментарии

Как мы уже упоминали в основном тексте, группа кос — изобретение немецкого математика Эмиля Артина. Он получил представление группы кос с помощью образующих и соотношений, а также (положительно) решил проблему тождества слов для этой группы. Его первая работа [Art 1] на эту тему, написанная в 1925 году по-немецки, была безупречна, но впоследствии, когда Артин переехал в США, он написал по-английски вполне строгий текст [Art 2], 1948. Представленное в §5 простое доказательство теоремы Артина, насколько нам известно, новое. После Артина многие математики занимались теорией кос с алгебраической и алгоритмической точки зрения. Большинство этих работ не имеют непосредственного отношения к изложенному нами материалу,

поэтому мы упомянем лишь о (положительном) решении проблемы сопряженности ([Gar], [Маг 1]) и отошлем заинтересованного читателя к монографии Джоан Бирман ([Bir 1], 1975), в которой содержатся многие другие интересные результаты. Наше изложение решения проблемы тождества основано на недавней работе Патрика Дюорнуа (см. [Duh]).

Нам не известно, кто первым изобрел операцию замыкания кос (она была знакома уже Александеру). Эта операция устанавливает основополагающую связь между косами и зацеплениями (в частности, узлами). Значение этой связи усиливают замечательные теоремы Александра ([Ale 1], 1923) и А. А. Маркова ([Маг 1], 1936, см. также [Маг 2]). История теоремы Маркова весьма драматична. Хотя он выступил с устным изложением своего доказательства, опубликовано оно никогда не было. По-видимому, это связано с тем, что область интересов Маркова переместилась из топологии в «конструктивную математическую логику». Он оставил эту задачу своему ученику Н. Вейнбергу, который погиб на войне вскоре после публикации своей первой работы на эту тему ([Wei], 1939). Первое опубликованное доказательство теоремы Маркова принадлежит Джоан Бирман (см. [Bir 1]). Более короткое доказательство было опубликовано позднее Мортонном ([Mor 2]).

Разумеется, с алгоритмической точки зрения представляется естественным попытаться применить классификацию кос к классификации узлов, опираясь при этом на теорему Маркова. Такие попытки делались неоднократно, но к успеху они не привели.

Известно несколько доказательств теоремы Александра (теорема 6.5). Изложенное нами, насколько можно судить, подразумевалось самим Александром в его статье [Ale 1]. Другое простое геометрическое доказательство содержится в книге [BZ]. Алгоритм Вожеля изложен в статье [Vog]. Материал о крашенных косах вполне традиционен и был, в основном, известен Артину. Что же касается связи между крашеными косами и гомеоморфизмами круга с дырками (теорема 7.6), то она была обнаружена Александром. Эта теорема является основным связующим мостом между настоящей главой и последующими главами о трехмерных многообразиях.

Теория кос имеет многочисленные приложения. Далеко не все ее проблемы (в том числе и алгоритмические) решены. Сравнительно свежее изложение нерешенных проблем теории кос содержится в [Mor 1].

## Глава IV

# Трехмерные многообразия

Эта глава и последующие главы VI и VII посвящены различным способам представления трехмерных многообразий. Важность этой темы связана, по крайней мере, с тремя обстоятельствами. Прежде всего мир, в котором мы живем, традиционно считается трехмерным, и даже добавление времени в качестве четвертой координаты, ставшее уже обычным в физике, не уменьшает значения изучения трехмерных пространств. Во-вторых, мы способны зрительно представить себе наше трехмерное пространство лишь локально, поэтому нужны формальные способы представления глобальной структуры различных «возможных миров». Наконец, не известна пригодная для применения на практике классификация трехмерных многообразий, причем эта открытая проблема в настоящее время бурно разрабатывается.

Мы предполагаем, что читатель знаком с теоремой классификации двумерных многообразий (если нет, то ее формулировку можно найти в Приложении). Следует отметить, что знаменитая теорема, доказанная А. А. Марковым в [Mar 3], утверждает, что для 4-мерных многообразий проблема классификации алгоритмически неразрешима. Для трехмерных многообразий существует алгоритм классификации, но его описание занимает целую книгу [Heim], и мы его обсуждать здесь не будем. Таким образом, наша главная цель — описать простые универсальные конструкции, используемые для представления всех (компактных ориентируемых) трехмерных многообразий. Эти конструкции приведены в историческом порядке их появления: диаграммы Хегора (настоящая

глава), перестройки сферы (глава VI) и разветвленные накрытия (глава VII). Что же касается главы V, то она посвящена скручиваниям Дена, которые служат мостом, соединяющим гомеоморфизмы двумерных поверхностей и перестройки трехмерных многообразий.

В последующих главах (как и почти во всей этой книге) мы работаем в рамках топологической категории. Это вполне оправданно в размерностях не более трех. В частности, как кусочно-линейная, так и гладкая классификация трехмерных многообразий эквивалентна топологической классификации (см. [Moi 1–2], [Mun]), поэтому нам не потребуются ни гладкие, ни кусочно-линейные структуры на трехмерных многообразиях. За одним исключением. Чтобы построить разбиение Хегора трехмерного многообразия, нам понадобится триангуляция многообразия. Если читатель не хочет принять на веру, что все трехмерные многообразия триангулируемы, то он может считать, что мы имеем дело лишь с триангулируемыми многообразиями. (Доказательство триангулируемости многообразий можно найти в [Moi 1–2], [Mun]).

## §8. Разбиение Хегора

**8.1.** *Трехмерным многообразием* мы называем компактное связное хаусдорфово пространство  $M^3$ , каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную евклидову пространству  $\mathbb{R}^3$ . *Трехмерное многообразие с краем* определяется аналогично, за исключением того, что помимо окрестностей, гомеоморфных евклидову пространству, допускаются и окрестности, гомеоморфные евклидову полупространству  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\}$ . Множество точек, у которых есть лишь окрестности второго типа, называют *краем* многообразия  $M^3$  и обозначают  $\partial M^3$ . Легко проверить, что  $\partial M^3$  — двумерное многообразие. Трехмерное многообразие называют *триангулированным*, если оно представлено в виде объединения конечного числа тетраэдров, которые пересекаются либо по общей грани, либо по общему ребру, либо по общей вершине, либо не пересекаются вообще. Триангулированное

многообразию называют *ориентированным*, если все его тетраэдры ориентированы (т.е. в каждом из них задан положительный репер) согласованным образом (т.е. любые два тетраэдра, имеющих общую грань, индуцируют на общей грани противоположные ориентации). Многообразие называют *ориентируемым*, если оно может быть ориентировано.

**8.2..** Трехмерные многообразия можно получать с помощью следующей конструкции. Рассмотрим сферу с  $g$  ручками  $N^2$ , стандартно вложенную в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 8.1). Будем называть *телом* с  $g$  ручками ту часть пространства  $\mathbb{R}^3$ , которая лежит внутри и на границе  $N^2$ . Возьмем два экземпляра  $M_1^3$  и  $M_2^3$  тела с  $g$  ручками. Пусть  $f: \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$  — произвольный гомеоморфизм их краев. Склеим  $M_1^3$  и  $M_2^3$  по этому гомеоморфизму, т.е. возьмем их несвязное объединение и отождествим каждую точку  $x \in \partial M_1^3$  с точкой  $f(x) \in \partial M_2^3$ .



Рис. 8.1

Полученное таким образом пространство  $M^3$  является трехмерным многообразием. В самом деле, окрестность точки  $x = f(x) \in M^3$  можно получить, склеив два полушария — окрестности точек  $x$  и  $f(x)$  в  $M_1^3$  и  $M_2^3$  соответственно (рис. 8.2). Ясно, что  $M^3$  — многообразие без края.

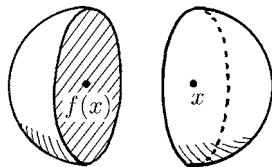


Рис. 8.2

**Задача 8.1.** Докажите, что полученное многообразие  $M^3$  ориентируемо.

*Разбиением Хегора* ориентируемого трехмерного многообразия  $M^3$  называют его представление в виде объединения двух тел с ручками  $M_1^3$  и  $M_2^3$  с общей границей  $\partial M_1^3 = \partial M_2^3$ .

**8.3. Теорема.** *Любое ориентируемое многообразие  $M^3$  (без края) допускает разбиение Хегора.*

*Доказательство.* Рассмотрим триангуляцию  $K$  многообразия  $M^3$ . Определим *барицентрическое подразделение*  $K'$  триангуляции  $K$  следующим образом. В любом тетраэдре нашей триангуляции медианы грани разбивают эту грань на 6 меньших треугольников. Разобьем каждый тетраэдр на 24 меньших тетраэдра, рассмотрев конусы (с вершиной в барицентре тетраэдра) над маленькими треугольниками. Эти новые тетраэдры образуют первое барицентрическое подразделение  $K'$  триангуляции  $K$ . Применив к  $K'$  ту же самую конструкцию, получим *второе барицентрическое подразделение*  $K''$  триангуляции  $K$ .

Возьмем в качестве  $M_1^3$  объединение всех тетраэдров второго барицентрического подразделения  $K''$ , которые имеют общие точки с одномерным остовом триангуляции  $K$  (т.е. с объединением всех ребер тетраэдров триангуляции  $K$ ), а в качестве  $M_2^3$  возьмем замыкание дополнения  $M_1^3$  в  $M^3$ . Покажем, что  $M_1^3$  и  $M_2^3$  — гомеоморфные тела с ручками.

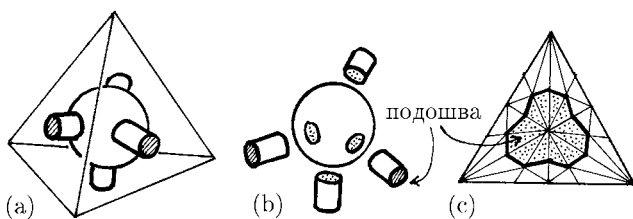


Рис. 8.3

Пусть  $\Delta$  — один из тетраэдров триангуляции  $K$ . Часть  $M_2^3$ , лежащая в  $\Delta$ , схематично изображена на рис. 8.3 (а). Она имеет форму «четырёхногого спрута»: четыре объемных цилиндра приклеены одним из своих оснований к центральному шару (рис. 8.3 (b)). Эти четвероногие имеют по

четыре свободных подошвы (одна из них детально изображена на рис. 8.3 (с)), по которым они склеиваются друг с другом, образуя  $M_2^3$ .

Чтобы описать  $M_1^3$ , нужно взять шары с центрами в вершинах триангуляции  $K$  и соединить их объемными цилиндрами, идущими вдоль ребер триангуляции  $K$  (рис. 8.4).

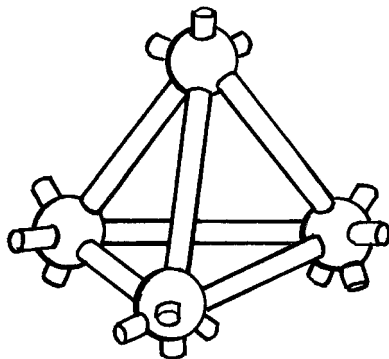


Рис. 8.4

Итак, пространства  $M_1^3$  и  $M_2^3$  можно получить, приклеив к нескольким шарам ручки (объемные цилиндры). Будем выполнять эти приклейки поочередно, показывая по индукции, что на каждом шаге получается тело с ручками (или несколько тел с ручками). В том случае, когда основания цилиндра приклеиваются к двум *разным* телам, никаких сложностей нет. Но если оба основания цилиндра приклеиваются к одному и тому же телу, то, вообще говоря, трудности могли бы возникнуть. Дело в том, что такие приклейки могут быть двух типов: ориентируемые (рис. 8.5 (а)) и неориентируемые (рис. 8.5 (b)).

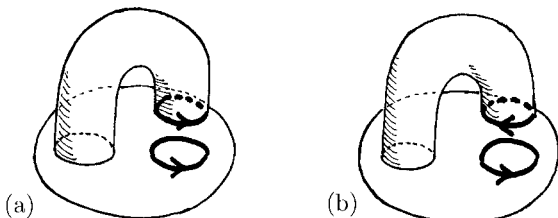


Рис. 8.5



Но если на каком-то шаге была бы сделана неориентируемая приклейка, то это означало бы, что многообразие  $M^3$  неориентируемо, а это противоречит условию теоремы. Поэтому все приклейки ориентируемые, а значит,  $M_1^3$  и  $M_2^3$  — тела с ручками. Их гомеоморфность непосредственно следует из того, что они имеют общий край, т.е. число ручек у них одинаковое.  $\square$

**8.4. Примеры.** У каждого трехмерного многообразия есть много разных разбиений Хегора. Рассмотрим некоторые разбиения Хегора трехмерной сферы  $S^3$ . Простейшее разбиение Хегора получается, если разрезать  $S^3$  вдоль экватора (двумерной сферы) на два шара.

Более интересным примером служит классическое разбиение сферы  $S^3$  на два полнотория. Представим сферу  $S^3$  как следующее подмножество двумерного комплексного пространства:

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2\}.$$

Положим

$$M_1^3 = \{(z, w) \in S^3 : |z| \leq |w|\},$$

$$M_2^3 = \{(z, w) \in S^3 : |z| \geq |w|\}.$$

Отметим, что в нашем случае условия  $|z| \leq |w|$  и  $|z| \geq |w|$  эквивалентны условиям  $|z| \leq 1$  и  $|z| \geq 1$ , соответственно.

Докажем, что  $M_1^3$  и  $M_2^3$  — полнотория (тела с одной ручкой). Точку сферы  $S^3$  можно представить в виде  $(ae^{i\alpha}, be^{i\beta})$ , где  $a, b \geq 0$  и  $a^2 + b^2 = 2$ . Многообразие  $M_1^3$  задается при этом соотношением  $a \leq 1$ . Рассмотрим полноторие, осевое сечение которого состоит из двух кругов радиуса 1. Введем на нем координаты  $(a, \alpha, \beta)$ , как показано на рис. 8.6.

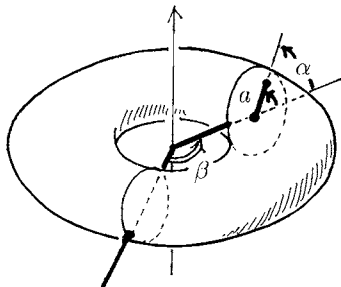


Рис. 8.6

Сопоставление  $(ae^{i\alpha}, be^{i\beta}) \mapsto (a, \alpha, \beta)$  определяет гомеоморфизм многообразия  $M_1^3$  на полноторие. (Обратите внимание, что  $(0, \alpha, \beta)$  — одна и та же точка для всех значений параметра  $\alpha$ ; эта точка зависит лишь от параметра  $\beta$ .) Аналогичным образом сопоставление  $(ae^{i\alpha}, be^{i\beta}) \mapsto (b, \beta, \alpha)$  определяет гомеоморфизм многообразия  $M_2^3$  на полноторие.

Итак, сфера  $S^3$  допускает разбиение Хегора на два полнотория.

**Задача 8.2.** Представим сферу  $S^3$  как одноточечную компактификацию пространства  $\mathbb{R}^3$ . Докажите, что если из  $S^3$  вырезать стандартно вложенное (в  $\mathbb{R}^3$ ) открытое тело с ручками, то в результате получим (замкнутое) тело с ручками, причем количество ручек у обоих тел одно и то же.

**8.5.** Назовем *меридианом* полнотория кривую на его крае, заданную (в описанных выше координатах) уравнением  $\beta = \text{const}$ ; кривую, заданную уравнением  $\alpha = \text{const}$ , назовем *параллелью*. Общий край многообразий  $M_1^3$  и  $M_2^3$  (в сфере  $S^3$ ) состоит из точек с координатами  $(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ . Кривая  $\beta = \text{const}$  является одновременно меридианом полнотория  $M_1^3$  и параллелью полнотория  $M_2^3$ . Это замечание поможет читателю наглядно представить сферу  $S^3$  в виде двух склеенных полноторий (рис. 8.7).

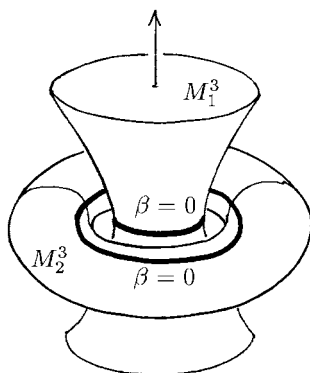


Рис. 8.7

**Задача 8.3.** Какое многообразие получится при склейке двух полноторий по гомеоморфизму, переводящему меридиан в меридиан и параллель в параллель?

**8.6.** Для стандартно вложенного в  $\mathbb{R}^3$  полнотория не существует движения, переводящего параллели в меридианы. (Дело в том, что длины всех меридианов равны, а длины параллелей не все равны.) Но в  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$  ортогональное преобразование, меняющее местами базисные векторы  $e_1$  и  $e_3$ ,  $e_2$  и  $e_4$ , переводит полноторие  $M_1^3$  в  $M_2^3$ , причем меридианы одного полнотория переходят в параллели другого полнотория. Такое движение оказалось возможным потому, что метрика тора  $T^2 = M_1^3 \cap M_2^3$ , индуцированная метрикой  $\mathbb{R}^4$ , локально евклидова. В самом деле, точки тора  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  имеют координаты

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\cos \alpha, \sin \alpha, \cos \beta, \sin \beta).$$

Введем на торе  $T^2$  координаты  $(\alpha, \beta)$ . Пусть  $dl$  — расстояние в  $\mathbb{R}^4$  между точками с координатами  $(\alpha, \beta)$  и  $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ . Тогда

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = \\ &= (d \cos \alpha)^2 + (d \sin \alpha)^2 + (d \cos \beta)^2 + (d \sin \beta)^2 = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) d\alpha^2 + (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) d\beta^2 = \\ &= d\alpha^2 + d\beta^2, \end{aligned}$$

т.е. метрика, индуцированная на торе  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$ , локально евклидова. Это означает, что в  $\mathbb{R}^4$  тор можно свернуть из квадратного листа бумаги. В противоположность этому в  $\mathbb{R}^3$  можно сделать лишь первый шаг, т.е. свернуть из квадратного листа бумаги цилиндр, но свернуть из этого цилиндра тор уже не удастся. Описанное выше расположение тора  $\mathbb{R}^4$  гораздо более естественно, чем стандартное вложение тора в  $\mathbb{R}^3$ . На интуитивном уровне можно сказать, что последнее вложение деформирует тор и мы привыкли к искаженному образу этого объекта, правильный образ которого можно увидеть лишь в  $\mathbb{R}^4$ . Говоря более строго, не существует изометричного вложения тора с его естественной плоской метрикой в евклидово трехмерное пространство.

### 8.7. Трилистники на торе. В трехмерной сфере

$$S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2\}$$

можно расположить узел трилистник так, чтобы он целиком лежал на торе  $|z| = |w| = 1$ . Для этого достаточно рассмотреть пересечение сферы  $S^3$  с комплексной поверхностью  $z^3 = w^2$ . В самом деле, из равенств

$$z^3 = w^2 \quad \text{и} \quad |z|^2 + |w|^2 = 2$$

следует, что

$$|z|^3 + |z|^2 = |w|^2 + |z|^2 = 2.$$

При  $x > 0$  функция  $x^3 + x^2 - 2$  монотонно возрастает, поэтому она обращается в нуль лишь при  $x = 1$ . Следовательно, пересечение сферы  $S^3$  с поверхностью  $z^3 = w^2$  состоит из таких точек  $(z, w)$ , что  $z = e^{i\alpha}$  и  $w = e^{i\beta}$ , где  $3\alpha \equiv 2\beta \pmod{2\pi}$ . На рис. 8.8 (а) изображено множество точек  $(\alpha, \beta)$  квадрата со стороной  $2\pi$ , координаты которых удовлетворяют соотношению  $3\alpha \equiv 2\beta \pmod{2\pi}$ . Из этого квадрата двумя способами можно склеить цилиндр (рис. 8.8 (b)), а из каждого такого цилиндра можно склеить тор (рис. 8.8 (c)).

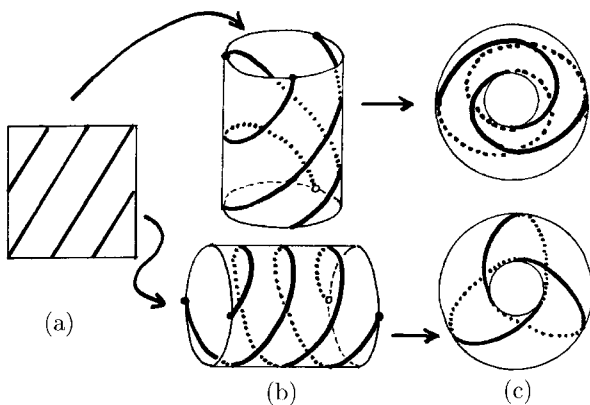


Рис. 8.8

В обоих случаях получаем трилистник, лежащий на торе  $|z| = |w| = 1$  в сфере  $S^3$ . Итак, мы доказали, что поверхность  $z^3 = w^2$  вырезает на сфере  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  трилистник. Из этого вытекает следующий неожиданный результат.

**8.8. Теорема.** *Пространство комплексных кубических полиномов без кратных корней гомотопически эквивалентно дополнению  $S^3 \setminus K$  трилистника  $K$  в сфере  $S^3$ .*

*Доказательство.* Напомним, что пространства  $X$  и  $Y$  называют гомотопически эквивалентными, если существуют такие непрерывные отображения  $F : X \rightarrow Y$  и  $G : Y \rightarrow X$ , что  $F \circ G \simeq \text{id}_Y$  и  $G \circ F \simeq \text{id}_X$ , где  $\text{id}_X$  и  $\text{id}_Y$  — тождественные отображения пространств  $X$  и  $Y$ , а символ  $\simeq$  означает гомотопность отображений. В том случае, когда  $X \subset Y$  достаточно проверить, что существует отображение  $G : Y \rightarrow X$ , обладающее следующими двумя свойствами:

- (1) если  $x \in X$ , то  $G(x) = x$ ;
- (2) отображение  $G$ , рассматриваемое как отображение из  $Y$  в  $Y$ , гомотопно тождественному отображению.

Прежде всего докажем, что пространство  $X$  полиномов вида  $x^3 + px + q$  без кратных корней гомотопически эквивалентно пространству  $Y$  полиномов вида  $x^3 + ax^2 + bx + c$  без кратных корней. Рассмотрим для этого отображение  $G : Y \rightarrow X$ , переводящее полином  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  в  $f(x - a/3)$ . Гомотопия, соединяющая отображение  $G$  с  $\text{id}_Y$  задается формулой

$$f_t(x) = f(x - at/3).$$

В самом деле, если  $f$  — полином без кратных корней, то  $f_t$  тоже будет полиномом без кратных корней при всех  $t \in [0, 1]$ , а это означает, что  $f_t$  действительно гомотопия в пространстве  $Y$ . Итак,  $X$  гомотопически эквивалентно  $Y$ .

Остается доказать, что  $X$  гомотопически эквивалентно пространству

$$Z = S^3 \setminus K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 2, z^3 \neq w^2\},$$

так как мы уже доказали, что в этом случае  $K$  — трилистник. Чтобы построить требуемую гомотопическую эквивалентность, заметим для начала, что полином  $x^3 + px + q$  имеет

кратные корни тогда и только тогда, когда  $4p^3 + 27q^2 = 0$ , поэтому полином  $x^3 - 3zx + 2w$  имеет кратные корни тогда и только тогда, когда  $z^3 = w^2$ . Таким образом, можно считать, что

$$X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z^3 \neq w^2\} \text{ и } Z \subset X.$$

Построим отображение  $G' : X \rightarrow Z$  следующим образом. Предположим, что  $(z_0, w_0) \in X$ , т.е.  $z_0^3 \neq w_0^2$ . Мы утверждаем, что существует единственное положительное число  $\lambda_0$ , для которого

$$(\lambda_0^2 z_0, \lambda_0^3 w_0) \in S^3.$$

В самом деле, пусть  $a = |z|^2$ ,  $b = |w|^2$  и  $\mu = \lambda^2$ . Тогда функция

$$|\lambda^2 z|^2 + |\lambda^3 w|^2 = \mu^2 a + \mu^3 b = \mu^2(a + \mu b)$$

монотонно возрастает при  $\mu > 0$ , поэтому требуемое  $\lambda_0$ , как и утверждалось, существует и единственно. Теперь можно определить отображение  $G'$  формулой

$$G'(z_0, w_0) = (\lambda_0^2 z_0, \lambda_0^3 w_0).$$

Ясно, что ограничение  $G'$  на  $S^3 \setminus K$  тождественно. Кроме того, отображение  $G' : X \rightarrow Z$  гомотопно тождественному. Гомотопия задается следующей формулой:

$$F_t(z_0, w_0) = (\lambda^2 z_0, \lambda^3 w_0), \text{ где } \lambda = (1 - t) + t\lambda_0.$$

В таком случае

$$(\lambda^2 z_0)^3 - (\lambda^3 w_0)^2 = \lambda^6(z_0^3 - w_0^2) \neq 0$$

при всех  $t \in [0, 1]$ , а это означает, что  $F_t$  действительно будет гомотопией пространства  $X$ . Требуемая гомотопическая эквивалентность установлена.  $\square$

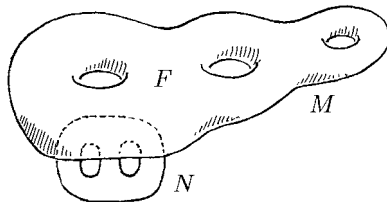
**Задача 8.4.** Найдите разбиение Хегора вещественного проективного пространства  $\mathbb{R}P^3$ .

Эта задача, хотя и у нее есть короткое решение, не так уж проста. Можно сказать, что в общей ситуации разбиение Хегора, которое задается как гомеоморфизм поверхности на

себя, не очень легко описать. Было бы более удобно и более эффективно иметь комбинаторное описание разбиения Хегора. Такое описание действительно есть; мы его представим в §10. Но прежде этого мы обсудим случай многообразий с краем.

### §9. Разбиение Хегора для многообразий с краем

**9.1.** Возьмем два тела с ручками  $N$  и  $M$ , стандартно вложенных в  $\mathbb{R}^3$ , и расположим их так, чтобы край  $M$  делил  $N$  на две симметричные части, причем именно так, как показано на рис. 9.1. Пусть  $F$  — часть  $M$ , лежащая вне  $N$ , а  $G$  — часть края  $M$ , лежащая вне  $N$ .



**Рис. 9.1**

**Задача 9.1.** Докажите, что если  $M$  и  $N$  — тела с  $t$  и  $n$  ручками соответственно, то  $F$  — тело с  $t + n$  ручками.

Возьмем два экземпляра  $F_1$  и  $F_2$  тела с ручками  $F$ . Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — части краев  $F_1$  и  $F_2$ , соответствующие  $G$ . Склеим тела с ручками  $F_1$  и  $F_2$  по некоторому гомеоморфизму  $h : G_1 \rightarrow G_2$ . В результате получим ориентируемое трехмерное многообразие  $M^3$  с краем, гомеоморфным краю тела  $N$ . Такое представление назовем *разбиением Хегора многообразия  $M^3$  с краем*.

**9.2. Теорема.** *Любое ориентируемое трехмерное многообразие  $M^3$  с краем допускает разбиение Хегора.*

*Доказательство.* Рассмотрим сначала случай, когда край  $\partial M^3$  связан. Пусть  $g$  — число ручек поверхности  $\partial M^3$ ,  $N^3$

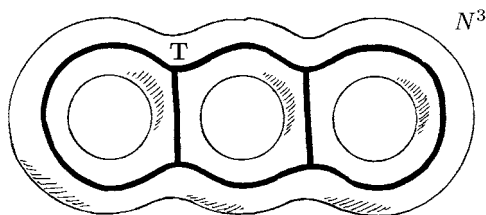


Рис. 9.2

— тело с  $g$  ручками, а  $T$  — *сердцевина*  $N^3$ , т.е. одномерный подкомплекс в  $N^3$ , изображенный на рис. 9.2.

Приклеим тело  $N^3$  к нашему многообразию  $M^3$  по произвольному гомеоморфизму их краев. В результате получим ориентируемое многообразие  $L^3$  без края. У  $L^3$  есть такая триангуляция  $K$ , что  $T$  — подкомплекс в  $K$ . Следуя доказательству теоремы 8.3, рассмотрим в  $L^3$  окрестность  $L_1^3$  (относительно второго барицентрического подразделения  $K''$ ) одномерного остова триангуляции  $K$ . При этом  $L_1^3$  — одно из двух тел с ручками, образующих разбиение Хегора многообразия  $L^3$  (рис. 9.3 (a)). Существует изотопия  $f_t : L^3 \rightarrow L^3$ , соединяющая тождественное отображение  $f_0 = \text{id}$  с таким отображением  $f_1$ , что одна половина  $f_1(T)$  находится в  $L_1^3$ , а другая половина находится в  $L_2^3$  (рис. 9.3 (b)). Если мы теперь вырежем из  $L^3$  окрестность множества  $f_1(T)$ , то в результате получим многообразие, гомеоморфное данному многообразию  $M^3$ . Разрезав его вдоль общего края многообразий  $L_1^3$  и  $L_2^3$ , получим требуемое разбиение.

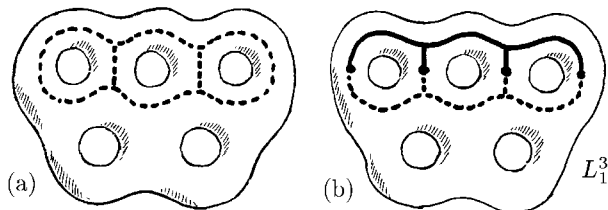


Рис. 9.3

В том случае, когда край  $M^3$  состоит из нескольких компонент, описанную выше процедуру можно применить к каждой из них.



## §10. Диаграммы Хегора

Разбиение Хегора ориентируемого многообразия  $M^3$  без края полностью задается гомеоморфизмом сферы с  $g$  ручками на себя, указывающим, как именно тела с ручками  $M_1^3$  и  $M_2^3$  нужно склеить друг с другом, чтобы получить  $M^3$ . Такое описание можно было бы использовать на практике, если бы у нас был эффективный способ представления таких гомеоморфизмов. Такой способ дается в этом параграфе. Он основан на том, что для наших целей о гомеоморфизме нужно лишь знать, куда он переводит определенную каноническую систему кривых на сфере с  $g$  ручками. Поэтому склеивающий гомеоморфизм кодируется образом этой системы кривых, т.е. его можно представить картинкой, изображающей систему кривых на сфере с  $g$  ручками; эту картинку называют диаграммой Хегора.

**10.1.** Сопоставим данному разбиению Хегора (многообразия  $M^3$  на тела с  $g$  ручками  $M_1^3$  и  $M_2^3$ ) систему замкнутых кривых на сфере с  $g$  ручками  $N$  следующим образом. Рассмотрим стандартные вложения тел  $M_1^3$  и  $M_2^3$  в  $\mathbb{R}^3$ . На их краях нарисуем системы меридианов  $u_1, \dots, u_g$  и  $v_1, \dots, v_g$  так, как показано на рис. 10.1.

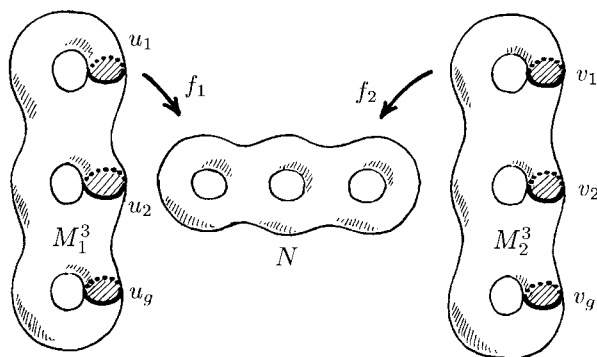


Рис. 10.1

Ради симметричности в нашем определении представим склеивающий гомеоморфизм  $f : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$  в виде композиции гомеоморфизмов  $f_1$  и  $f_2^{-1}$ , где  $f_i$  — гомеоморфизм  $\partial M_i^3$

на сферу с  $g$  ручками  $N$ . (Мы могли бы положить  $N = \partial M_1^3$  и  $f_1 = \text{id}$  или  $N = \partial M_2^3$  и  $f_2 = \text{id}$ , но в обоих случаях приходится предпочесть одно многообразие другому). Нарисуем на поверхности  $N$  кривые  $f_1(u_i)$  и  $f_2(u_i)$ ,  $i = 1, \dots, g$ .

**Определение 1.** Систему кривых  $\{f_1(u_i)\}$  и  $\{f_2(u_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, g$ , на сфере с  $g$  ручками  $N$  называют *диаграммой Хегора* многообразия  $M^3$ .

**10.2. Теорема.** Если два многообразия  $M$  и  $M'$  имеют одну и ту же диаграмму Хегора, то эти многообразия гомеоморфны.

*Доказательство.* Пусть  $f_i : \partial M_i^3 \rightarrow N$ ,  $i = 1, 2$  — склеивающие гомеоморфизмы для многообразия  $M$ ; для многообразия  $M'$  используем аналогичные обозначения. Без ограничения общности можно считать, что  $M_2 = M'_2$  и  $N = \partial M_2 = \partial M'_2$  (рис. 10.2).

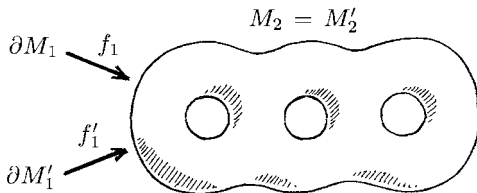


Рис. 10.2

Так как у  $M$  и  $M'$  одна и та же диаграмма Хегора, то  $f_1$  и  $f'_1$  — такие гомеоморфизмы  $\partial M_1$  и  $\partial M'_1$  на  $N$ , что образы меридианов  $u_i$  и  $u'_i$ ,  $i = 1, \dots, g$ , при этих гомеоморфизмах совпадают. Покажем, что в этом случае тождественный гомеоморфизм  $h_2 : M_2 \rightarrow M'_2$  можно продолжить до гомеоморфизма  $h : M \rightarrow M'$ . Гомеоморфизм  $(f'_1)^{-1} \circ f_1 : \partial M_1 \rightarrow \partial M'_1$  переводит каждый меридиан многообразия  $M_1$  в соответствующий меридиан многообразия  $M'_1$ . Так как любой гомеоморфизм одной окружности на другую можно продолжить до гомеоморфизма ограниченных ими кругов (по радиусам), то гомеоморфизм меридианов можно продолжить до гомеоморфизма дисков, которые они ограничивают в многообразиях  $M_1$  и  $M'_1$  (см. рис. 10.1). Разрезав  $M_1$  и  $M'_1$  вдоль этих дисков, по-

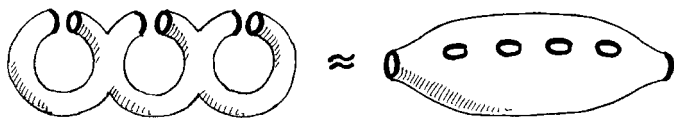


Рис. 10.3

лучим многообразия  $D_1$  и  $D'_1$ , гомеоморфные трехмерному шару (рис. 10.3).

Так как любой гомеоморфизм между двумя двумерными сферами можно продолжить до гомеоморфизма ограниченных ими шаров (снова по радиусам), то гомеоморфизм между краями шаров  $D_1$  и  $D'_1$  можно продолжить до гомеоморфизма между самими шарами (рис. 10.3).

**10.3.** Полученное описание разбиения Хегора пока не удовлетворяет нашим требованиям. Определение 1 все еще опирается на гомеоморфизм  $f$  и, тем самым, непосредственно использует строение многообразия. Кроме того, из этого определения не видно, как именно может (и как не может) выглядеть диаграмма Хегора. Следующее определение свободно от этих недостатков.

**Определение 2.** Систему замкнутых кривых  $u_1, \dots, u_g$  и  $v_1, \dots, v_g$  на сфере с  $g$  ручками  $N$  называют *диаграммой Хегора*, если выполняются следующие два условия:

- (1) кривые  $u_1, \dots, u_g$  попарно не пересекаются и дополнение к их объединению связно;
- (2) кривые  $v_1, \dots, v_g$  попарно не пересекаются и дополнение к их объединению связно.

Проверим эквивалентность определений 1 и 2. Ясно, что меридианы тела с ручками попарно не пересекаются и не разбивают ее край на части. Поэтому нужно лишь проверить, что любая диаграмма Хегора в смысле определения 2 соответствует разбиению Хегора некоторого многообразия.

Прежде всего докажем, что если сферу с  $g$  ручками  $N$  разрезать по  $g$  окружностям, не разбивающим  $N$  на части, то в результате получим сферу  $S^2$ , из которой вырезано  $2g$  дисков. Предположим, что вместо этого мы в результате получили некоторую поверхность  $H$  — сферу с  $h$  ручками, из которой вырезано  $2g$  дисков. Вырезание одного диска умень-

шает эйлерову характеристику\* на 1. Поэтому эйлерова характеристика поверхности  $H$  равна  $(2 - 2h) - 2g$ . С другой стороны, разрезание поверхности вдоль окружностей не изменяет эйлерову характеристику, поэтому  $2 - 2h - 2g = 2 - 2g$ , а значит,  $h = 0$ , что и утверждалось.

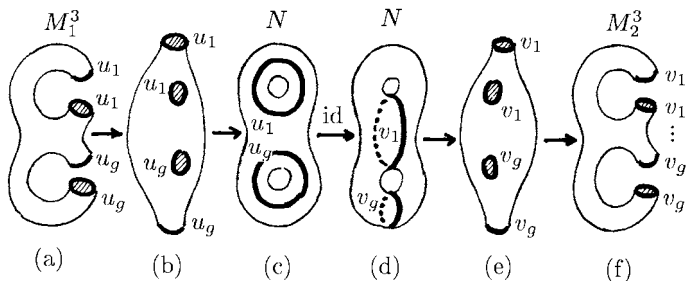


Рис. 10.4

Возьмем теперь два экземпляра поверхности  $N$ . Разрежем один экземпляр вдоль окружностей  $u_i$  (рис. 10.4 (c)), а другой экземпляр разрежем вдоль  $v_i$  (рис. 10.4 (d)). В каждом случае в результате получим сферу с  $2g$  дырками (рис. 10.4 (b) и (e)). Эти сферы можно гомеоморфно продеформировать так, чтобы края дырок соответствовали каноническим меридианам тел с  $g$  ручками (рис. 10.4 (a) и (f)). Теперь легко построить тела с  $g$  ручками  $M_1^3$  и  $M_2^3$  вместе с гомеоморфизмами их краев на  $N$ , переводящими меридианы тел  $M_1^3$  и  $M_2^3$  в окружности  $u_i$  и  $v_i$  на поверхности  $N$  соответственно. Это дает требуемое разбиение Хегора.  $\square$

## §11. Линзы

Пока что мы предъявили совсем мало примеров трехмерных многообразий, представленных разбиениями или диаграммами Хегора. В этом параграфе мы рассмотрим бесконечную серию трехмерных многообразий, которые удобно представляются с помощью диаграммы Хегора: классические линзы.

\* Читатель, не знакомый с этим понятием, может обратиться к пунктам 12.6 или 21.2.

**11.1.** Единственное трехмерное многообразие, которое можно склеить из двух шаров по гомеоморфизму их краев, это трехмерная сфера  $S^3$ . Из двух полноторий, как мы уже видели, помимо сферы  $S^3$  (см. 8.4) можно получить проективное пространство  $\mathbb{R}P^3$  (задача 8.4). Однако из двух полноторий можно склеить не только  $S^3$  и  $\mathbb{R}P^3$ , но и другие многообразия. Мы начнем с того, что дадим геометрическое определение этих многообразий, основанное на действии дискретных групп на  $S^3$ , и лишь затем обсудим их представление диаграммами Хегора.

Пусть  $p$  и  $q$  — взаимно простые натуральные числа, причем  $p \geq 3$ . На единичной сфере  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  зададим действие (без неподвижных точек) группы  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  с образующей  $\sigma$ , положив

$$\sigma(z, w) = (\exp(2\pi i/p)z, \exp(2\pi i q/p)w).$$

Профакторизуем  $S^3$  по этому действию группы  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , т.е. отождествим каждую точку  $x \in S^3$  с точками  $\sigma x, \dots, \sigma^{p-1}x$ . Так как рассматриваемое действие не имеет неподвижных точек, то легко убедиться, что полученное факторпространство будет трехмерным многообразием; его называют *линзой* (или *линзовым пространством*) и обозначают  $L(p, q)$ . Из определения видно, что  $L(p, q) = L(p, q + np)$ , т.е.  $q$  можно считать не натуральным числом, а элементом группы  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

**11.2.** Покажем, что при факторизации  $S^3$  по указанному действию группы  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  из полноторий  $|z|^2 \leq 1/2$  и  $|w|^2 \leq 1/2$  получаются снова некоторые полнотория, т.е. линза  $L(p, q)$  склеена из двух полноторий. Рассмотрим следующее клеточное разбиение сферы  $S^3$ :

(0) нульмерные клетки

$$(0, \exp(2\pi i k/p));$$

(1) одномерные клетки

$$(0, \exp(2\pi i \theta)), \\ k/p < \theta < (k+1)/p;$$

(2) двумерные клетки

$$(\rho \exp(2\pi i k/p), w), \\ 0 < \rho \leq 1, \quad |w| = \sqrt{1 - \rho^2};$$

## (3) трехмерные клетки

$$\begin{aligned}
 & (\rho \exp(2\pi i\theta), w), \\
 & 0 < \rho \leq 1, \quad k/p < \theta < (k+1)/p, \quad |w| = \sqrt{1 - \rho^2}, \\
 & k = 0, 1, \dots, p-1.
 \end{aligned}$$

Количество клеток каждой размерности равно  $p$  (они нумеруются индексом  $k$ ). При действии группы  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  клетки переставляются друг с другом, поэтому указанное клеточное разбиение сферы  $S^3$  индуцирует клеточное разбиение линзы  $L(p, q)$  с одной клеткой в каждой размерности от 0 до 3. Это означает, что линзу можно получить из одной трехмерной клетки, отождествив подходящим образом точки ее края под действием группы  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

К сожалению, координатное представление нашей трехмерной клетки в четырехмерном пространстве  $\mathbb{C}^2$  неудобно для работы с ней, поэтому начнем с того, что перейдем к более естественной системе координат  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , в которой наша трехмерная клетка будет просто единичным шаром.

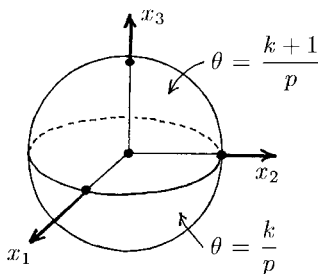


Рис. 11.1

Чтобы сделать эту замену координат, сопоставим точке

$$\begin{aligned}
 & (\rho \exp(2\pi i\theta), w), \\
 & 0 < \rho \leq 1, \quad k/p < \theta < (k+1)/p, \quad |w|^2 + \rho^2 = 1,
 \end{aligned}$$

точку  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , где

$$x_1 + ix_2 = w, \quad x_3 = (2p\theta - 2k - 1)\rho;$$

при этом  $|x_3| \leq \rho$  и  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$  (рис. 11.1). Точки сферы  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ , для которых  $x_3 > 0$  (соответственно,  $x_3 < 0$ ) сопоставляются точкам, для которых  $\theta = (k+1)/p$  (соответственно  $\theta = k/p$ ).

Точки, для которых  $\theta = k/p$ , образующая  $\sigma \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  переводит в точки, для которых  $\theta = (k+1)/p$ , т.е. точки нижней полусферы образующая  $\sigma$  переводит в точки верхней полусферы. На координаты  $x_1$  и  $x_2$  элемент  $\sigma$  действует как поворот на угол  $2\pi q/p$  вокруг начала координат. отождествив посредством такого поворота точки нижней полусферы с точками верхней полусферы, получим линзу  $L(p, q)$ .

По традиции трехмерную клетку, для которой производится указанное отождествление точек края, изображают не в виде шара, а в виде сплюснутого диска, напоминающего линзу (рис. 11.2). Название «линза» связано именно с этим.

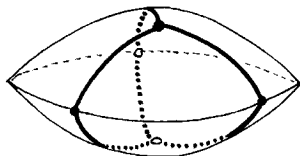


Рис. 11.2

Полноторие  $|w|^2 \leq 1/2$  пересекает трехмерную клетку, из которой мы строим линзу  $L(p, q)$ , по объемному цилиндру (со сферическими основаниями), заданному неравенствами  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$  и  $x_1^2 + x_2^2 \leq 1/2$  (рис. 11.3). При склейке

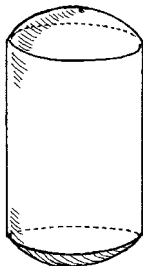


Рис. 11.3

по действию элемента  $\sigma$  мы должны склеить нижнее основание этого цилиндра с верхним основанием, совершив при этом поворот на  $2\pi q/p$ . В результате получим полноторие  $M_1^3$ . Доказательство того, что дополнение  $M_1^3$  в линзе  $L(p, q)$  тоже будет полноторием, мы оставляем читателю. (Это доказательство фактически содержится в конструкции, описанной ниже, в 11.3.)

**Задача 11.1.** Найдите фундаментальную группу\* линзы  $L(p, q)$ .

**11.3.** Как следует из результата предыдущей задачи, линзы  $L(p, q)$  и  $L(p', q')$  не гомеоморфны при  $p \neq p'$ . С другой стороны, непосредственно из определения видно, что линзы  $L(p, q)$  и  $L(p, q')$  гомеоморфны при  $q \equiv q' \pmod{p}$ .

Наша следующая цель — доказать, что линзы  $L(p, q)$  и  $L(p, q')$  гомеоморфны при  $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ . (Тогда они будут гомеоморфны и при  $qq' \equiv -1 \pmod{p}$ , так как линзы  $L(p, q)$  и  $L(p, q')$  гомеоморфны при  $q' \equiv -q \pmod{p}$ .)

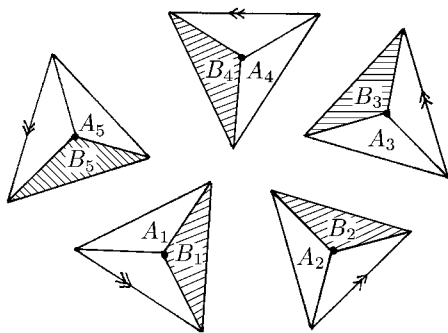


Рис. 11.4

Чтобы доказать требуемое, разрежем трехмерную клетку на тетраэдры, проведя  $p$  полуплоскостей через ось  $x_3$  и нульмерные клетки (рис. 11.4). Обозначим верхнюю и нижнюю грани первого тетраэдра через  $T_1$  и  $S_1$  соответственно, а левую и правую — соответственно, через  $A_1$  и  $B_1$ . Грани

\* Читатель, не знакомый с этим понятием, может обратиться к §4 Приложения, с. 309.



остальных тетраэдров обозначим аналогично. Первоначально грани  $B_i$  и  $A_{i+1}$  совпадали, а преобразование  $\sigma$  отождествляло грани  $S_i$  и  $T_{i+q}$  (номера граней берутся по модулю  $p$ ).

Сделаем теперь наоборот, т.е. склеим сначала не верхнюю и нижнюю грани тетраэдра, а правую и левую, и лишь затем склеим верхнюю и нижнюю грани. В таком случае соседние грани тетраэдра будут иметь номера  $j, j + q, j + 2q, \dots, j + q'q, \dots$ . Грань  $B_j$  отождествляется с гранью  $A_{j+1}$ , которая совпадает с гранью  $A_{j+q'q}$ , поскольку  $qq' \equiv +1 \pmod{p}$ . Ясно, что конечный результат не зависит от того, в каком порядке производятся отождествления. Поэтому склейка со сдвигом на  $q$  и склейка со сдвигом на  $q'$  приводят к одному и тому же результату, т.е. линзы  $L(p, q)$  и  $L(p, q')$  гомеоморфны.

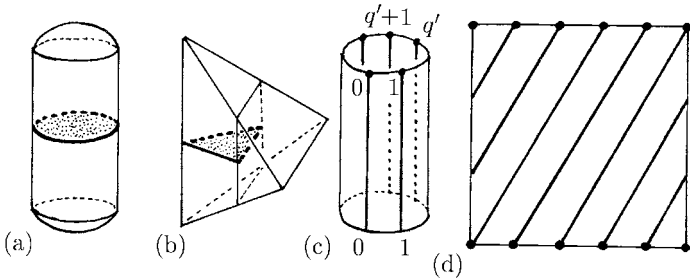


Рис. 11.5

**11.4.** Теперь мы готовы описать строение диаграммы Хегора для линзы  $L(p, q)$ . Выберем в качестве меридионального диска полнотория  $|w|^2 \leq 1/2$  его сечение плоскостью  $X_3 = 0$  (рис. 11.5 (a)). На рис. 11.5 (b) мы изображили часть меридионального диска, расположенную в одном из тетраэдров, на которые мы разрезали линзу. Эта картинка показывает, что граничная окружность меридионального диска соответствует  $p$  отрезкам на другом полнотории  $|w|^2 \geq 1/2$  (рис. 11.5 (c)). Но при отождествлении нижняя точка с номером  $i$  склеивается с верхней точкой  $i + q'$ , где  $qq' \equiv 1 \pmod{p}$ . Так как числа  $p$  и  $q'$  взаимно простые, то на торе получаем замкнутую кривую (она изображена на рис. 11.5 (d)). Это и есть требуемая диаграмма Хегора.

## Комментарии

Идея многообразия как геометрического объекта, не расположенного в каком-то линейном пространстве, а обладающего своей собственной внутренней геометрией, принадлежит Б. Риману. Это понятие появилось до понятия абстрактного топологического пространства, и первоначально многообразие всегда было снабжено метрикой. Мы не будем пытаться описать последовательную «топологизацию» понятия трехмерного многообразия, которая происходила в первой трети XX века. Основные имена, помимо Хегора и Пуанкаре, это Александер, Ден, Нильсен, Зейферт. Классический текст, вобравший в себя все основные достижения в топологии за этот период, это *Lehrbuch der Topologie* Зейферта и Трельфалля ([ST], 1934).

Основная часть материала этой главы вполне традиционна и содержится во многих учебниках, например, в [MF] и [ST]. Исключение составляют §9, в котором мы следуем статье [Sco], и теорема 8.8 — стандартный «фольклор» (мы не смогли найти доказательство этой теоремы в доступной нам литературе).

## Глава V

# Гомеоморфизмы поверхностей

Основная составная часть разбиения Хегора — это гомеоморфизм двумерных поверхностей. Поэтому будет полезно получить более комбинаторное описание таких гомеоморфизмов, например, в терминах каких-либо элементарных операций. Такие операции, называемые скручиваниями Дена, уже фактически были использованы нами в §7 в частном случае круга с дырками. В общем случае они определяются ниже и используются для того, чтобы сформулировать и доказать теорему Дена–Ликориша о гомеоморфизмах поверхностей. Эта теорема имеет много важных следствий, которые будут обсуждены в этой главе. Как мы увидим, теорема Дена–Ликориша — это не только инструмент для кодирования диаграмм Хегора: она служит основой для более важного и более удобного способа представления трехмерных многообразий с помощью перестроек (мы подробно обсудим его в следующей главе). Наиболее важным для последующего изложения результатом этой главы является следствие 12.4, в котором утверждается существование определенного представления любого трехмерного многообразия с помощью перестроек.

### §12. Теорема Дена–Ликориша и ее следствия

**12.1.** В предыдущей главе мы убедились, что любое ориентируемое трехмерное многообразие  $M^3$  можно получить,

склеив два тела с ручками  $M_1^3$  и  $M_2^3$  по некоторому гомеоморфизму их краев  $f : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$ . При этом можно считать, что  $\partial M_1^3 = \partial M_2^3$ .

**Задача 12.1.** Докажите, что в указанной выше ситуации без ограничения общности можно считать, что гомеоморфизм  $f : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3 = \partial M_1^3$  сохраняет ориентацию.

При малом изменении гомеоморфизма  $f : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$  многообразие  $M^3$  (рассматриваемое с точностью до топологической эквивалентности) не изменяется. Поэтому для разбиений Хегора изотопным гомеоморфизмам соответствует одно и то же трехмерное многообразие.

**12.2.** Простейший пример сохраняющего ориентацию гомеоморфизма двумерной поверхности  $N$ , не изотопного тождественному гомеоморфизму, можно получить следующим образом. Разрежем поверхность  $N$  вдоль кривой  $\gamma$ , не разбивающей  $N$  на части (рис. 12.1).

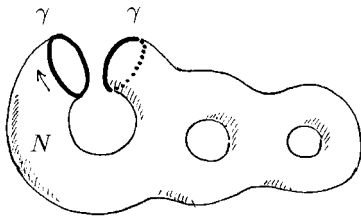


Рис. 12.1

Закрепим один из двух экземпляров кривой  $\gamma$ , полученных при разрезании, а второй экземпляр начнем поворачивать вдоль самого себя. Точки поверхности, расположенные вблизи поворачивающейся кривой, последуют за ней. Если сказать более точно, то односторонняя окрестность  $C$  кривой  $\gamma$  будет гомеоморфно отображаться так, что на  $\gamma$  это отображение совпадет с данным поворотом, а на другом крае цилиндрической поверхности  $C$  отображение будет тождественно. Если мы повернем кривую  $\gamma$  на  $360^\circ$ , то каждая точка кривой вернется на свое исходное место. Тогда оба экземпляра кривой можно снова склеить, получив тем самым гомеоморфизм поверхности  $N$  на себя. Этот гомеоморфизм называют *скручиванием Дена* поверхности  $N$  вдоль кривой  $\gamma$ .

Например, в случае тора скручивание Дена вдоль меридиана  $\alpha$  переводит параллель  $\beta$  в кривую  $\beta'$  (рис. 12.2).

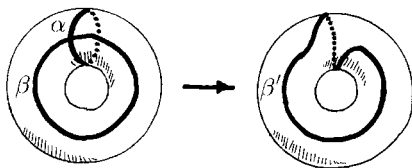


Рис. 12.2

**Задача 12.2.** Докажите, что скручивание Дена вдоль меридиана тора не изотопно тождественному гомеоморфизму.

Скручивания Дена являются весьма частным случаем гомеоморфизмов поверхностей, причем устроены они сравнительно просто. Тем не менее, во многих случаях вместо гомеоморфизмов общего вида достаточно рассмотреть этот узкий класс гомеоморфизмов. Дело в том, что справедливо следующее утверждение.

**12.3. Теорема Дена–Ликориша.** *Любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм ориентируемой двумерной поверхности без края можно представить в виде композиции скручиваний Дена и гомеоморфизмов, изотопных тождественному гомеоморфизму.*

**Задача 12.3.** Пусть гомеоморфизмы  $n_1, \dots, n_k$  двумерной поверхности  $N$  изотопны тождественному гомеоморфизму, а  $h_1, \dots, h_k$  — произвольные гомеоморфизмы  $N$ . Докажите, что гомеоморфизм  $n_1 \circ h_1 \circ \dots \circ n_k \circ h_k$  изотопен гомеоморфизму  $h_1 \circ \dots \circ h_k$ .

Теорему Дена–Ликориша мы докажем в следующем параграфе. А сначала мы выведем из нее два важных следствия.

**12.4. Следствие.** *Любое ориентируемое трехмерное многообразие  $M^3$  без края можно получить, вырезав из сферы  $S^3$  несколько полноторий, а затем приклеив их снова, но по другим гомеоморфизмам краев. При этом можно даже считать, что все эти полнотория незаузлены.*

*Доказательство.* Многообразие  $M^3$  можно получить, склеив два тела с  $g$  ручками по некоторому гомеоморфизму  $f$

их краев. Рассмотрим в сфере  $S^3$  стандартно вложенное тело с  $g$  ручками. Его дополнение гомеоморфно телу с  $g$  ручками. Поэтому  $S^3$  можно получить, склеив два экземпляра тела с  $g$  ручками по некоторому гомеоморфизму  $f_0$ .

Рассмотрим гомеоморфизм  $f^{-1}f_0$ . Разберем сначала случай, когда этот гомеоморфизм изотопен скручиванию Дена вдоль некоторой кривой  $\gamma$ . Напомним, что сфера  $S^3$  была склеена из двух экземпляров  $M_1^3$  и  $M_2^3$  тела с  $g$  ручками. Нарисуем на крае многообразия  $M_1^3$  кривую  $\gamma$ , а затем слегка вдавим ее внутрь  $M_1^3$ . Пусть  $T$  — малая окрестность кривой  $\gamma$ , гомеоморфная полноторию (рис. 12.3 (a)). Разрежем  $M_1^3$  по границе полнотория  $T$  и по перепонке (ленте), которую заметает в  $M_1^3 \setminus T$  кривая  $\gamma$  при вдавливании внутрь  $M_1^3$  (эта перепонка соединяет  $T$  с краем  $M_1^3$ ). Тогда можно построить гомеоморфизм  $j : M_1^3 \setminus T \rightarrow M_1^3 \setminus T$ , который будет тождествен вне заштрихованной на рис. 12.3 (b) области, а его ограничение на  $\partial M_1^3$  будет совпадать с рассматриваемым скручиванием Дена вдоль кривой  $\gamma$ .

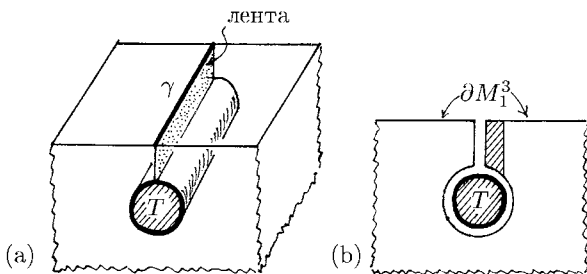


Рис. 12.3

Докажем теперь, что  $M^3$  можно получить из  $S^3$ , вырезав полноторие  $T$ , а затем приклеив его снова, но по другому гомеоморфизму краев. Чтобы доказать это, достаточно построить гомеоморфное отображение  $S^3 \setminus T$  на  $M^3 \setminus T$ . Предположим, что некоторое многообразие  $Z$  получено из многообразий  $X$  и  $Y$  склейкой по гомеоморфизму  $f_0 : \partial X \rightarrow \partial Y$ . Пусть также заданы два гомеоморфизма  $j_1 : X \rightarrow X'$  и  $j_2 : Y \rightarrow Y'$ . Чтобы получить из многообразий  $X'$  и  $Y'$  многообразие  $Z'$ , гомеоморфное  $Z$ , можно произвести следующую склейку: если ранее склеивались точки  $x \in X$  и  $f_0(x) \in Y$ ,

то теперь нужно склеить точки  $j_1(x) \in X'$  и  $j_2(f_0(x)) \in Y'$ . Таким образом, склейки по отображениям  $f_0$  и  $j_2 f_0 j_1^{-1}$  приводят к гомеоморфным многообразиям. В интересующем нас случае  $X = X' = M_1^3 \setminus T$ ,  $Y = Y' = M_2^3$ ,  $j_1 = j$  и  $j_2 = \text{id}$  (рис. 12.4).

$$\begin{array}{ccc}
 Y = \boxed{M_2^3} & \xrightarrow{j_2 = \text{id}} & \boxed{M_2^3} = Y' \\
 \uparrow f_0 & & \\
 X = \boxed{\begin{array}{c} \text{●} \\ M_1^3 - T \end{array}} & \xrightarrow{j_1 = j} & \boxed{\begin{array}{c} \text{●} \\ M_1^3 - T \end{array}} = X'
 \end{array}$$

Рис. 12.4

При склейке многообразий  $M_1^3 \setminus T$  и  $M_2^3$  по отображению  $f_0$  получаем  $S^3 \setminus T$ , а при их склейке по отображению  $j_2 f_0 j_1^{-1} = f_0 j^{-1}$  получаем  $M^3 \setminus T$ . В самом деле, по условию гомеоморфизм  $j : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$  изотопен гомеоморфизму  $f^{-1} f_0$ , поэтому гомеоморфизм  $f_0 j^{-1} : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$  изотопен  $f_0 (f^{-1} f_0)^{-1} = f$ , а при склейке по изотопным гомеоморфизмам получаются гомеоморфные многообразия. Итак, мы доказали требуемое утверждение в случае, когда склеивающий гомеоморфизм для  $M^3$  отличается от склеивающего гомеоморфизма для  $S^3$  на одно скручивание Дена.

В случае произвольного гомеоморфизма  $f$  нужно воспользоваться теоремой Дена–Ликориша и представить гомеоморфизм  $f^{-1} f_0$  в виде композиции скручиваний Дена. Для этих скручиваний мы аналогичным образом выбираем соответствующие им полнотория  $T_i$  и строим гомеоморфное отображение  $S^3 \setminus \bigcup T_i$  на  $M^3 \setminus \bigcup T_i$ , как это делалось выше. При этом нужно лишь позаботиться, чтобы полнотория  $T_i$  попарно не пересекались. Для этого достаточно сделать их достаточно тонкими и расположить их в  $M_1^3$  на разной глубине.

Первое утверждение следствия полностью доказано. Остается лишь доказать второе утверждение, т.е. доказать, что вырезаемые полнотория  $T_i \subset S^3$  можно считать незаузленными. Если некоторые из этих полноторий заузлены, то мы

преобразуем их в незаузленные, вырезав из  $S^3$  дополнительно несколько незаузленных полноторий, а затем приклеив их снова. Напомним, что согласно теореме 3.8 любой узел можно развязать, подящим образом изменив тип выбранных перекрестков. Поэтому достаточно доказать следующее утверждение.

**12.5. Лемма.** Пусть  $D^3 \subset \mathbb{R}^3$  — шар и  $T \subset D^3$  — полноторие, изображенное на рис. 12.5(a). Тогда существует гомеоморфизм пространства  $\mathbb{R}^3 \setminus T$  на себя, переводящий кривые  $AB$  и  $CD$ , изображенные на рис. 12.5(a), в кривые  $AB$  и  $CD$ , изображенные на рис. 12.5(b), и оставляющий неподвижными все точки вне шара  $D^3$ .

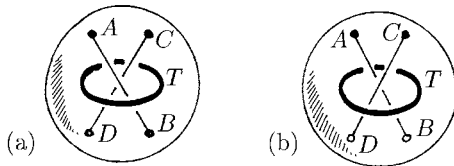


Рис. 12.5

*Доказательство.* Рассуждения будет легче представить себе наглядно, если мы будем считать, что у полнотория  $T$  внутренний диаметр во много раз меньше внешнего диаметра, т.е. «дырка» выглядит как глубокий колодец (рис. 12.6).

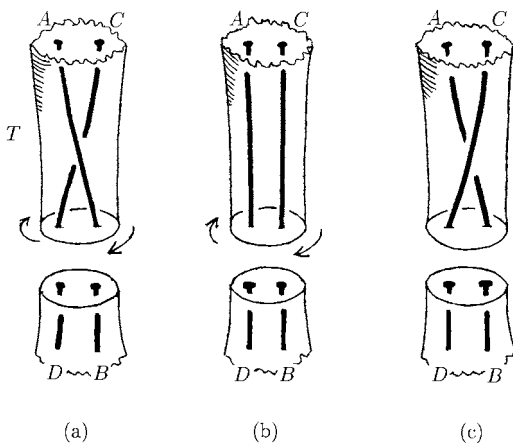


Рис. 12.6



Сделаем внутри шара  $D^3$  плоский разрез (в форме круга), проходящий через колодец, как показано на рис. 12.6 (а). Начнем теперь поворачивать верхний экземпляр разреза (он представляет собой круг с двумя отмеченными точками) в направлении, указанном стрелками; эта процедура возможна, поскольку полноторие  $T$  удалено из  $D^3$ . Сделав поворот на  $180^\circ$ , получим конфигурацию изображенную на рис. 12.6 (b). Сделаем затем поворот еще на  $180^\circ$  (рис. 12.6 (c)). В результате каждая точка разреза вернется в свое исходное положение. Поэтому оба экземпляра разреза можно склеить снова, получив тем самым гомеоморфизм  $D^3 \setminus T$  на себя, который можно продолжить до гомеоморфизма  $\mathbb{R}^3 \setminus T$  на себя, тождественного вне  $D^3$ . Этот гомеоморфизм осуществляет требуемую замену типа перекрестка.  $\square$

**Задача 12.4.** а) Докажите, что зацепления  $L_1$  и  $L_2$ , изображенные на рис. 12.7, не изотопны.

б) Докажите, что их дополнения  $\mathbb{R}^3 \setminus L_1$  и  $\mathbb{R}^3 \setminus L_2$  гомеоморфны.

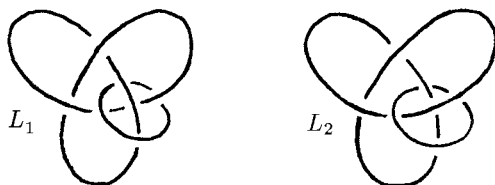


Рис. 12.7

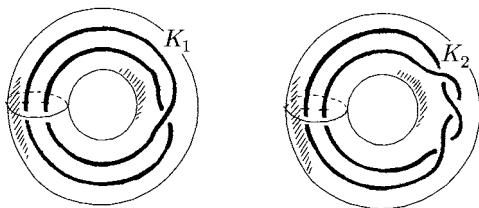


Рис. 12.8

**Задача 12.5.** а) Докажите, что узлы  $K_1$  и  $K_2$  в полнотории  $T$  (рис. 12.8) не изотопны, т.е. не существует изотопии

полнотория  $T$ , связывающей тождественное отображение с гомеоморфизмом  $T$  на себя, переводящим  $K_1$  в  $K_2$ .

б) Докажите, что дополнения  $T \setminus K_1$  и  $T \setminus K_2$  этих узлов в  $T$  гомеоморфны.

**12.6. Следствие (Теорема Рохлина).** *Любое ориентированное трехмерное многообразие (без края) является краем некоторого четырехмерного многообразия.*

Прежде чем доказывать это следствие (в 12.7), рассмотрим некоторые примеры многообразий, которые являются краями других многообразий, и примеры многообразий, которые не могут быть краем никакого многообразия. Мы говорим, что многообразие  $M^n$  является краем многообразия  $W^{n+1}$ , если  $\partial W^{n+1} = M^n$ .

**Задача 12.6.** Укажите многообразие, краем которого является бутылка Клейна.

Напомним, что нетождественное отображение  $\sigma : X \rightarrow X$  называют *инволюцией*, если  $\sigma(\sigma(x)) = x$  для всех  $x \in X$ .

**Задача 12.7.** Докажите, что если на многообразии  $M^n$  есть инволюция без неподвижных точек, то  $M^n$  является краем некоторого многообразия  $W^{n+1}$ .

**Задача 12.8.** Постройте инволюции без неподвижных точек на следующих многообразиях:

- а)  $\mathbb{R}P^{2n+1}$ ;
- б)  $\mathbb{C}P^{2n+1}$ ;
- в) произвольная компактная группа Ли.

Чтобы предъявить примеры многообразий, которые не могут служить краями никаких многообразий, нам понадобится понятие *эйлеровой характеристики* триангулированного многообразия  $M^n$ . Напомним, что она задается формулой

$$\chi(M^n) = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n,$$

где  $a_i$  — количество симплексов размерности  $i$ . Мы не будем доказывать, что эйлерова характеристика не зависит от триангуляции, а зависит лишь от самого многообразия  $M^n$ , хотя и будем пользоваться этим фактом.

**Задача 12.9.** Докажите, что эйлерова характеристика любого нечетномерного многообразия (без края) равна нулю.

**Задача 12.10.** Докажите, что если  $M^n = \partial W^{n+1}$ , то  $\chi(M^n) \equiv 0 \pmod{2}$ .

**Задача 12.11.** Докажите, что многообразия  $\mathbb{R}P^{2n}$  и  $CP^{2n}$  не являются краями других многообразий.

**12.7. Доказательство следствия 12.6.** Сначала мы опишем определенный тип перестроек многообразий произвольной размерности, при которых из многообразий, которые являются краями, снова получаются многообразия, которые являются краями. Затем мы проанализируем доказательство следствия 12.4 и убедимся, что многообразие  $M^3$  было получено из сферы  $S^3$  именно такими перестройками.

Для произвольных неотрицательных целых  $p$  и  $q$  многообразию  $S^p \times S^q$  является как краем многообразия  $D^{p+1} \times S^q$ , так и краем многообразия  $S^p \times D^{q+1}$ . Поэтому из любого многообразия  $M_1^n$  размерности  $n = p + q + 1$  можно вырезать  $D^{p+1} \times S^q$  и вклеить вместо него  $S^p \times D^{q+1}$  (по естественному гомеоморфизму краев). Обозначим полученное в результате многообразие через  $M_2^n$ .

**Лемма.** *Существует многообразие  $W^{n+1}$ , краем которого служит несвязное объединение многообразий  $M_1^n$  и  $M_2^n$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим многообразие

$$W_1^{n+1} = M_1^n \times I,$$

где  $I = [0, 1]$ . Его край состоит из двух экземпляров многообразия  $M_1^n$ , а именно,

$$M_1^n \times \{0\} \quad \text{и} \quad M_1^n \times \{1\}.$$

Рассмотрим ручку  $D^{p+1} \times D^{q+1}$ . Ее край состоит из  $S^p \times D^{q+1}$  и  $D^{p+1} \times S^q$ , причем эти два многообразия пересекаются по  $S^p \times S^q$ . Отождествим многообразие  $D^{p+1} \times S^q$ , принадлежащее ручке  $D^{p+1} \times D^{q+1}$ , с многообразием  $D^{p+1} \times S^q$ , которое

было вырезано из  $M_1^n \times \{1\}$  (рис. 12.9). В результате получим требуемое многообразие  $W^{n+1}$ . В самом деле, одной компонентой края этого многообразия служит  $M_1^n \times \{0\} = M_1^n$ , а другая компонента края устроена следующим образом: из многообразия  $M_1^n \times \{1\}$  вырезано многообразие  $D^{p+1} \times S^q$  и вместо него вклеено  $S^p \times D^{q+1}$  по естественному гомеоморфизму краев; в результате такой операции получаем многообразие, гомеоморфное  $M_2^n$ .  $\square$

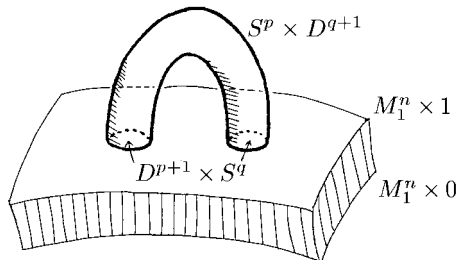


Рис. 12.9

В частности, если  $M_1^n = \partial U^{n+1}$ , то  $M_2^n = \partial V^{n+1}$ , где многообразие  $V^{n+1}$  получено из многообразий  $U^{n+1}$  и  $W^{n+1}$  склейкой по тождественному гомеоморфизму  $\partial U^{n+1} = M_1^n \rightarrow M_1^n = \partial W^{n+1}$ .

Для перестроек трехмерных многообразий нам нужен случай  $p = q = 1$ . В этом случае вырезается многообразие  $D^2 \times S^1$  и вместо него вклеивается  $S^1 \times D^2$ . Каждое из этих многообразий гомеоморфно полноторию, причем при естественном гомеоморфизме краев

$$\partial(D^2 \times S^1) \rightarrow \partial(S^1 \times D^2)$$

меридианы одного полнотория переходят в параллели другого полнотория. Итак, в случае  $p = q = 1$  перестройка устроена следующим образом: из многообразия вырезается полноторие, а затем оно вклеивается снова по гомеоморфизму, переводящему меридианы в параллели, а параллели в меридианы.

В процессе доказательства следствия 12.4 мы получили многообразие  $M^3$  из  $S^3$ , вырезая полнотория, а затем вклеивая их вновь по некоторым другим гомеоморфизмам краев.

Исследуем теперь эти гомеоморфизмы более внимательно и убедимся, что они относятся именно к требуемому типу гомеоморфизмов, т.е. можно считать, что они переводят меридианы в параллели, а параллели в меридианы. Пусть  $a$  — меридиан полнотория, вырезанного из  $S^3$ , а  $b$  — меридиан полнотория, вклеенного в  $S^3$  (при перестройке, описанной в доказательстве следствия 12.4). Нарисуем эти кривые на краю многообразия  $S^3 \setminus T$  (рис. 12.10).

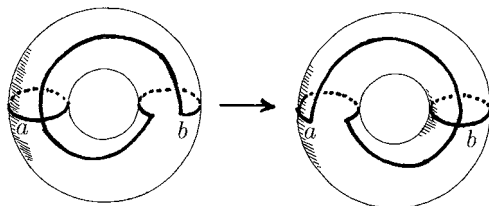


Рис. 12.10

Результат приклейки полнотория к торической компоненте края трехмерного многообразия зависит лишь от того, как приклеивается меридиан полнотория. В самом деле, переход от полнотория со стандартными параллелью и меридианом к полноторию со стандартным меридианом и произвольной параллелью (рис. 12.11) можно выполнить с помощью изотопий и конечного числа скручиваний полнотория вдоль меридионального диска. Но эти преобразования не изменяют данное многообразие.

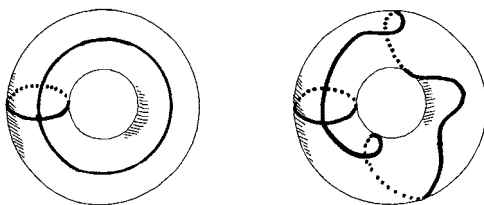


Рис. 12.11

Таким образом, две приклейки полнотория, изображенные на рис. 12.10, эквивалентны приклейкам, изображенным на

рис. 12.12. Следовательно, переклейка полнотория, производимая в доказательстве следствия 12.4, эквивалентна переклейке, меняющей местами параллели и меридианы, что и требовалось.

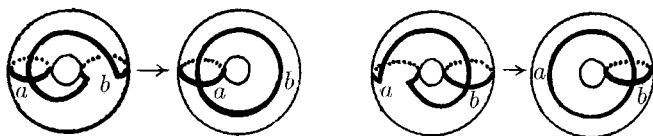


Рис. 12.12

В случае, когда из  $S^3$  вырезается несколько полноторий, доказательство аналогично.  $\square$

### §13. Доказательство теоремы Дена–Ликориша

**13.1.** Эту теорему удобнее доказывать в более общем виде, включив в рассмотрение и двумерные поверхности с краем. Легко проверить, что для ориентируемой двумерной поверхности с непустым краем любой гомеоморфизм, тождественный на крае, сохраняет ориентацию. Мы докажем следующее утверждение.

**13.2. Теорема.** Пусть  $F$  — компактная ориентируемая двумерная поверхность с краем  $\partial F$ . Тогда любой гомеоморфизм  $h : F \rightarrow F$ , тождественный на  $\partial F$ , изотопен композиции скручиваний Дена. (В случае, когда  $\partial F = \emptyset$ , нужно дополнительно потребовать, чтобы гомеоморфизм  $h$  сохранял ориентацию.)

Будем называть *s-гомеоморфизмом* любую композицию скручиваний Дена и гомеоморфизмов, изотопных тождественному гомеоморфизму. Доказательство теоремы 13.2, которое приводится в 13.4, основано на следующей лемме.

**13.3. Лемма.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — замкнутые кривые на компактной ориентируемой двумерной поверхности  $F$  (возможно, с краем), причем каждая из этих кривых не разбивает

$F$  (т.е. ее дополнение в  $F$  связно). Тогда существует с-гомеоморфизм поверхности  $F$ , переводящий  $\alpha$  в  $\beta$ .

*Доказательство.* Разберем следующие три случая.

*Случай 1.* Кривые  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются (трансверсально) ровно в одной точке. Тогда композиция скручиваний Дена  $\tau_\alpha$  и  $\tau_\beta$  вдоль кривых  $\alpha$  и  $\beta$  переводит кривую  $\alpha$  в кривую, изотопную кривой  $\beta$  (рис. 13.1).

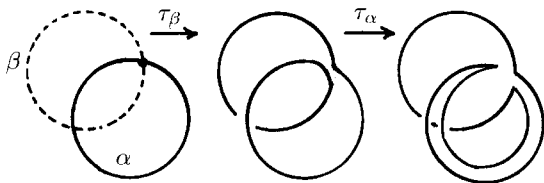


Рис. 13.1

*Случай 2.* Кривые  $\alpha$  и  $\beta$  не пересекаются. Покажем, что в этом случае существует замкнутая кривая  $\gamma$ , которая не разбивает поверхности  $F$  и пересекает каждую из кривых  $\alpha$  и  $\beta$  (трансверсально) ровно в одной точке. Тогда можно будет применить случай 1 и перевести сначала  $\alpha$  в  $\gamma$ , а затем  $\gamma$  в  $\beta$ .

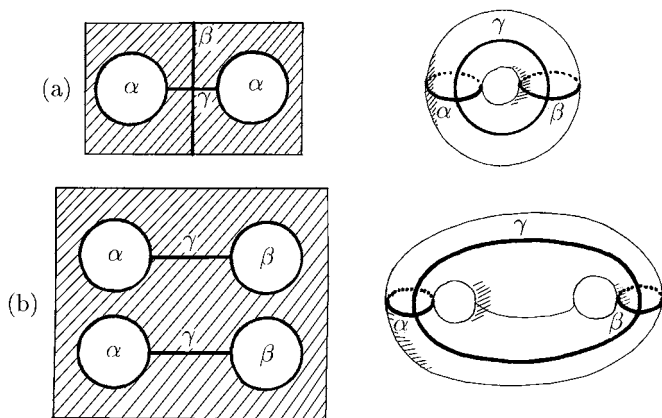


Рис. 13.2

Разрежем поверхность  $F$  вдоль кривой  $\alpha$ . В случае, когда  $\alpha \cup \beta$  разбивает  $F$ , требуемая кривая  $\gamma$  изображена на рис. 13.2(a). Если же  $\alpha \cup \beta$  не разбивает  $F$ , то к разрезу

вдоль  $\alpha$  добавим разрез вдоль  $\beta$ . Требуемая кривая изображена на рис. 13.2 (b).

*Случай 3.* Количество точек пересечения  $\alpha$  и  $\beta$  больше 1. Если кривые  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются в бесконечном числе точек (или если некоторые точки пересечения не трансверсальны), то с помощью изотопии (малого шевеления) кривую  $\beta$  можно заменить на кривую  $\beta'$ , которая трансверсально пересекает  $\alpha$  в конечном числе точек. Поэтому будем считать, что  $\alpha$  и  $\beta$  трансверсально пересекаются в  $n$  точках, где  $n < \infty$ .

Теперь достаточно доказать, что существует кривая  $\gamma$ , обладающая следующими свойствами:

- (1)  $\gamma$  не разбивает поверхность  $F$ ;
- (2)  $\gamma$  пересекает  $\alpha$  не более чем в одной точке;
- (3)  $\gamma$  пересекает  $\beta$  менее чем в  $n$  точках.

Этого в самом деле достаточно, потому что такую кривую  $\gamma$  можно перевести в  $\alpha$  (согласно результатам случаев 1 и 2), а затем можно применить индукцию по  $n$  и перевести кривую  $\gamma$  в  $\beta$ .

Чтобы доказать существование требуемой кривой  $\gamma$ , рассмотрим на кривой  $\beta$  две соседние точки пересечения  $P$  и  $Q$  (это означает, что дуга  $l$  кривой  $\beta$ , ограниченная точками  $P$  и  $Q$ , пересекает кривую  $\alpha$  лишь в точках  $P$  и  $Q$ ). Точки  $P$  и  $Q$  разбивают кривую  $\alpha$  на две дуги  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Рассмотрим кривые  $\gamma_1 = \alpha_1 \cup l$  и  $\gamma_2 = \alpha_2 \cup l$  (рис. 13.3).

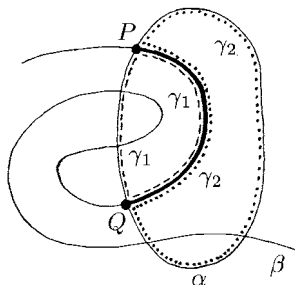


Рис. 13.3

Мы утверждаем, что по крайней мере одна из кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  не разбивает поверхность  $F$ .



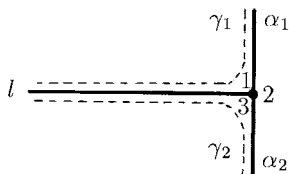


Рис. 13.4

Предположим, что обе кривые разбивают  $F$ . Тогда из области 1 (см. рис. 13.4) нельзя попасть в область 2, а из области 3 нельзя попасть в область 2. Следовательно, из области 2 нельзя попасть ни в область 1, ни в область 3. Поэтому кривая  $\alpha$  разбивает  $F$ , что противоречит условию леммы. Наше утверждение доказано.

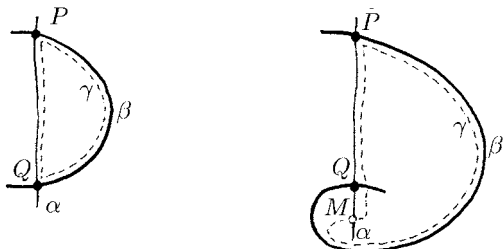


Рис. 13.5

Предположим для определенности, что кривая  $\gamma_1$  не разбивает  $F$ . Слегка сдвинув ее, можно получить требуемую кривую  $\gamma$  (см. рис. 13.5). Доказательство леммы 13.3 завершено.  $\square$

**13.4. Доказательство теоремы 13.2.** Согласно классификации двумерных поверхностей с краем поверхность  $F$  представляет собой сферу с  $g$  ручками, из которой вырезано  $k$  дисков. Разрезав  $F$  по меридианам  $m_1, \dots, m_g$  (рис. 13.6), получим диск, из которого удалено  $k + 2g - 1$  маленьких дисков.

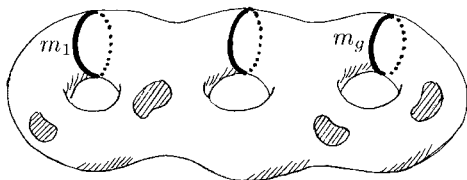


Рис. 13.6

При гомеоморфизме  $h : F \rightarrow F$  меридиан  $m_1$  переходит в кривую  $h(m_1)$ , не разбивающую  $F$ . Согласно лемме 13.3 существует  $c$ -гомеоморфизм  $f_1$ , переводящий  $h(m_1)$  в  $m_1$ . Предположим сначала, что ориентации кривых  $f_1 h(m_1)$  и  $m_1$  совпадают. Тогда существует гомеоморфизм  $f'_1$ , изотопный  $f_1$ , для которого гомеоморфизм  $f'_1 h$  тождественен на кривой  $m_1$ . Кривая  $m_1$  разбивает свою  $\varepsilon$ -окрестность  $U$  на две части  $U_1$  и  $U_2$ . Так как гомеоморфизм  $f'_1 h$  сохраняет ориентацию и тождественен на  $m_1$ , то он переводит точки  $U_i$ , близкие к  $m_1$ , в точки внутри  $U_i$ . Это означает, что если мы разрежем  $F$  вдоль кривой  $m_1$ , то гомеоморфизм  $f'_1 h$  будет гомеоморфизмом полученной поверхности, тождественным на ее крае. После  $g$  таких разрезов получим гомеоморфизм  $f'_g \cdots f'_1 h$  круга с дырками, тождественный на крае. Согласно теореме 7.6 этот гомеоморфизм изотопен композиции скручиваний Дена, а значит, гомеоморфизм  $h$  тоже изотопен композиции скручиваний Дена.

Остается понять, что нужно делать в том случае, когда ориентации кривых  $f_1 h(m_1)$  и  $m_1$  противоположны. Так как кривая  $\alpha = m_1$  не разбивает  $F$ , то существует кривая  $\beta$ , пересекающая  $\alpha$  ровно в одной точке (рис. 13.7).

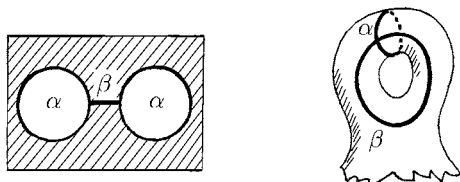


Рис. 13.7

Пусть  $\alpha^{-1}$  — кривая, поточечно совпадающая с  $\alpha$ , но имеющая противоположную ориентацию. Композиция скручиваний  $\tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta$  переводит кривые  $\alpha$  и  $\beta$  в кривые, изотопные  $\beta$  и  $\alpha^{-1}$  соответственно (рис. 13.8).

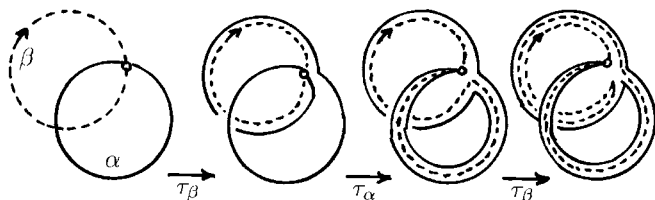


Рис. 13.8

Поэтому гомеоморфизм  $(\tau_\beta \tau_\alpha \tau_\beta)^2$  переводит кривые  $\alpha$  и  $\beta$  в кривые, изотопные  $\alpha^{-1}$  и  $\beta^{-1}$  соответственно. Для нас важно то, что он переводит кривую  $\alpha$  в кривую, изотопную  $\alpha^{-1}$ . Это позволяет построить  $s$ -гомеоморфизм  $f_1''$ , для которого кривая  $f_1'' h(m_1)$  поточечно совпадает с  $m_1$  и имеет ту же самую ориентацию. А такой случай был уже разобран выше.  $\square$

## Комментарии

Разбиение Хегора являются мостом между двумерной и трехмерной топологией, точнее говоря, между гомеоморфизмами двумерных поверхностей и трехмерными многообразиями. Эффективное описание первых позволяет эффективно описать последние. Основная геометрическая составная часть в описании гомеоморфизмов поверхностей — это скручивание Дена, изобретенное немецким математиком М. Деном (см. [De1]), который представил доказательство теоремы о том, что любой гомеоморфизм поверхности является композицией скручиваний. Однако это доказательство содержало существенные пробелы. Безупречное доказательство теоремы Дена было дано Ликоришем (см. [Lic1], 1962). Наше изложение основано на статье [Rou] и книге [MF].

Следует отметить, что большинство работ по топологии Дена и его современников (например, Хегора и Нильсена) было, с нынешней точки зрения, технически безупречно, хотя основные идеи были вполне здравы. Лишь после второй мировой войны в этой области была достигнута удовлетворительная степень строгости. В частности, Папакирьякопулос дал первое строгое доказательство [Pap] знаменитой леммы Дена (о диске, натянутом на стягиваемую кривую), а Цишанг наконец доказал (см. [Zi], [ZVC]) теорему Нильсена (которая утверждает, грубо говоря, что любой автоморфизм фундаментальной группы поверхности индуцируется гомеоморфизмом).

Основным следствием теоремы Дена–Ликориша является тот факт, что любое трехмерное многообразие можно получить из сферы, вырезая полнотория и вклеивая их снова по другим гомеоморфизмам краев. Этот факт, в свою очередь,

послужил отправной точкой для многих замечательных работ по топологии трехмерных многообразий нескольких авторов, среди которых наиболее знамениты В. А. Рохлин, С. П. Новиков, Р. Кирби и У. Тёрстон. Наша книга лишь в малой степени затрагивает эту область исследований. Современный обзор этой области (с упором на алгоритмические аспекты) содержится в книге [MF].

# Глава VI

## Перестройки трехмерных многообразий

В предыдущей главе мы преобразовывали трехмерные многообразия, вырезая из них полнотория и вклеивая их обратно по другим гомеоморфизмам краев. Мы доказали, что с помощью нескольких таких операций можно любое ориентируемое трехмерное многообразие, например сферу  $S^3$ , преобразовать в любое другое ориентируемое трехмерное многообразие  $M^3$  (следствие 12.4). Этот подход к заданию трехмерных многообразий будет основной темой этой главы. Развивая эту тему, мы изучим различные типы перестроек (§14 и §16), найдем удобное множество операций, которых достаточно для получения всех многообразий, а в конце обсудим замечательное исчисление Кирби (§19), которое позволяет описать все перестройки, приводящие к одному и тому же многообразию. Однако наше изложение не будет строго последовательным. Мы будем часто отклоняться от основного пути, чтобы подробнее обсудить встречающиеся темы. В частности, мы наконец введем коэффициент зацепления двух кривых (§15), вновь вернемся к линзам (§17) и рассмотрим другую знаменитую бесконечную серию трехмерных многообразий — гомологические сферы (§18).

## §14. Рациональные перестройки сферы по тривиальному узлу

**14.1.** В §12 было показано, что любое компактное ориентируемое трехмерное многообразие (без края) можно получить из сферы  $S^3$ , вырезав несколько незаузленных полноторий, а затем приклеив их снова по гомеоморфизму краев, меняющему местами параллели и меридианы. Но во многих ситуациях удобнее рассматривать перестройки более общего вида с произвольными склеивающими гомеоморфизмами. Полученное таким способом многообразие однозначно определяется образом  $J$  меридиана  $\alpha$  при склеивающем гомеоморфизме краевого тора  $S^1 \times S^1$  на себя, точнее говоря, изотопическим классом кривой  $J$ . Предположим, что  $J = p\alpha + q\beta$ , т.е.  $J$  — замкнутая кривая, обвивающая тор  $p$  раз в направлении меридиана и  $q$  раз в направлении параллели. Если сказать точнее, то это означает, что кривая  $J$  представляет элемент  $(p, q) \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \pi_1(S^1 \times S^1)$ .

Утверждение (а) доказываемого ниже предложения 14.1 означает, что указанные числа  $p$  и  $q$  взаимно просты, а утверждение (б) означает, что числа  $p$  и  $q$  определяют кривую  $J$  однозначно с точностью до изотопии.

**Предложение 14.1.** (а) *Если замкнутая кривая  $p\alpha + q\beta$  несамопересекающаяся, то либо числа  $p$  и  $q$  взаимно просты, либо одно из них равно 0, а другое равно  $\pm 1$ .*

(б) *Если две замкнутые несамопересекающиеся кривые на торе гомотопны, то они изотопны.*

*Доказательство.* (а) Тор можно получить из плоскости  $\mathbb{R}^2$ , отождествив точки  $(x, y)$  и  $(x + t, y + n)$ , где  $t, n \in \mathbb{Z}$ . Более того, любая кривая на торе может быть получена таким способом из некоторой кривой на плоскости. Мы докажем следующее утверждение: *если  $d$  — натуральное число, то на любой кривой  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  с концами  $A$  и  $B$  найдутся такие точки  $P$  и  $Q$ , что  $PQ \parallel AB$  и  $|PQ| = |AB|/d$ .*

Прежде всего покажем, что из этого утверждения вытекает утверждение (а). В самом деле, кривой  $p\alpha + q\beta$  соответствует плоская кривая, у которой координаты концов отличаются на  $p$  и  $q$ . Поэтому если  $p$  и  $q$  делятся на  $d$ , то разности

координат точек  $P$  и  $Q$  — целые числа, а значит, на торе точкам  $P$  и  $Q$  соответствует одна и та же точка. Таким образом, кривая на торе самопересекающаяся, что противоречит условию.

Чтобы доказать выделенное курсивом утверждение, мы перефразируем его, используя следующее определение. Будем говорить, что расстояние  $\rho$  реализуется на плоской кривой с концами  $A$  и  $B$ , если существует отрезок длиной  $\rho$ , параллельный  $AB$ , с концами на кривой. Требуется доказать, что расстояние  $|AB|/d$  реализуется на любой кривой с концами  $A$  и  $B$ .

Докажем сначала, что если  $0 < \delta < 1$ , то на любой кривой с концами  $A$  и  $B$  реализуется хотя бы одно из расстояний  $\delta|AB|$  и  $(1 - \delta)|AB|$ . Не теряя общности, можно считать, что  $A = (0, 0)$  и  $B = (1, 0)$ . Предположим, что для некоторой кривой  $\gamma_0$  с концами  $A$  и  $B$  не реализуются расстояния  $\delta$  и  $1 - \delta$ . Тогда при сдвигах этой кривой вдоль оси  $Ox$  на расстояния  $\delta$  и  $1 - \delta$  получаются кривые, не имеющие общих точек с исходной кривой  $\gamma_0$ . Пусть  $\gamma_\delta$  и  $\gamma_1$  — кривые полученные из кривой  $\gamma_0$  сдвигами вдоль оси  $Ox$  на расстояния  $\delta$  и  $1$  в положительном направлении. Тогда кривая  $\gamma_\delta$  не пересекается ни с  $\gamma_0$ , ни с  $\gamma_1$ . Построим кривую  $L$  следующим образом. Выберем на кривой  $\gamma_\delta$  точку с максимальной ординатой и проведем из нее луч, параллельный оси  $Oy$ , по направлению к  $+\infty$ , а из точки с минимальной ординатой проведем луч по направлению к  $-\infty$  (рис. 14.1).

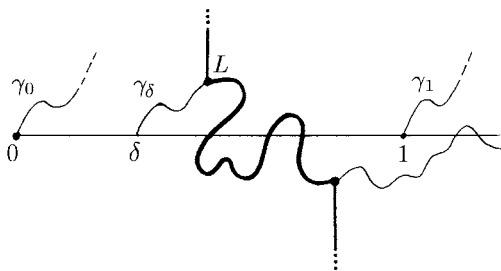


Рис. 14.1

Кривая  $L$  состоит из этих двух лучей и части кривой  $\gamma_\delta$ , идущей из начала одного луча в начало другого. Кривые  $\gamma_0$

и  $\gamma_1$  не пересекаются ни с кривой  $\gamma_\delta$ , ни с рассматриваемыми лучами. Поэтому они не пересекаются с кривой  $L$ . Но кривая  $L$  разбивает плоскость на две части, причем точки кривых  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  с максимальными ординатами лежат в разных частях. С другой стороны, кривые  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  имеют общую точку, а именно,  $(1,0)$ . Получено противоречие, поэтому хотя бы одно из расстояний  $\delta$  и  $1 - \delta$  реализуется.

Докажем теперь индукцией по  $d$ , что расстояние  $|AB|/d$  реализуется на любой кривой. При  $d = 1$  утверждение очевидно. Шаг индукции делается следующим образом. Пусть  $\delta = 1/d$ . Тогда  $1 - \delta = (d - 1)/d$ , поэтому одно из расстояний  $|AB|/d$  и  $(d - 1)|AB|/d$  реализуется. Если реализуется расстояние  $|AB|/d$ , то доказательство завершено. Если же реализуется расстояние  $(d - 1)|AB|/d$ , то для кривой, соединяющей концы отрезка длиной  $(d - 1)|AB|/d$ , согласно предположению индукции реализуется расстояние

$$\frac{1}{d - 1} \frac{(d - 1)|AB|}{d} = \frac{|AB|}{d},$$

что и требовалось.  $\square$

(б) Доказательство утверждения (б) проведем за четыре шага.

Шаг 1. *Можно считать, что данные кривые гомотопны меридиану тора.* В самом деле, пусть данные кривые имеют тип  $(p, q)$ . Согласно (а), числа  $(p, q)$  взаимно простые. Поэтому существуют такие целые числа  $r$  и  $s$ , что  $ps - qr = 1$ . Линейное преобразование

$$e_1 \mapsto pe_1 + qe_2, \quad e_2 \mapsto re_1 + se_2$$

индуцирует гомеоморфизм тора на себя, переводящий кривую типа  $(1, 0)$  в кривую типа  $(p, q)$ .

Шаг 2. *Достаточно доказать, что несамопересекающаяся кривая типа  $(1, 0)$  изотопна меридиану тора.* В самом деле, построив изотопии кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  в меридиан, легко построить изотопию кривой  $\gamma_1$  в кривую  $\gamma_2$ .

Шаг 3. *Достаточно доказать, что несамопересекающаяся кривая типа  $(1, 0)$  изотопна кривой, не пересекающей меридиан.* Разрежем тор вдоль меридиана. В результате



получим кольцо, внутри которого расположена несамопересекающаяся кривая, гомотопная краям кольца (рис. 14.2).

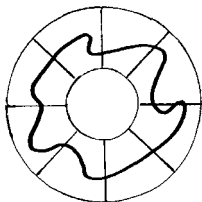


Рис. 14.2

Достаточно очевидно, что эта кривая изотопна любому из краев кольца.

Шаг 4. *Несамопересекающаяся кривая типа  $(1, 0)$ , пересекающая меридиан в  $n > 0$  точках, изотопна кривой, пересекающей меридиан менее чем в  $n$  точках.* Разрежем тор вдоль меридиана. В результате получим цилиндр. Из бесконечного множества таких цилиндров склеим бесконечный цилиндр, накрывающий тор. Рассмотрим поднятие  $\gamma_0$  данной кривой  $\gamma$  в этот цилиндр, т.е. одну из компонент прообраза кривой  $\gamma$  при накрывающем отображении (рис. 14.3).

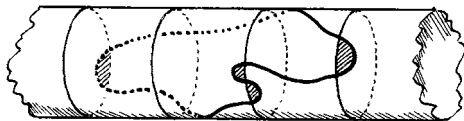


Рис. 14.3

Будем считать, что  $\gamma_0$  — кривая общего положения. Тогда она задает несколько «шапочек», заштрихованных на рисунке. Из условия  $n > 0$  следует, что есть хотя бы одна «шапочка» (и даже две, а именно, крайних). Требуется доказать, что с помощью изотопии всегда можно уничтожить хотя бы одну «шапочку». Отметим, что в процессе изотопии на торе должна получаться несамопересекающаяся кривая. А это означает, что кривая  $\gamma_0$  должна быть не только несамопересекающейся, но и она должна не пересекать остальные поднятия  $\gamma_n$  данной кривой  $\gamma$ . Но «шапочка» наименьшей высоты не содержит внутри себя точек кривых  $\gamma_m$ , так как иначе кривая

$\gamma$  была бы самопересекающейся. Поэтому такую «шапочку» всегда можно уничтожить с помощью изотопии, причем эта изотопия опускается на тор.  $\square$

**14.2. Определения и соглашения.** Рассмотрим перестройку сферы  $S^3$ , при которой сначала вырезается трубчатая  $\varepsilon$ -окрестность тривиального узла  $J \subset S^3$ , а затем полученное полноторие вклеивается снова так, что его меридиан  $\alpha$  отождествляется с кривой  $p\alpha + q\beta$ . Легко проверить, что перестройка, при которой меридиан  $\alpha$  отождествляется с кривой  $-\alpha$  (рис. 14.4 (а)), не изменяет многообразие. Поэтому перестройка, при которой меридиан отождествляется с кривой  $-\rho\alpha - q\beta$ , эквивалентна перестройке, при которой меридиан отождествляется с кривой  $p\alpha + q\beta$ .

Условимся считать, что ориентации параллели и меридиана выбраны так, как показано на рис. 14.4 (b).

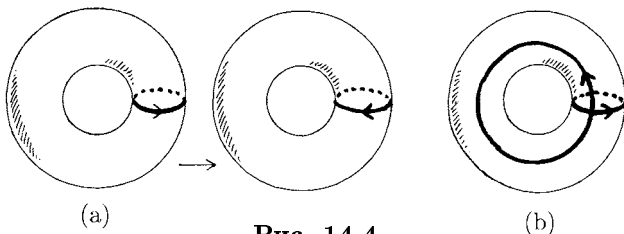


Рис. 14.4

Теперь из предложения 14.1 следует, что рассмотренная выше перестройка сферы однозначно задается рациональным числом  $r = p/q$ . Будем называть это число *оснащением* тривиального узла  $J$ , а соответствующую операцию — *рациональной перестройкой* с оснащением  $r$ . Обратите внимание, что тождественной перестройке соответствует оснащение  $r = 1/0 = \infty$ , а перестройке с оснащением  $r = 0$  соответствует гомеоморфизм краев, меняющий местами параллели и меридианы.

Рассмотрим теперь примеры многообразий, которые получаются при перестройках сферы  $S^3$  по оснащенным тривиальным узлам  $\bigcirc^r$ .

**14.3. Предложение.**  $\bigcirc^0 = S^1 \times S^2$ .

*Доказательство.* Сферу  $S^3$  можно получить, склеив два полнотория  $T_1$  и  $T_2$  по гомеоморфизму  $f : \partial T_1 \rightarrow \partial T_2$ , ме-

няющему местами параллели и меридианы. Перестройка по окружности с оснащением  $r = 0$  заключается в том, что сначала мы вырезаем полноторие  $T_2$  из  $S^3$ , а затем вклеиваем его снова по гомеоморфизму, меняющему местами параллели и меридианы. В результате получаем склейку двух полноторий  $T_1$  и  $T_2$  по тождественному гомеоморфизму краев. Так как  $T_i \approx S^1 \times D^2$ , а при склейке  $D^2$  с  $D^2$  по тождественному гомеоморфизму краев получаем  $S^2$ , то при склейке двух полноторий по тождественному гомеоморфизму краев получаем  $S^1 \times S^2$ .  $\square$

#### 14.4. Предложение. $\bigcirc^{p/q} = L(p, q)$

*Доказательство.* Линзу  $L(p, q)$  можно получить при склейке двух полноторий по гомеоморфизму краев, переводящему меридиан  $\alpha$  в кривую  $q\alpha + p\beta$  (см. §11). С другой стороны, сферу  $S^3$  можно получить при склейке двух полноторий по гомеоморфизму краев, переводящему  $\alpha$  в  $\beta$ , а  $\beta$  в  $\alpha$ . Поэтому  $L(p, q)$  можно получить из  $S^3$  переклейкой полнотория по гомеоморфизму, переводящему меридиан  $\alpha$  в кривую  $p\alpha + q\beta$ .  $\square$

#### 14.5. Предложение. $\bigcirc^{\pm 1/n} = S^3$ .

*Доказательство.* Если исходить из определения  $L(p, q)$ , данного в §11, то это предложение является частным случаем предыдущего. В самом деле,  $L(p, q)$  определяется как факторпространство единичной трехмерной сферы в  $\mathbb{C}^2$  по отношению эквивалентности

$$(z, w) \sim (\exp(2\pi i/p)z, \exp(2\pi iq/p)w).$$

Из этого определения видно, что при  $p = \pm 1$  никаких отождествлений точек не производится, т.е.  $L(\pm 1, n) = S^3$ .  $\square$

#### 14.6. Предложение. $\bigcirc^r \sim \bigcirc^{\frac{1}{\pm n + \frac{1}{r}}}$ .

*Доказательство.* Из определения линз видно, что  $L(p, q) \approx L(p, q \pm nr)$ , но именно это и утверждается в данном предложении.  $\square$

14.7. Отметим, что гомеоморфизм из предыдущего предложения далеко не очевиден, если мы будем исходить непосредственно из определения перестройки, не обращаясь к

определению линзы. Этот гомеоморфизм  $f$  (между многообразиями, полученными из  $S^3$  при перестройках по тривиальным узлам с оснащениями  $r$  и  $(\pm n + r^{-1})^{-1}$ ) играет важную роль в теории перестроек трехмерных многообразий. Поэтому изучим подробно его строение.

Перестройка сферы  $S^3$  по окружности с оснащением  $r = p/q$  приводит к многообразию, которое получается при склейке двух полноторий  $T_1$  и  $T_2$  по гомеоморфизму краев, переводящему меридиан  $\alpha$  в кривую  $q\alpha + p\beta$  (рис. 14.5).

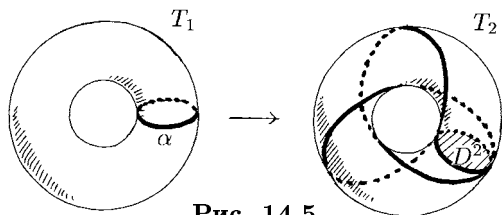


Рис. 14.5

Эта кривая пересекает меридиональный диск  $D$  в  $p$  точках. Разрежем полноторие  $T_2$  по меридиональному диску  $D$  и сделаем скручивание полнотория  $T_2$  на  $n$  оборотов. Тогда кривая  $q\alpha + p\beta$  перейдет в кривую  $(q \pm np)\alpha + p\beta$  (знак зависит от направления скручивания). Если кривая  $q\alpha + p\beta$  соответствует перестройке по окружности  $J$  с оснащением  $r = p/q$ , то кривая  $(q \pm np)\alpha + p\beta$  соответствует перестройке по окружности  $J$  с оснащением  $p/(q \pm np) = (\pm n + r^{-1})^{-1}$ . Здесь полноторие  $T_1$  является замыканием  $\epsilon$ -окрестности окружности  $J$ , а ограничение гомеоморфизма  $f$  на  $T_2$  является скручиванием вдоль параллели тора  $T_1$  (рис. 14.6).

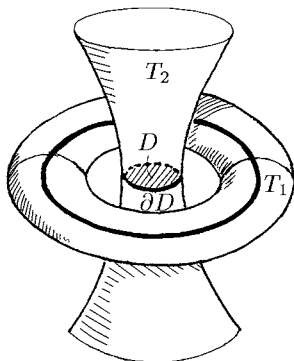


Рис. 14.6

Скручивание полнотория  $T_2$ , изображенное на рис. 14.7 (а), добавляет один оборот в направлении меридиана  $\alpha$ , а скручивание, изображенное на рис. 14.7 (б), добавляет один оборот в противоположном направлении. Поэтому скручивание первого типа соответствует знаку плюс перед  $n$ , а скручивание второго типа соответствует знаку минус. Этим мы завершим наше описание гомеоморфизма  $f$ .

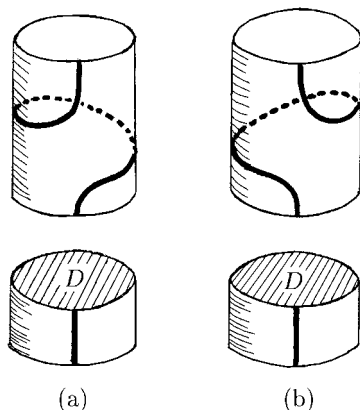


Рис. 14.7

## §15. Коэффициент зацепления

**15.1.** В предыдущем параграфе мы показали, что перестройка сферы по тривиальному узлу  $J$  задается рациональным числом  $r$  — оснащением узла  $J$ . Чтобы определить оснащение узла, нужно выбрать параллель и меридиан на его трубчатой  $\varepsilon$ -окрестности.

В случае произвольного узла меридиан можно выбрать без труда: мы просто возьмем сечение трубчатой окрестности узла плоскостью, ортогональной узлу в некоторой точке (рис. 15.1 (а)). Но выбор параллели вызывает затруднения. В случае тривиального узла можно было взять диаграмму без

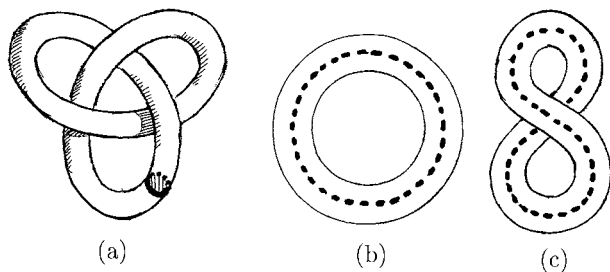


Рис. 15.1

перекрестков и в качестве параллели выбрать кривую  $K$ , изображенную на рис. 15.1 (b) пунктиром. Но если бы мы взяли диаграмму тривиального узла с одним перекрестком и аналогичным образом выбрали бы кривую  $K'$  (рис. 15.1 (c)), то эта кривая оказалась бы не эквивалентной кривой  $K$  в том смысле, что двухкомпонентные зацепления  $\{J, K\}$  и  $\{J, K'\}$  не изотопны. В случае трилистника две параллели, изображенные на рис. 15.2 тоже не эквивалентны.

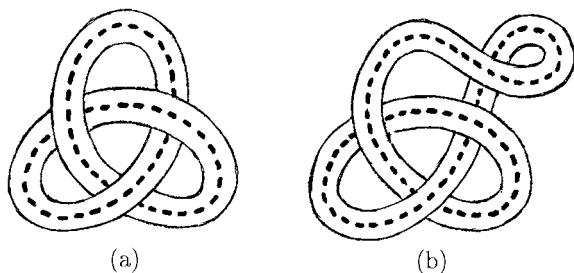


Рис. 15.2

**15.2.** Чтобы получить определение параллели, не зависящее от выбора диаграммы узла, мы воспользуемся одним из самых старых топологических инвариантов — введенным Гауссом коэффициентом зацепления двух ориентированных замкнутых кривых  $J$  и  $K$  в  $S^3$ . Для наших целей наиболее удобно следующее определение коэффициента зацепления. Рассмотрим диаграмму ориентированного зацепления, состоящего из двух кривых  $J$  и  $K$ . Будем обращать внимание лишь

на те перекрестки, где кривая  $K$  проходит над  $J$ . Такие перекрестки бывают двух типов (рис. 15.3). Для каждого рассматриваемого перекрестка возьмем соответствующее значение  $\varepsilon_i = \pm 1$  и сложим все числа  $\varepsilon_i$ . Полученное в результате целое число называют *коэффициентом зацепления* замкнутых ориентированных кривых  $J$  и  $K$  в  $S^3$  и обозначают  $\text{lk}(J, K)$ .

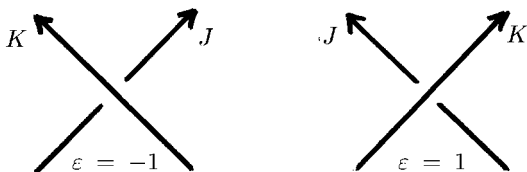


Рис. 15.3

**15.3. Теорема.** Коэффициент зацепления является инвариантом зацепления  $\{J, K\}$ , т.е. он не зависит от выбора диаграммы этого зацепления.

*Доказательство.* Согласно теореме Рейдемейстера (теорема 1.7) достаточно доказать, что  $\text{lk}(J, K)$  не изменяется при преобразованиях Рейдемейстера. Преобразования  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  никогда не изменяют наборов чисел  $\varepsilon_i$ , а преобразование  $\Omega_2$  либо тоже не изменяет набор чисел  $\varepsilon_i$ , либо добавляет (или уничтожает) два числа  $\varepsilon_i$  разного знака (рис. 15.4).  $\square$

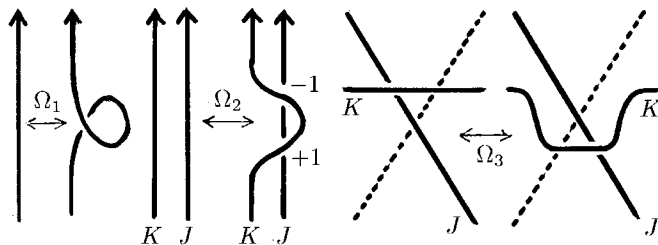


Рис. 15.4

**Задача 15.1.** Пусть кривая  $-J$  получена из кривой  $J$  изменением ориентации. Докажите, что

$$\text{lk}(-J, K) = -\text{lk}(J, K) \quad \text{и} \quad \text{lk}(J, -K) = -\text{lk}(J, K).$$

**Задача 15.2.** Докажите, что  $\text{lk}(J, K) = \text{lk}(K, J)$ .

**15.4.** Две замкнутые кривые  $J$  и  $K$  в  $S^3$  называют *незацепленными*, если существует изотопия, переводящая их в кривые  $J'$  и  $K'$ , расположенные в двух непересекающихся шарах. В противном случае кривые  $J$  и  $K$  называют *зацепленными*. Коэффициент зацепления является простейшим инвариантом, позволяющим во многих случаях доказывать зацепленность двух кривых. Дело в том, что справедливо следующее утверждение.

**15.5. Теорема.** Если  $\text{lk}(J, K) \neq 0$ , то кривые  $J$  и  $K$  зацепленные.

*Доказательство.* Предположим, что кривые  $J$  и  $K$  незацепленные. Рассмотрим диаграмму, на которой проекции шаров, содержащих кривые  $J'$  и  $K'$ , не пересекаются. На такой диаграмме нет общих перекрестков кривых  $J'$  и  $K'$ , поэтому  $\text{lk}(J', K') = 0$ . Тогда из предыдущей теоремы следует, что  $\text{lk}(J, K) = 0$ . Получено противоречие, поэтому кривые  $J$  и  $K$  зацепленные.  $\square$

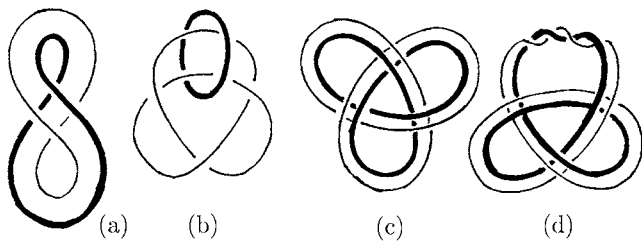


Рис. 15.5

**Задача 15.3.** Докажите, что пары кривых, изображенных на рис. 15.5 (a)–(d) зацепленные.

Отметим, что из соотношения  $\text{lk}(J, K) = 0$  не следует незацепленность кривых  $J$  и  $K$ . Например, две пары кривых, изображенных на рис. 15.6, зацепленные (это можно доказать, вычислив полиномы Джонса двух зацеплений, образованных этими кривыми), но их коэффициенты зацепления равны нулю.



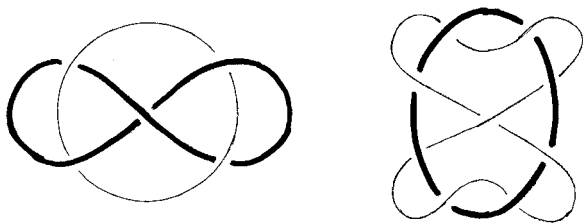


Рис. 15.6

**15.6.** Теперь мы готовы дать инвариантное определение параллели на трубчатой  $\varepsilon$ -окрестности произвольного ориентированного узла  $J$ . Прежде всего нужно исключить ситуацию, изображенную на рис. 15.7(a). Для этого нужно потребовать, чтобы кривые  $J$  и  $K$  были *сонаправлены* (рис. 15.7(b)). Иными словами, если  $u$  и  $v$  — векторы скоростей движения по кривым  $J$  и  $K$  в точках, принадлежащих одному и тому же меридиональному диску, то их скалярное произведение  $(u, v)$  должно быть положительно. Кривую  $K$ , расположенную на краю трубчатой  $\varepsilon$ -окрестности кривой  $J$ , будем называть *параллелью*, если кривые  $J$  и  $K$  сонаправлены и  $\text{lk}(J, K) = 0$ .

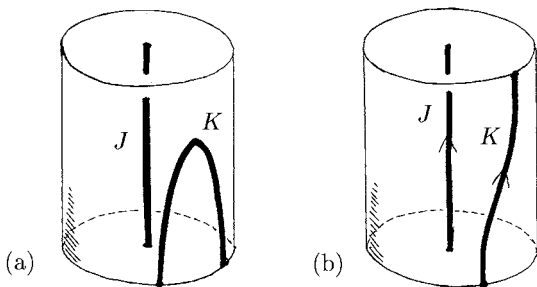


Рис. 15.7

**Задача 15.4.** Пусть  $J$  — ориентированный узел,  $n$  — целое число. Докажите, что существует сонаправленная с  $J$  кривая  $K$ , для которой  $\text{lk}(J, K) = n$ .

**Задача 15.5.** Нарисуйте параллели для  $\varepsilon$ -окрестностей кривых, изображенных на рис. 15.8.

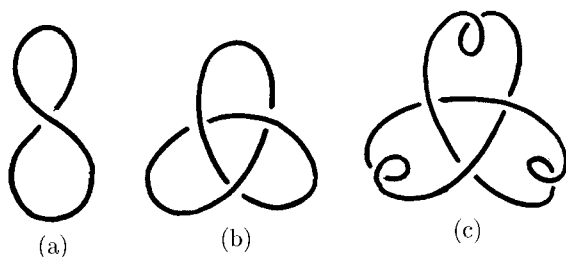


Рис. 15.8

## §16. Целочисленные перестройки

**16.1.** После того как мы условились о выборе параллели и меридиана, перестройка сферы  $S^3$  однозначно задается узлом  $J$  и его оснащением, рациональным числом  $r$ . В самом деле, если даны  $J$  и  $r$ , то мы начнем с того, что произвольно ориентируем узел  $J$ , затем выберем меридиан  $\alpha$  (как объяснено в 15.1) и параллель  $\beta$  (как объяснено в 15.6) и ориентируем их так, чтобы выполнялось равенство  $\text{lk}(\alpha, J) = +1$  и кривые  $J$  и  $\beta$  были сонаправлены (рис. 16.1).

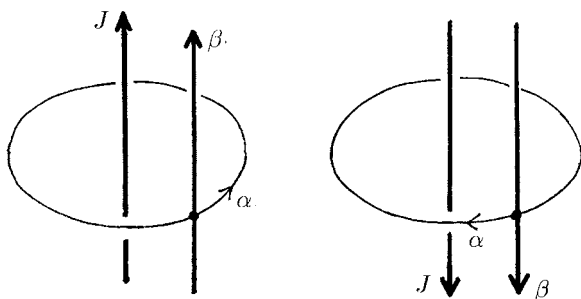


Рис. 16.1

При гомеоморфизме краев, задающем перестройку, меридиан  $\alpha$  переходит в кривую вида  $p\alpha + q\beta$ , где  $p$  и  $q$  — взаимно простые целые числа (см. предложение 14.1). Числа  $p$  и  $q$  не зависят от ориентации узла  $J$ , так как при обращении ориентации узла  $J$  происходит лишь обращение ориентации меридиана  $\alpha$  и его образа, а сам образ как множество точек не изменяется (см. рис. 16.2, на котором изображена кривая  $\alpha + \beta$  для обеих ориентаций). Итак, для задания перестройки сферы  $S^3$  достаточно указать (неориентированный) узел  $J$  и его оснащение  $r = p/q$ .

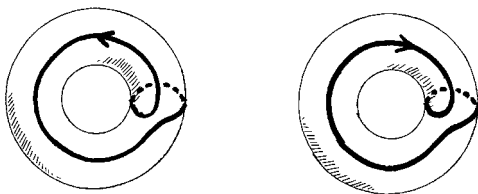


Рис. 16.2

В этом параграфе мы будем заниматься в основном перестройками по зацеплениям, у которых оснащения всех компонент являются целыми числами. Такие перестройки называются *целочисленными*.

**16.2. Теорема.** *Любое компактное ориентируемое трехмерное многообразие без края можно получить из сферы  $S^3$  целочисленной перестройкой.*

*Доказательство.* Эта теорема является переформулировкой следствия 12.4, потому что переклейка незаузеленного полнотория по гомеоморфизму, меняющему местами параллели и меридианы, является перестройкой по тривиальному узлу с оснащением 0. Несколько переклеек незаузеленных полноторий по таким гомеоморфизмам является перестройкой по зацеплению, все компоненты которого незаузлены и их оснащения равны 0.  $\square$

**16.3. Перестройка по ленте.** При целочисленной перестройке по компоненте  $J$  данного зацепления меридиан  $\alpha$  отображается в кривую  $K = p\alpha + \beta$ . Эта кривая совершает

ровно один оборот в направлении параллели  $\beta$ , поэтому можно считать, что кривая  $K$  и узел  $J$  сонаправлены. В такой ситуации на их можно натянуть ленту (рис. 16.3).

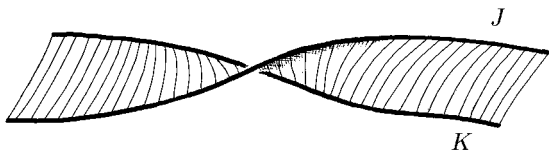


Рис. 16.3

Таким образом, целочисленную перестройку по узлу  $J$  с оснащением  $r = p$  можно задать с помощью замкнутой ленты с краями  $J$  и  $K$ , где

$$\text{lk}(J, K) = \text{lk}(J, p\alpha + \beta) = p,$$

так как  $\text{lk}(J, \beta) = 0$  по определению параллели и  $\text{lk}(J, \alpha) = 1$ . Более того, нет необходимости различать края ленты, поскольку

$$\text{lk}(J, K) = \text{lk}(K, J).$$

Два примера задания перестроек по трилистнику с оснащениями  $r = 3$  и  $r = 1$  посредством замкнутых лент изображены на рис. 16.4.

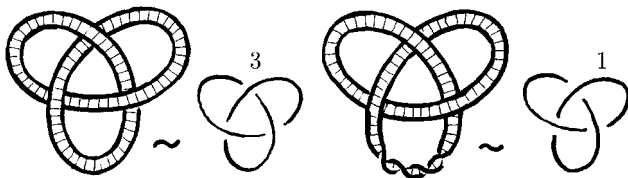


Рис. 16.4

**16.4. Эквивалентные перестройки.** Перестройки сферы  $S^3$  по разным оснащенным зацеплениям могут давать одно и то же многообразие. Например, мы уже видели (предложение 14.5), что перестройка по окружности с оснащением  $\pm 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , тождественна. Кроме того, перестройки по

окружности с оснащениями  $r$  и  $(\pm n + r^{-1})^{-1}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , эквивалентны (предложение 14.6).

Сферу  $S^3$  можно получить при склейке полнотория  $T_1$  (которое мы рассматриваем как  $\varepsilon$ -окрестность окружности  $J$ ) и полнотория  $T_2$  по гомеоморфизму краев, меняющему местами параллели и меридианы (рис. 16.5). Разрежем полноторие  $T_2$  по меридиональному диску  $D$  и сделаем скручивание на  $n$  полных оборотов. В результате оснащение  $r$  окружности  $J$  заменится на  $(\pm n + r^{-1})^{-1}$ ; знак перед  $n$  зависит от направления скручивания (рис. 16.6).

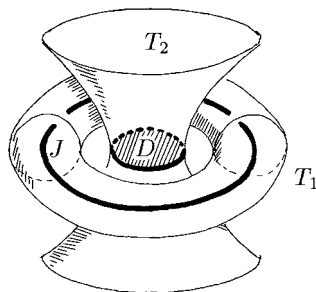


Рис. 16.5

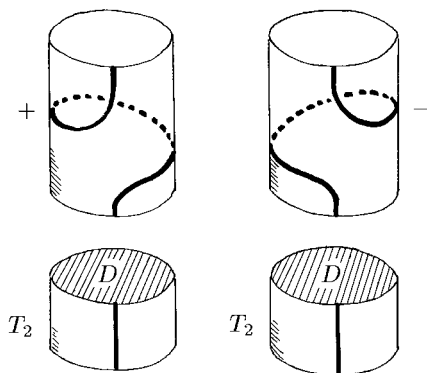


Рис. 16.6

В том случае, когда перестройка делается не только по окружности  $J$ , но по целому оснащённому зацеплению, одной из компонент которого служит окружность  $J$ , описанный выше гомеоморфизм устанавливает эквивалентность перестроек, изображенных на рис. 16.7. При этом мы предполагаем,

что число  $r_2$  обязательно целое, а число  $r_1$  может быть рациональным. Изменение оснащения  $r_2$  определяется тем, что коэффициент зацепления краев ленты изменяется, как легко видеть, на  $\pm 1$  (напомним, что края ленты сонаправлены и обращение их ориентации не влияет на коэффициент зацепления). Если мы сделаем скручивание на  $n$  оборотов, то оснащения  $r_1$  и  $r_2$  заменятся на  $r'_1 = (\pm n + r_1^{-1})^{-1}$  и  $r'_2 = \pm n + r_2$ .

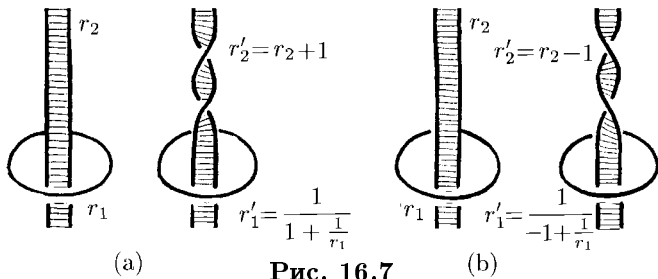


Рис. 16.7

**Задача 16.1.** Докажите, что

$$1 \bigcirc \bigcirc^n \sim \bigcirc^{n-1},$$

т.е. перестройки по указанным оснащенным зацеплениям дают гомеоморфные многообразия.

**16.5.** Закручивание ленты можно представить и другим способом, который иногда бывает более удобен (рис. 16.8). Напомним, что с этим преобразованием мы уже встречались в §2 (трюк с ремнем).

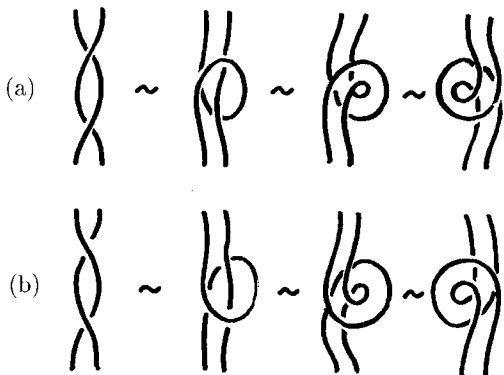


Рис. 16.8

В частности, это представление весьма удобно в том случае, когда сквозь диск  $D$  проходит не одна, а несколько лент (рис. 16.9). С помощью этого рисунка легко выяснить, как изменяется оснащение узла при скручивании вдоль диска  $D$  в том случае, когда узел пересекает диск  $D$  не в одной, а в нескольких точках. Нас интересует коэффициент зацепления одного края ленты с другим краем, поэтому можно считать, что на рис. 16.9 изображены только части одной и той же ленты. Пусть  $s$  частей ленты имеют одно направление, а  $t$  частей имеют другое направление. Для скручивания, изображенного на рис. 16.9 (а), перекресток, на котором часть полоски проходит над частью того же направления, дает вклад  $+1$  в коэффициент зацепления краев, а перекресток, на котором часть полоски проходит над частью противоположного направления, дает вклад  $-1$ . Для скручивания, изображенного на рис. 16.9 (б), такие вклады равны  $-1$  и  $+1$  соответственно. Поэтому в случае (а) получаем

$$r'_2 = r_2 + s^2 + t^2 - st - ts = r_2 + (s - t)^2 = r_2 + \text{lk}^2(K, J),$$

где  $K$  — узел, соответствующий рассматриваемой ленте, а  $J = \partial D$ . В случае (б) получаем  $r'_2 = r_2 - \text{lk}^2(K, J)$ . При скручивании на  $\pm n$  полных оборотов получаем

$$r'_1 = \frac{1}{\pm n + 1/r_1}, \quad r'_2 = r_2 \pm n \text{lk}^2(J, K).$$

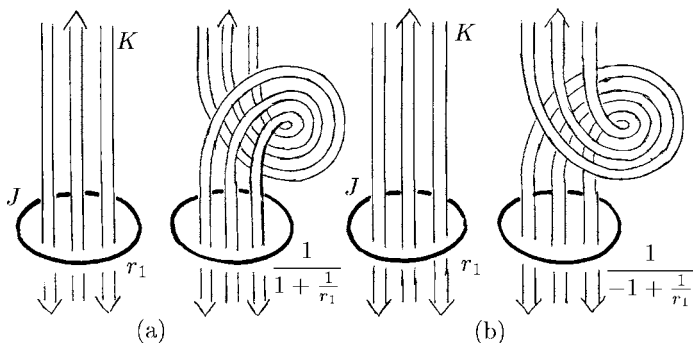
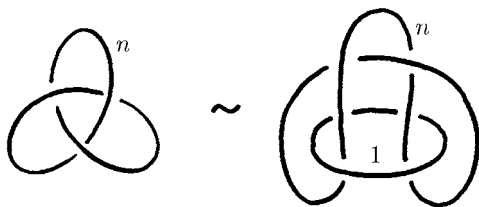


Рис. 16.9

**Задача 16.2.** а) Докажите, что перестройки по оснащенным зацеплениям, изображенным на рис. 16.10, эквивалентны.



**Рис. 16.10**

б) Докажите, что перестройки по оснащенным зацеплениям, изображенным на рис. 16.11, эквивалентны.



**Рис. 16.11**

### §17. Снова линзы

**17.1.** В этом параграфе мы рассмотрим некоторые способы представления линз  $L(p, q)$  посредством перестроек сферы  $S^3$  по оснащенным зацеплениям. Напомним, что линза  $L(p, q)$  получается при перестройке сферы  $S^3$  по окружности с оснащением  $p/q$ .

**17.2. Предложение.** Пусть  $m, n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$m \bigcirc \bigcirc_n = L(mn - 1, m) = L(mn - 1, n).$$



*Доказательство.* Сделаем сначала скручивание на  $t$  оборотов вдоль окружности с оснащением  $m$ , а затем скручивание на  $s$  оборотов вдоль окружности с оснащением  $n$ . В результате оснащения  $m$  и  $n$  заменятся сначала на  $1/(t + 1/m)$  и  $t + n$ , а затем на

$$s + \frac{1}{t + 1/m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{s + 1/(t + n)},$$

соответственно. Чтобы уничтожить одну из окружностей, ее оснащение нужно сделать равным  $\infty$ . Этого можно добиться, положив  $s = -1$  и  $t = 1 - n$ . В результате остающаяся окружность получит оснащение

$$-1 + \frac{1}{1 - n + 1/m} = \frac{mn - 1}{m - mn + 1}.$$

Таким образом, рассматриваемая перестройка дает многообразие  $L(mn - 1, m - mn + 1)$ , которое совпадает с  $L(mn - 1, m)$ , поскольку  $m - mn + 1 \equiv m \pmod{mn - 1}$ .  $\square$

**17.3. Предложение.** Пусть  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$  и  $a_{n+1} \in \mathbb{Q}$ . Тогда

$$\underbrace{\bigcirc}_{a_1} \underbrace{\bigcirc}_{a_2} \dots \underbrace{\bigcirc}_{a_n} \underbrace{\bigcirc}_{a_{n+1}} = L(p, q),$$

где  $p/q$  задается непрерывной дробью

$$\frac{p}{q} = a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 - \dots - \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}}. \quad (17.1)$$

*Доказательство.* Сделаем сначала скручивание на  $t = -(a_n + 1)$  оборотов вдоль окружности с оснащением  $a_{n+1}$ . В результате оснащения окружностей с номерами  $n$  и  $(n + 1)$  станут равны

$$a'_n = -1 \quad \text{и} \quad a'_{n+1} = \frac{1}{-a_n - 1 + 1/a_{n+1}},$$

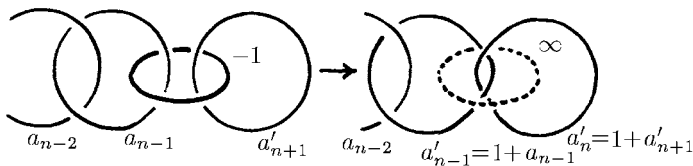


Рис. 17.1

соответственно; оснащения остальных окружностей не изменятся.

Теперь можно уничтожить окружность с номером  $n$ , сделав скручивание вдоль нее на один оборот (рис. 17.1).

Новые оснащения после этого будут такими:

$$a'_{n-1} = 1 + a_{n-1},$$

$$a'_n = 1 + a'_{n+1} = 1 + \frac{1}{-a_n - 1 + 1/a_{n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}.$$

(Новая окружность с номером  $n$  получается из старой окружности с номером  $n + 1$ .)

Затем аналогичными скручиваниями вдоль последней и предпоследней окружностей можно уничтожить окружность с номером  $n - 1$ . В результате получим оснащения

$$a''_{n-2} = 1 + a_{n-2}, \quad a''_{n-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{n-1} - \frac{1}{a_n - \frac{1}{a_{n+1}}}}}.$$

Продолжая действовать таким же образом, можно уничтожить все окружности, кроме одной. Оставшаяся окружность будет иметь оснащение

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{a_3 + \dots}}}}.$$

Но эта непрерывная дробь равна  $1/(1 + 1/r)$ , где  $r$  — требуемое оснащение (см. 17.1). Остается заметить, что скручивание на один оборот устанавливает эквивалентность перестроек по окружности с оснащениями  $r$  и  $1/(1 + 1/r)$ .  $\square$

## §18. Гомологические сферы

**18.1.** В этом параграфе будет представлена знаменитая сфера Пуанкаре, которая сыграла важную роль в развитии алгебраической топологии. Разработанная техника перестроек позволяет с разных точек зрения взглянуть на получаемые в результате перестроек многообразия. Как мы увидим, сфера Пуанкаре появляется во многих красивых обликах, в которых участвуют знакомые нам объекты: трилистники, зацепление Уайтхеда, кольца Борромео, а также бинарная икосаэдральная группа и диаграмма Дынкина для алгебры Ли  $E_8$ .

**18.2.** Компактное трехмерное многообразие (без края)  $M^3$  называют *гомологической сферой*, если его фундаментальная группа  $\pi_1 = \pi_1(M^3)$  совпадает со своим коммутантом

$$\pi'_1 = \{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in \pi_1\}.$$

Равенство  $\pi'_1 = \pi_1$  означает, что факторгруппа  $\pi_1/\pi'_1$  состоит лишь из единичного элемента.

Можно доказать, что у любой гомологической сферы группы гомологий такие же, как у сферы  $S^3$ . Отметим также без доказательства, что перестройка  $S^3$  по любому узлу с оснащением  $\pm 1$  дает гомологическую сферу. Поэтому неудивительно, что существует бесконечно много топологически различных гомологических сфер, хотя и перестройки по разным узлам с оснащением  $\pm 1$  могут давать одну и ту же гомологическую сферу.

Среди различных гомологических сфер наиболее знаменита гомологическая сфера Пуанкаре, фундаментальная группа которой конечна. Пуанкаре сначала высказал предположение, что любая гомологическая сфера гомеоморфна  $S^3$ . Но

вскоре он сам построил контрпример и воспользовался фундаментальной группой\* для доказательства того, что построенное им многообразие не будет настоящей сферой. Затем Пуанкаре высказал предположение, что любое компактное ориентируемое трехмерное многообразие без края, имеющее тривиальную фундаментальную группу, гомеоморфно сфере  $S^3$  (*гипотеза Пуанкаре*). Эта гипотеза — самая знаменитая нерешенная проблема трехмерной топологии.

**18.3.** Многообразие, полученное в результате перестройки сферы  $S^3$  по правому трилистнику с оснащением 1 (рис. 18.1(a)) называют *гомологической сферой Пуанкаре* или просто *сферой Пуанкаре*.

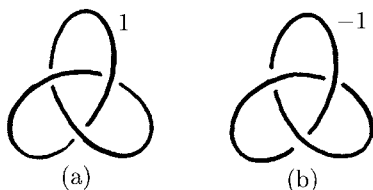


Рис. 18.1

Легко проверить, что при симметрии относительно любой плоскости оснащение узла меняет знак (см. рис. 18.2). Поэтому сферу Пуанкаре можно также получить перестройкой по левому трилистнику с оснащением  $-1$  (рис. 18.1 (b)).

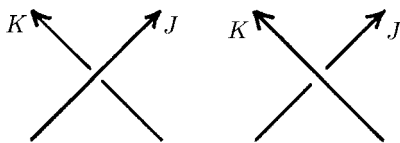


Рис. 18.2

Вычисление фундаментальной группы сферы Пуанкаре мы начнем с того, что напомним, как вычисляется группа

\* Пуанкаре дал определение фундаментальной группы в своей основополагающей работе *Analysis situs*, 1895, а контрпример построен в пятом дополнении к *Analysis situs*, 1904.

$\pi_1(S^3 \setminus K)$ , где  $K$  — трилистник. Будем считать, что отмеченная точка  $O$  бесконечно удаленная, т.е.  $S^3 = O \cup \mathbb{R}^3$ . Любую петлю, выходящую из точки  $O$ , можно представить в виде композиции петель  $x$ ,  $y$  и  $z$  (рис. 18.3) и обратных к ним.

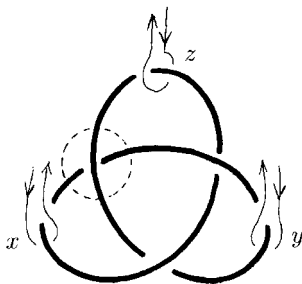


Рис. 18.3

Иными словами, эти петли порождают группу  $\pi_1(S^3 \setminus K)$ . Перекрестки диаграммы узла определяют соотношения между образующими. Например, перекресток расположенный на рис. 18.3 внутри пунктирной окружности и представленный отдельно на рис. 18.4, дает нам соотношение  $z = xyx^{-1}$ , т.е.  $zx = xy$  (см. рис. 18.4(b)).

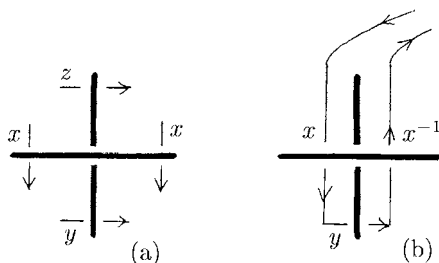


Рис. 18.4

Аналогичным образом два других перекрестка дают соотношения  $xy = yz$  и  $yz = zx$ . Поэтому

$$\pi_1(S^3 \setminus K) = \{x, y, z; xy = yz = zx\}.$$

Так как  $z = xyx^{-1}$ , то образующую  $z$  можно исключить. Тогда получим

$$\pi_1(S^3 \setminus K) = \{x, y; xyx = yxy\}.$$

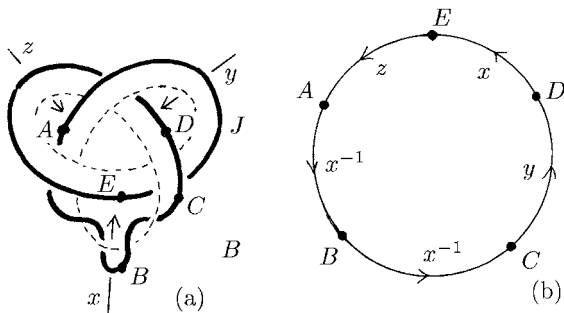


Рис. 18.5

После перестройки сферы  $S^3$  по правому трилистнику с оснащением 1 на кривую  $J$  (рис. 18.5(a)) будет натянут меридиональный диск полнотория. Поэтому фундаментальная группа сферы Пуанкаре получается из  $\pi_1(S^3 \setminus K)$  добавлением соотношения  $J = 1$ . Легко проверить (см. рис. 18.5 (b)), что  $J = x^{-2}yxz = x^{-2}yx^2yx^{-1}$ . Таким образом, фундаментальная группа сферы Пуанкаре изоморфна группе

$$I^* = \{x, y; xyx = yxy, yx^2y = x^3\}.$$

**Задача 18.1.** Докажите, что группа  $I^*$  совпадает со своим коммутантом  $I^{*'}$ .

**Задача 18.2.** Положим  $a = x, b = xy$ . Докажите, что

$$I^* \cong \{a, b; a^5 = b^3 = (ba)^2\}.$$

*Замечание.* Пусть  $I \subset SO(3)$  — группа собственных самосовмещений икосаэдра. Можно доказать, что группа  $I^*$  изоморфна прообразу  $I$  при двулистном накрытии  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ . По этой причине группу  $I^*$  называют *бинарной икосаэдральной группой*.

**18.4.** Сферу Пуанкаре можно получить перестройкой не только по трилистнику, но и по многим другим оснащенным зацеплениям. Мы опишем некоторые наиболее интересные примеры таких оснащенных зацеплений.

Прежде всего заметим, что к рассматриваемому трилистнику можно добавить окружность с оснащением  $\infty$ , поскольку перестройка по окружности с таким оснащением тождественна (см. 14.2). Нас будут интересовать два способа добавления такой окружности (рис. 18.6). Они отличаются тем, что в одном случае коэффициент зацепления окружности и трилистника равен 0, а в другом случае он равен  $\pm 2$ .

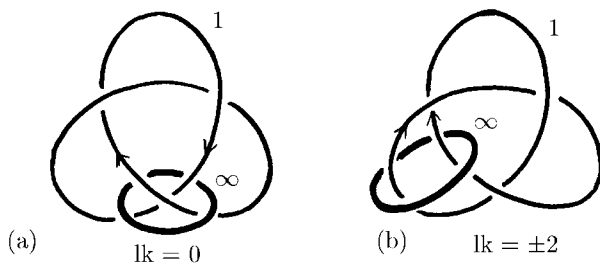


Рис. 18.6

Сделав скручивание вдоль добавленной окружности, трилистник можно развязать. При этом в случае (а) нужно сделать  $+1$  оборот, а в случае (б) нужно сделать  $-1$  оборот. Напомним (см. 16.4), что если число оборотов равно  $n$ , то оснащение окружности становится равным  $1/n$ , а оснащение бывшего трилистника становится равным  $1 + nk^2$ , где  $lk$  — коэффициент зацепления окружности и трилистника (рис. 18.6). В самом деле, в нашем случае  $r_1 = \infty$  и  $r_2 = 1$ , поэтому  $r'_1 = 1/n$  и  $r'_2 = 1 + nk^2$ . В результате, после развязывания трилистника получим два оснащенных зацепления, изображенных на рис. 18.7.

Зацепление, изображенное на рис. 18.7 (а), является зацеплением Уайтхеда (см. 1.1 и рис. 1.15). Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

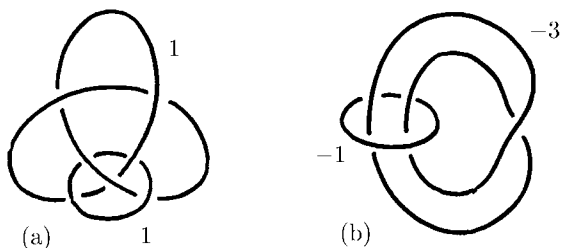


Рис. 18.7

**18.5. Предложение.** а) Перестройка сферы  $S^3$  по оснащенному зацеплению Уайтхеда, изображенному на рис. 18.7 (а), дает сферу Пуанкаре.

б) Перестройка сферы  $S^3$  по оснащенному зацеплению, изображенному на рис. 18.7 (б), тоже дает сферу Пуанкаре.

**18.6.** Зацепление Уайтхеда симметрично в том смысле, что существует изотопия, меняющая местами его компоненты. На рис. 18.8 изображены различные диаграммы зацепления Уайтхеда (переходы между соседними диаграммами выполняются достаточно просто; вспомните также рис. 1.15). Зацепление, соответствующее выделенной диаграмме (д), имеет ось симметрии.

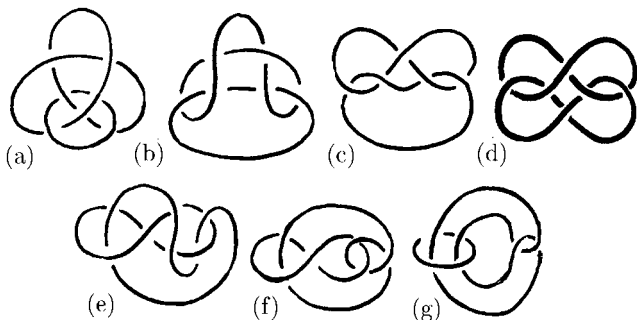


Рис. 18.8

Зацепление Уайтхеда приводит к двум интересным способам задания сферы Пуанкаре с помощью перестроек по оснащенным зацеплениям, имеющим оси симметрии порядка 3 и



5 соответственно. Учитывая, что само зацепление Уайтхеда имеет ось симметрии порядка 2, получаем, что сфера Пуанкаре имеет оси симметрии порядков 2, 3 и 5. Это связано с тем, что сферу Пуанкаре можно получить, отождествив определенным образом точки граней додекаэдра, который имеет оси симметрии порядка 2, 3 и 5 (рис. 18.9).

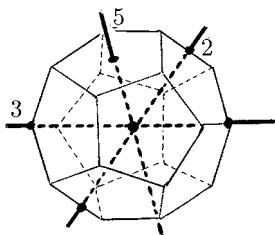


Рис. 18.9

**18.7. Предложение.** Перестройка сферы  $S^3$  по кольцам Борромео с оснащением 1 (рис. 18.10) дает сферу Пуанкаре.

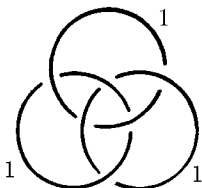


Рис. 18.10

*Доказательство.* Деформируем сначала изотопически кольца Борромео, как это показано на рис. 18.11 (a)–(b). Теперь можно сделать скручивание и уничтожить одну из окру-

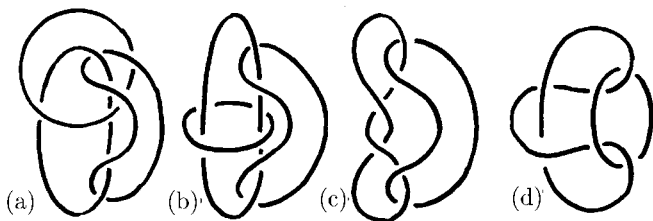


Рис. 18.11

жностей. В результате получим зацепление, изображенное на рис. 18.11 (с). Оснащения двух оставшихся компонент при этом не изменяются, поскольку окружности в кольцах Борромео попарно не зацеплены. После изотопии получим зацепление, изображенное на рис. 18.11 (d). Оно совпадает с зацеплением, изображенным на рис. 18.8 (b). Но это то же самое зацепление, что и на рис. 18.7 (a), причем оснащения компонент у него тоже те же самые. А мы уже видели, что перестройка по последнему оснащеному зацеплению дает сферу Пуанкаре.  $\square$

**18.8. Предложение.** *Перестройка по пяти зацепленным окружностям с оснащениями 1, изображенным на рис. 18.12, дает сферу Пуанкаре.*

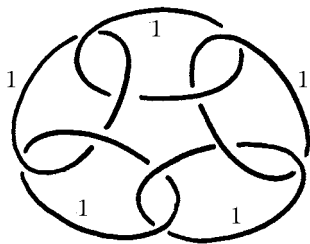


Рис. 18.12

*Доказательство.* Уничтожим сначала самую верхнюю окружность. Для этого нужно сделать скручивание вдоль нее на  $-1$  оборот. Чтобы легче было понять, как это скручивание действует на окружности, зацепленные с уничтожаемой окружностью, нарисуем их так, как показано на рис. 18.13(a).

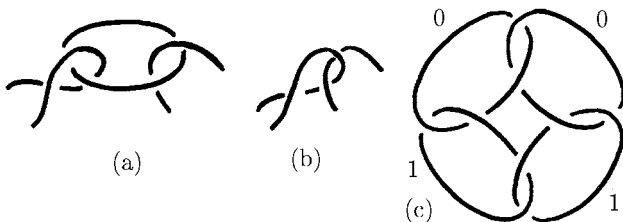


Рис. 18.13

После скручивания эти окружности будут зацеплены так, как показано на рис. 18.13 (b). Коэффициент зацепления каждой из этих окружностей с уничтожаемой окружностью равен  $\pm 1$ , поэтому их оснащения станут равны 0. В результате получаем оснащенное зацепление, изображенное на рис. 18.13 (c).

Уничтожим теперь одну из окружностей с оснащением 1, например, левую. В результате получим оснащенное зацепление, изображенное на рис. 18.14 (a). Уничтожим, наконец, окружность с оснащением  $-1$  (рис. 18.14 (b)). Полученное в результате оснащенное зацепление изображено на рис. 18.14 (c); его можно также найти на рис. 18.8 (c) среди различных модификаций зацепления Уайтхеда. Теперь требуемое утверждение следует из предложения 18.5.  $\square$

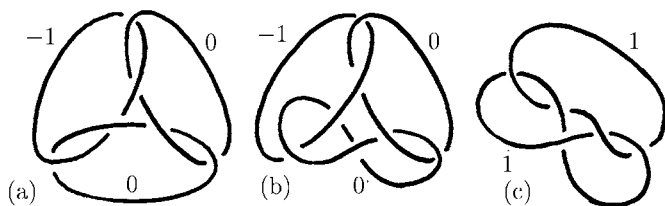


Рис. 18.14

**18.9.** Для следующего примера представления сферы Пуанкаре посредством перестроек нам понадобится способ задания зацеплений специального вида с помощью графов. Этот способ пригоден лишь в том случае, когда зацепление состоит из  $n$  незаузленных компонент, каждые две из которых либо не зацеплены, либо зацеплены простейшим образом (как компоненты зацепления Хопфа). Такому зацеплению мы сопоставим граф с  $n$  вершинами следующим образом: соединим вершины с номерами  $i$  и  $j$  ребром, если компоненты с номерами  $i$  и  $j$  зацеплены. Если полученный граф будет деревом (т.е. он стягиваем, или, иными словами, не содержит циклов), то, как легко видеть, зацепление однозначно восстанавливается по этому графу. Чтобы задать оснащения, можно рядом с каждой вершиной графа написать оснащение соответствующей компоненты зацепления.

**18.10. Предложение.** *Перестройка по оснащеному зацеплению, соответствующему графу  $\mathcal{E}_8$  с оснащениями  $-2$  (рис. 18.15), дает сферу Пуанкаре. (Граф  $\mathcal{E}_8$  является диаграммой Дынкина системы корней простой алгебры Ли  $E_8$ .)*

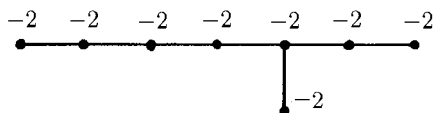


Рис. 18.15

*Доказательство.* Сделаем скручивания на  $+1$  оборот вдоль трех крайних окружностей: первой справа, первой слева и нижней. В результате получим оснащенное зацепление, соответствующее графу, изображенному на рис. 18.16 (а). Последовательно уничтожая окружности с оснащением  $-1$ , за три шага получим граф, изображенный на рис. 18.16 (д).

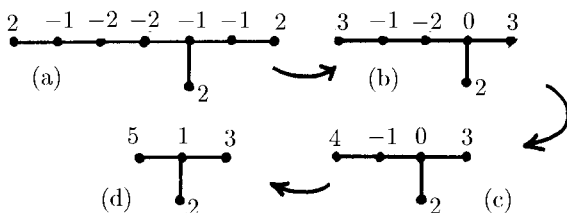


Рис. 18.16

Соответствующее зацепление представлено на рис. 18.17 (а). Уничтожив окружность с оснащением  $1$ , получим зацепление, изображенное на рис. 18.17 (б). Оно изотопно зацеплению, изображенному на рис. 18.17 (с). Снова уничтожив окружность с оснащением  $1$ , получим зацепление, изображенное на рис. 18.17 (д). Оно изотопно зацеплениям, изображенным на рис. 18.17 (е) и (ф). Но последнее зацепление можно получить зеркальной симметрией и последующим изменением знаков оснащений из зацепления, уже рассмотренного нами ранее (а именно, зацепления, изображенного на

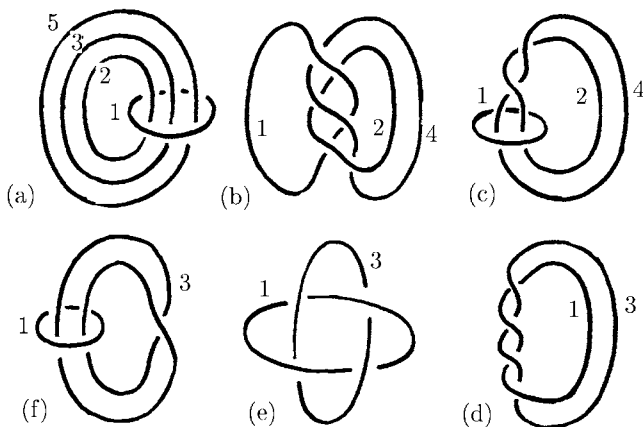


Рис. 18.17

рис. 18.7(b)). Поэтому требуемое утверждение следует из предложения 18.5.  $\square$

**18.11. Другой пример гомологической сферы.** Как мы видели, сфера Пуанкаре получается при перестройке по правому трилистнику с оснащением  $+1$ . Если же мы сделаем перестройку по тому же самому узлу, но с оснащением  $-1$ , то в результате получим другое многообразие (мы обозначим его  $M_-^3$ ), которое тоже будет гомологической сферой.

**Задача 18.3.** Докажите, что

$$\begin{aligned} \pi_1(M_-^3) &= \{x, y; xyx = yxy, yx^2y = x^5\} \\ &= \{a, b; a^7 = b^3 = (ba)^2\}. \end{aligned}$$

**Задача 18.4.** Докажите, что  $M_-^3$  — гомологическая сфера.

*Замечание 1.* Можно доказать, что группа  $\pi_1(M_-^3)$  бесконечна, а группа  $I^*$  содержит ровно 120 элементов. Поэтому  $M_-^3$  — не сфера Пуанкаре.

*Замечание 2.* Многообразие  $M_-^3$  можно получить также перестройкой по левому трилистнику с оснащением  $-1$ . Более интересно, что  $M_-^3$  можно получить и перестройкой по узлу восьмерка с оснащением  $\pm 1$  (этот узел изотопен своему

зеркальному образу, поэтому перестройки по нему с оснащениями  $+1$  и  $-1$  дают одно и то же многообразие). Чтобы доказать это, мы воспользуемся тем, что зацепление, изображенное на рис. 18.8, симметрично в том смысле, что для него существует изотопия, меняющая местами его компоненты. Но на этот раз мы снабдим компоненты зацепления разными оснащениями (рис. 18.18). Уничтожив компоненту с оснащением  $-1$ , получим восьмерку, а уничтожив компоненту с оснащением  $+1$ , получим левый трилистник.  $\square$

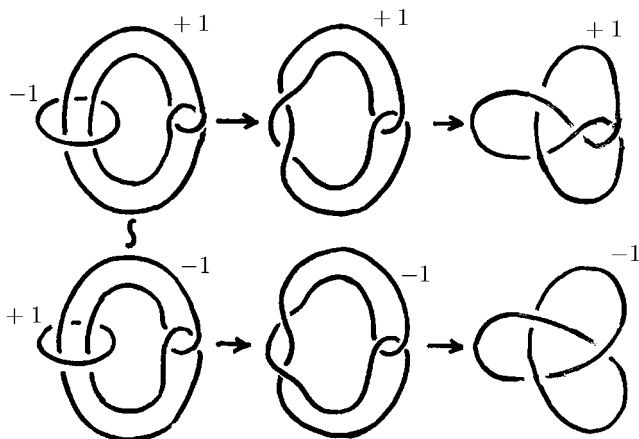


Рис. 18.18

## §19. Исчисление Кирби

Исчисление Кирби — это как раз то, чем мы занимались в двух предыдущих параграфах: различные преобразования оснащенных зацеплений, при которых не изменяются многообразия, получаемые в результате перестройки по этим оснаственным зацеплениям. Мы видели, что два важных класса многообразий — линзы и гомологические сферы — допускают весьма разнообразные представления оснаственными зацеплениями. Сейчас наша основная цель заключается в более систематическом описании преобразований оснащенных зацеплений, при которых не изменяются представленные ими многообразия.

**19.1. Первое преобразование Кирби.** Добавим к данному оснащеному зацеплению  $L \subset S^3$  незаузленную окружность с оснащением  $\pm 1$ , не зацепленную с остальными компонентами зацепления  $L$  (т.е. эту окружность можно отделить от  $L$  сферой  $S^2$ , вложенной в  $S^3$ ). Это преобразование не изменяет результирующее многообразие, так как при перестройке  $S^3$  по незаузленной окружности с оснащением  $\pm 1$  (и даже с оснащением  $\pm 1/n$ ) снова получается  $S^3$  (предложение 14.5). Такую операцию добавления (или уничтожения) окружности с оснащением  $\pm 1$  называют *первым преобразованием Кирби* (рис. 19.1).



Рис. 19.1

**19.2. Второе преобразование Кирби.** Это преобразование устроено более замысловато, чем предыдущее, но его происхождение тоже вполне естественно. Мы начнем с того, что объясним, откуда оно возникает.

Напомним, как производится перестройка по целочисленному зацеплению. Оснащение компоненты  $K$  зацепления  $L$  задается замкнутой кривой  $J$ , лежащей на краю трубчатой окрестности кривой  $K$ . (При этом кривые  $J$  и  $K$  образуют два края ленты, которую тоже можно использовать для задания оснащения.) Перестройка заключается в том, что мы вырезаем трубчатую окрестность кривой  $K$ , а затем вклеиваем ее снова по гомеоморфизму краев, переводящему меридиан полнотория в кривую  $J$  (рис. 19.2(a)). После такой перестройки на кривую  $J$  будет натянут меридиональный диск (рис. 19.2 (b)).

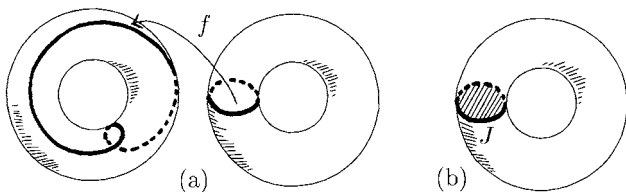


Рис. 19.2

Это означает, что в многообразии  $M_1^3$ , полученном при перестройке по компоненте  $K$ , для любой другой компоненты  $C$  данного оснащенного зацепления, идущей параллельно  $J$  (рис. 19.3(a)), существует изотопия (протаскивание по меридиональному диску), переводящая ее в положение  $C'$  (рис. 19.3(b)). Однако в исходном многообразии  $S^3$  компоненты  $C$  и  $C'$  не обязательно изотопны, потому что в  $S^3 \setminus K$  на кривую  $J$  не всегда можно натянуть несамопересекающийся диск.

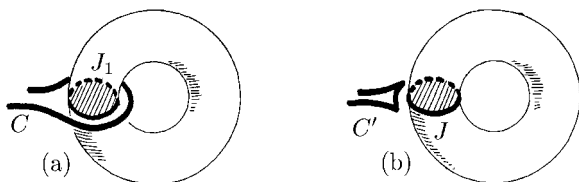


Рис. 19.3

В исходном многообразии  $S^3$  преобразование компоненты  $C$  с заданным оснащением в оснащенную компоненту  $C'$  удобно описывать на языке лент. Пусть  $R_1$  — лента с краями  $J$  и  $K$ , а  $R_2$  — лента, соответствующая оснащенной компоненте  $C$ . Рассмотрим сначала случай, когда ленты  $R_1$  и  $R_2$  в  $S^3$  не зацеплены (рис. 19.4(a)). Пусть ленты  $R_1$  и  $R_2$  закручены на  $n$  и  $k$  оборотов соответственно. Рассмотрим ленту  $R'_2$ , которая совпадает с  $R_2$  за исключением части  $P$ , идущей вдоль ленты  $R_1$ , оставаясь все время ей параллельной, за счет чего лента  $R'_2$  совершает  $n$  дополнительных оборотов по сравнению с  $R_2$  (рис. 19.4(b)).

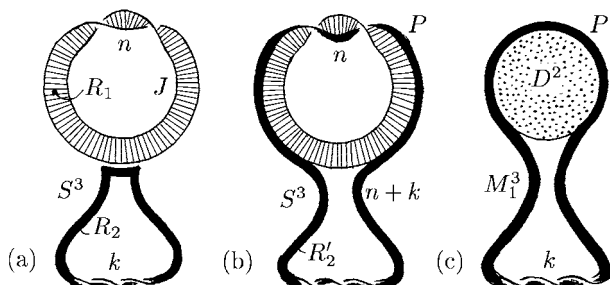


Рис. 19.4



Мы утверждаем, что перестройки по оснащенным зацеплениям  $\{R_1, R_2\}$  и  $\{R_1, R'_2\}$  дают одно и то же многообразие. Чтобы доказать это, сделаем перестройку по компоненте  $R_1$ . Тогда в полученном многообразии  $M_1^3$  к кривой  $J$  будет приклеен меридиональный диск  $D^2$  (рис. 19.4(с)). Поэтому часть  $P$  ленты  $R'_2$  можно протащить по этому диску и получить ленту  $R_2$ . Таким образом, в многообразии  $M_1^3$  ленты  $R_2$  и  $R'_2$  изотопны, а значит, перестройки  $M_1^3$  по этим лентам дают одно и то же многообразие.

В описанной выше конструкции предположение о том, что ленты  $R_1$  и  $R_2$  не зацеплены, использовалось лишь для чисто арифметического определения оснащения ленты  $R'_2$ . Геометрически лента  $R'_2$  строится точно так же и в случае, когда ленты  $R_1$  и  $R_2$  зацеплены.

Замену одного из зацеплений  $\{R_1, R_2\}$  и  $\{R_1, R'_2\}$  на другое называют *вторым преобразованием Кирби*. Конкретный пример второго преобразования Кирби (в случае, когда ленты зацеплены) изображен на рис. 19.5. На этом же рисунке отдельно изображено взаиморасположение лент и полнотория. Для зацепленных лент преобразование оснащений тоже можно определить чисто арифметически, но в соответствующей формуле будет участвовать коэффициент зацепления. Эта формула нам понадобится лишь в §29, там мы ее и обсудим. Пока нам достаточно и геометрического определения второго преобразования Кирби.

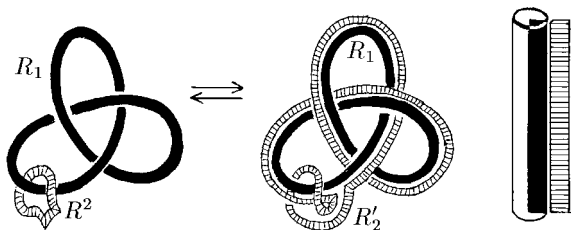


Рис. 19.5

Для двух незацепленных компонент оснащенного зацепления второе преобразование Кирби устроено так, как показана-

но на рис. 19.6. В общем случае оснащение  $k$  заменяется на  $k + n \pm 2lk(C, K)$  (см. 29.2).

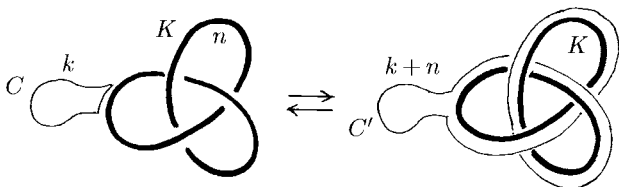


Рис. 19.6

**19.3. Теорема Кирби.** *Два оснащенных зацепления в  $S^3$  (с целочисленными оснащениями) задают одно и то же трехмерное многообразие тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга конечной последовательностью преобразований Кирби (первых и вторых) и изотопий.*

В одну сторону эту теорему мы уже доказали. Доказательство теоремы в другую сторону весьма сложно. Это доказательство можно найти в [Kir], [FR] и [Lu].

**19.4.** Вместо двух преобразование Кирби можно использовать одно преобразование оснащенных зацеплений, которое мы сейчас обсудим. Напомним, что помимо добавления и удаления окружности с оснащением  $\pm 1$ , не зацепленной с остальными компонентами, мы уже использовали (например, в 16.4) добавление и удаление окружности с оснащением  $\pm 1$ , сквозь которую проходят нити других компонент зацепления. На рис. 19.7 (а) и (б) показано, как устроено это преобразование для окружности с оснащениями  $+1$  и  $-1$  соответственно.

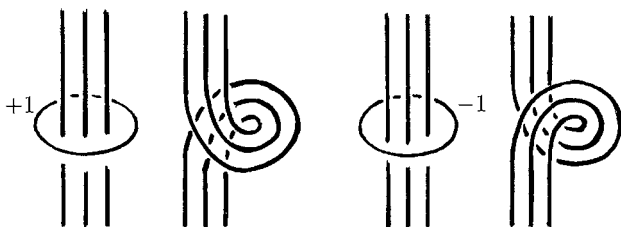


Рис. 19.7

Назовем это преобразование оснащенных зацеплений *преобразованием Фенна–Рурка*, хотя Фенн и Рурк не первыми его обнаружили (см. комментарии к этой главе). При этом мы не исключаем случай, когда сквозь удаляемую окружность не проходит ни одной нити других компонент, т.е. первое преобразование Кирби является частным случаем преобразования Фенна–Рурка.

**19.5. Теорема (Фенн–Рурк).** *Оснащенное зацепление  $L_1$  можно преобразовать в оснащенное зацепление  $L_2$  с помощью преобразований Кирби (первого и второго) тогда и только тогда, когда это можно сделать с помощью преобразований Фенна–Рурка.*

*Доказательство.* Проверим сначала, что преобразование Фенна–Рурка можно представить в виде композиции преобразований Кирби. На рис. 19.8 (а) изображена окружность с оснащением  $+1$ , сквозь которую проходит одна из нитей других компонент зацепления.

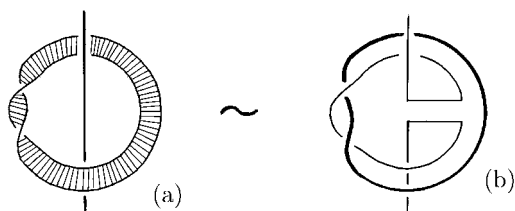


Рис. 19.8

Второе преобразование Кирби позволяет перейти от этого зацепления к зацеплению, изображенному на рис. 19.8 (b). Ясно, что полученная в результате окружность с оснащением  $+1$  не зацеплена с рассматриваемой нитью. Такую окружность можно уничтожить, применив первое преобразование Кирби. Если сквозь окружность проходит не одна, а несколько нитей, аналогичные преобразования можно сделать несколько раз. В одну сторону теорема доказана.

Проверим теперь, что первое и второе преобразования Кирби можно представить в виде композиции преобразований Фенна–Рурка. Первое преобразование Кирби, как мы

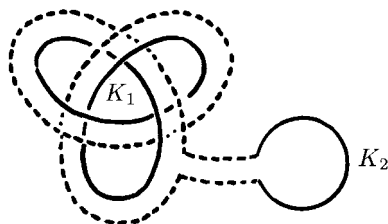


Рис. 19.9

уже говорили, является частным случаем преобразования Фенна–Рурка, поэтому достаточно рассмотреть второе преобразование Кирби. Предположим, что к ленте  $K_2$  требуется добавить ленту, параллельную ленте  $K_1$  (рис. 19.9). Сделаем сначала несколько преобразований Фенна–Рурка, чтобы привести ленту  $K_1$  к более удобному виду.

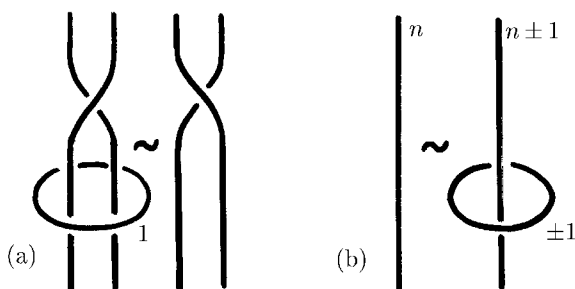


Рис. 19.10

Преобразование, изображенное на рис. 19.10 (а), вместе с аналогичным преобразованием для окружности с оснащением  $-1$  позволяет развязать узел  $K_1$  (см. теорему 3.8). После этого преобразование, представленное на рис. 19.10 (б), позволяет сделать оснащение незаузленной кривой, полученной из  $K_1$ , равным 1. При этом можно считать, что все эти преобразования происходят вне некоторой окрестности ленты  $K_2$ . Итак, в дальнейшем можно считать, что  $K_1$  — (незаузленная) окружность с оснащением  $+1$ .

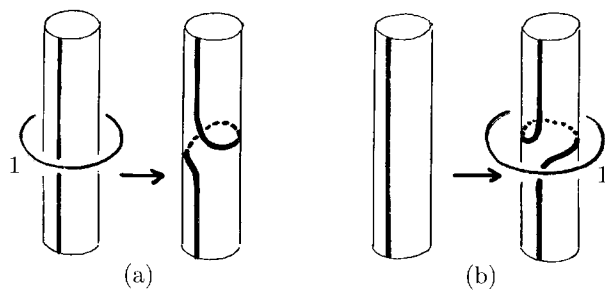


Рис. 19.11

Напомним, что добавление и удаление окружности с оснащением 1 приводят к скручиваниям (рис. 19.11). Рассмотрим теперь второе преобразование Кирби, при котором к ленте  $K_2$  добавляется лента, параллельная  $K_1$  (рис. 19.12 (а)). Это преобразование можно представить в виде композиции следующих преобразований Фенна–Рурка. Прежде всего добавим окружность  $K'_1$  с оснащением  $+1$ , параллельную  $K_1$  и зацепленную за  $K_2$  (рис. 19.12 (b)). Затем удалим окружность  $K_1$  (рис. 19.12 (c)). Когда мы добавляем окружность  $K'_1$ , происходит закручивание нитей, проходящих сквозь  $K_1$ , но после удаления окружности  $K_1$  эти нити закручиваются в противоположном направлении и в итоге возвращаются в исходное положение. Таким образом, мы получили требуемое второе преобразование Кирби.  $\square$

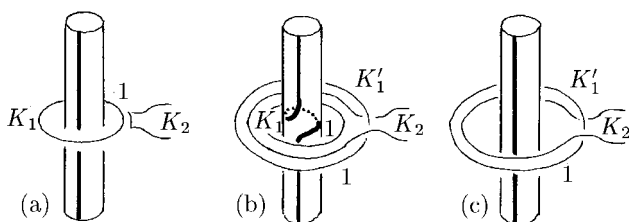


Рис. 19.12

**19.6. Диаграммы оснащенных зацеплений.** В заключение параграфа обсудим еще один способ задания целочисленного оснащения зацепления. Он основан на том, что лента, задающая целочисленную перестройку, изотопна ленте, плотно прилегающей к некоторой плоскости, т.е. всюду, кроме перекрестков, лежащей в этой плоскости, а на перекрестках слегка удаляющейся от плоскости. (Вспомните трюк с ремнем из §2.) Такую полосу уже можно заменить на любой из ее краев; информация об оснащении сохранится в виде петелек. Для окружностей с оснащениями  $+1$  и  $-1$ , соответствующие диаграммы изображены на рис. 19.13.

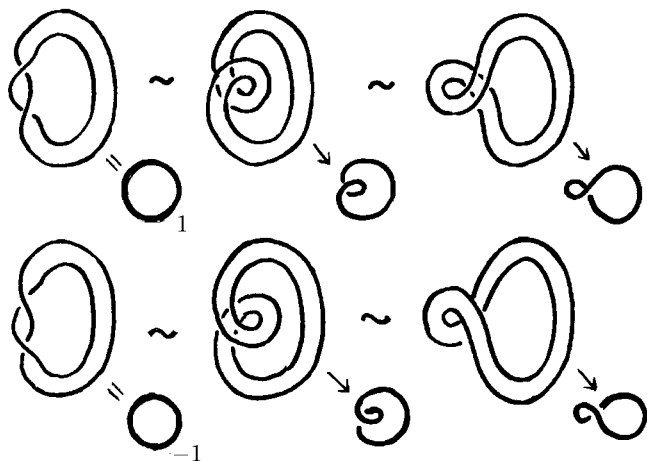


Рис. 19.13

К полученным таким образом диаграммам оснащенных зацеплений можно применять второе и третье преобразования Рейдемейстера; оснащения при этом не изменяются, а значит, не изменяются и результирующие многообразия. Что же касается первого преобразования Рейдемейстера, то его применять нельзя, потому что оно изменяет оснащение на  $\pm 1$  и тем самым позволяет заменить оснащение  $m \in \mathbb{Z}$  на любое другое оснащение  $n \in \mathbb{Z}$ . Чтобы не потерять информацию об оснащении, можно применять только композицию двух «про-

тивоположных» первых преобразований Рейдемейстера, т.е. применять преобразование  $\Omega'_1$ , изображенное на рис. 19.14. С помощью рис. 19.13 можно убедиться, что преобразование  $\Omega'_1$  сопоставляет ленте изотопную ей ленту, а значит, не изменяет результирующее многообразие.



Рис. 19.14

Отметим, что с помощью преобразования  $\Omega'_1$  любые две петли «разного знака» можно расположить так, как показано на рис. 19.15(a). После этого петли можно будет уничтожить, применяя второе и третье преобразования Рейдемейстера (рис. 19.15 (b) и (c)).

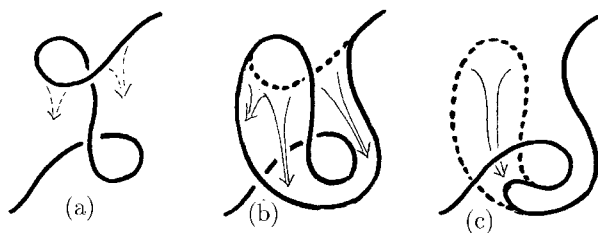


Рис. 19.15

Приведенные выше рассуждения доказывают следующий аналог теоремы Рейдемейстера для оснащенных зацеплений.

**19.7. Теорема.** *Две диаграммы оснащенных зацеплений соответствуют изотопным зацеплениям с одинаковыми оснащениями тогда и только тогда, когда эти диаграммы можно получить друг из друга с помощью преобразований  $\Omega'_1$ ,  $\Omega_2$ , и  $\Omega_3$  (и плоских изотопий).*

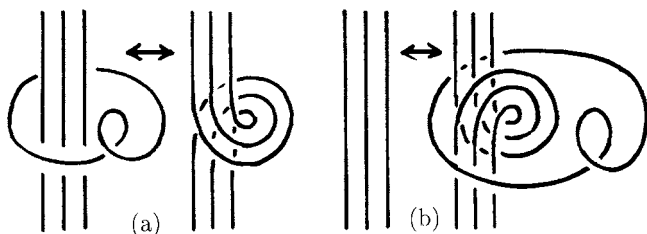


Рис. 19.16

**19.8.** Опишем теперь преобразование Фенна–Рурка на языке диаграмм оснащенных зацеплений.

В случае окружности с оснащением  $+1$ , сквозь которую проходят три нити, преобразование Фенна–Рурка изображено на рис. 19.16(a). В случае, когда окружность с тем же оснащением не убирается, а добавляется, соответствующее преобразование удобнее изображать так, как показано на рис. 19.16(b).

**Задача 19.1.** Докажите, что две диаграммы оснащенных зацеплений, изображенные на рис. 19.17, задают одно и то же многообразие.

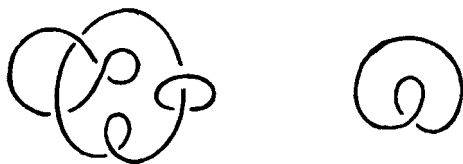


Рис. 19.17

## Комментарии

Основная геометрическая конструкция, обсуждаемая в этой главе, — вырезание полнотория и вклеивание его снова по другому гомеоморфизму краев — принадлежит, насколько нам известно, Дену ([De1], 1910).



Важное значение этой конструкции для изучения трёхмерных многообразий было осознано топологами гораздо позже, в частности, после замечательных исследований В.А. Рохлина в 50-е годы и не менее впечатляющих результатов Кирби в 70-е годы. К этому времени основным инструментом в топологии многообразий стало разложение на ручки. Этот инструмент работает только в гладкой категории, потому что он основан на теории Морса. Основная операция — приклеивание ручек различных индексов, соответствующих особым точкам функции Морса — тесно связана с перестройками многообразий. Преобразования Кирби появились в связи с теорией ручек. В частности, второе преобразование Кирби соответствует классическому преобразованию разложения на ручки, так называемой перегруппировке ручек (это преобразование заключается в том, что основание одной ручки протаскивается по другой ручке, в результате чего изменяется порядок ручек в разложении на ручки, но не изменяется само многообразие). В размерности 3 достаточно одного типа перестроек (вырезание полнотория и вклеивание его обратно), поэтому нет необходимости разрабатывать весь технически сложный аппарат дифференциальной топологии и теории Морса. Значительную часть всего того, что известно в области топологии трёхмерных многообразий, можно получить и без этого.

Отметим, что термин «преобразование Кирби» теперь уже достаточно стандартен, чего нельзя сказать о термине «преобразование Фенна–Рурка». Дело в том, что это преобразование было известно до них, но именно Фенн и Рурк первыми показали, что это преобразование универсально (теорема 19.5). Как формальное преобразование оснащенных зацеплений оно использовалось ранее Рольфсеном, в частности, в его замечательной книге [Rol] (1976), но как преобразование зацепления, по которому делается перестройка, оно встречалось и еще раньше, например, в статье [Немер] (1962).

Перестройки — это далеко не единственный элементарный топологический метод изучения трёхмерных многообразий. Помимо них следует отметить теорию нормальных поверхностей, которая позволила Хакену решить проблему распознавания тривиального узла. Впоследствии теория нормальных

поверхностей Хакена привела к фундаментальным работам Вальдхаузена по классификации «достаточно больших» многообразий, к понятию несжимаемых поверхностей и к введенному С. В. Матвеевым понятию специального спайна. Недавние достижения в этом направлении включают решение проблемы алгоритмического распознавания трехмерной сферы ([Rub] и [Tho]). Хотя мы не обсуждаем работы этих и других авторов в нашей книге, разработанные ими методы чрезвычайно важны для топологии трехмерных многообразий.

Первый пример гомологической сферы появился в работе Пуанкаре, а затем Ден предложил бесконечный набор гомологических сфер. Пример Пуанкаре появился в связи с его ошибкой: после того, как он изобрел гомологии\*, он ошибочно утверждал, что гомологии позволяют выделить сферу среди других трехмерных многообразий. Но вскоре он осознал ошибочность этого утверждения и с помощью диаграммы Хегора построил контрпример (для доказательства того, что построенное многообразие не гомеоморфно сфере, он применил свое недавнее изобретение — фундаментальную группу). Широко распространено мнение (см. например, обзор [KS]), будто Пуанкаре было известно представление сферы Пуанкаре посредством склейки граней додекаэдра. Но мы не смогли найти подтверждение этому в его работах. Зейферт и Трельфалль в своей знаменитой книге [ST] называют Кнезера автором этой конструкции ([Kne]).

Нашими основными источниками для этой главы послужили книга Д. Рольфсена [Rol], статья Р. Кирби [Kir] и последовавшая за ней статья Р. Фенна и К. Рурка [FR], в которой было дано другое доказательство теоремы Кирби, обзор Р. Кирби и М. Шарлемана [KS], а также многочисленные за-

---

\* Пуанкаре приписывает это великое открытие итальянскому математику и физику Энрико Бетти. Более вероятно, что оно, по крайней мере частично, восходит к Риману. В 1860-е годы Риман медленно умирал от туберкулеза в маленьком городке Вербана на севере Италии. В это время он интересовался в основном религией и философией, но с удовольствием обсуждал и математические вопросы со своими редкими гостями, главным образом итальянскими математиками, среди которых был и Бетти.

писки лекций и семинаров по трехмерной топологии, которые один из авторов этой книги вел совместно с Л. В. Келдыш и А. В. Чернавским, а в последнее время — с Ю. П. Соловьевым. Но наше изложение существенно отличается от всех этих источников. К сожалению, нам так и не удалось найти доказательство трудной части теоремы Кирби, которое было бы пригодно для вводного курса. Поэтому нам пришлось его опустить. Наиболее простое из известных нам доказательств теоремы Кирби содержится в [Lu].

## Глава VII

### Разветвленные накрытия

Эта глава тоже посвящена представлениям трехмерных многообразий. Как мы увидим, любое ориентируемое трехмерное многообразие можно представить в виде 3-листного разветвленного накрытия сферы  $S^3$  с ветвлением над узлом (§23). Кроме того, существуют универсальные узлы и зацепления (например, кольца Борромео), обладающие следующим свойством: любое ориентируемое трехмерное многообразие можно представить в виде  $n$ -листного разветвленного накрытия сферы  $S^3$  с ветвлением над данным узлом (зацеплением). Эти результаты получены Монтесиносом и Хилденом и их сотрудниками.

Мы, однако, начнем с разветвленных накрытий двумерных многообразий (§20), которые послужат основанием теории в трехмерном случае, как изучение гомеоморфизмов двумерных поверхностей послужило основанием теории перестроек трехмерных многообразий. Затем мы обсудим классическую формулу Римана–Гурвица, относящуюся к накрытиям двумерных поверхностей, и лишь после этого перейдем к основной теме этой главы — различным представлениям трехмерных многообразий посредством разветвленных накрытий (§§22–25).

## §20. Разветвленные накрытия двумерных поверхностей

**20.1. Определения.** Пусть  $M^2$  и  $N^2$  — двумерные многообразия. Напомним, что непрерывное отображение  $p : M^2 \rightarrow N^2$  называют *накрытием* (со слоем  $\Gamma$ , где  $\Gamma$  — дискретное множество), если у каждой точки  $x \in N^2$  есть окрестность  $U$  и гомеоморфизм  $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times \Gamma$ , для которого ограничения  $p$  на  $p^{-1}(U)$  совпадают с  $\pi \circ \varphi$ , где  $\pi : U \times \Gamma \rightarrow U$  — естественная проекция. В таком случае  $M^2$  называют *накрывающим многообразием*, а  $N^2$  называют *базой накрытия*. Если слой  $\Gamma$  состоит из  $n$  точек, то накрытие  $p$  называют  *$n$ -листным*.

Непрерывное отображение  $p : M^2 \rightarrow N^2$  называют *разветвленным накрытием*, если существует конечное множество точек  $x_1, \dots, x_n \in N^2$ , обладающее следующим свойством: множество  $p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$  дискретно и ограничение  $p$  на множество  $M^2 \setminus p^{-1}(\{x_1, \dots, x_n\})$  является накрытием. Иными словами, после выкалывания конечного множества точек в  $N^2$  и дискретного множества точек в  $M^2$  отображение  $p$  становится накрытием. Те точки  $x_1, \dots, x_n \in N^2$ , которые необходимо для этого выколоть, называют *точками ветвления*. Следующее очевидное утверждение не только дает пример разветвленного накрытия, но и показывает, как устроено разветвленное накрытие двумерных поверхностей в окрестности точки ветвления.

**20.2. Предложение.** Пусть  $D^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ . Рассмотрим отображение  $p : D^2 \rightarrow D^2$ , заданное формулой  $p(z) = z^n$ . Тогда  $p$  является разветвленным накрытием с единственной точкой ветвления  $z = 0$ .  $\square$

Пример разветвленного накрытия, указанный в предложении 20.2, при различных  $n$  описывает строение произвольного конечнолистного разветвленного накрытия двумерных многообразий. В самом деле, можно доказать, что если  $p$  — конечнолистное накрытие и  $U$  — достаточно малый открытый диск, содержащий точку ветвления, то  $p^{-1}(U)$  состоит из одного или нескольких дисков, на каждом из которых отображение  $p$  устроено точно так же, как отображение из пред-

ложения 20.2. Мы не будем доказывать это утверждение в общем случае, но для всех рассматриваемых нами примеров разветвленных накрытий его легко проверить непосредственно. Если в малой окрестности накрывающего многообразия накрытие устроено как  $z \mapsto z^m$ , то говорят, что эта точка имеет *индекс ветвления*  $m$ . Ясно, что для  $n$ -листного разветвленного накрытия сумма индексов ветвления всех прообразов любой точки базы равна  $n$ .

**20.3. Предложение.** *Отображение  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , заданное формулой  $f(z) = 2(z + 1/z)$ , является 2-листным разветвленным накрытием с точками ветвления 4 и  $-4$ . Прообразами этих точек служат точки 1 и  $-1$ , имеющие индекс ветвления 2.*

*Доказательство.* Уравнение  $2(z + 1/z) = c$  является квадратным уравнением. Его дискриминант  $c^2/4 - 4$  равен нулю при  $c = \pm 4$ . Эти значения функция  $f$  принимает при  $z = \pm 1$ .  $\square$

**20.4. Предложение.** *Пусть  $p$  — ограничение отображения  $f$  из предложения 20.3 на кольцо*

$$C = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}.$$

*Если  $z = \rho e^{i\varphi}$ , то*

$$p(z) = 2((\rho + 1/\rho) \cos \varphi + i(\rho - 1/\rho) \sin \varphi),$$

*поэтому образом кольца  $C$  при отображении  $p$  служит множество точек, лежащих внутри эллипса*

$$\{z = 5 \cos \varphi + 3i \sin \varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$$

(рис. 20.1).  $\square$

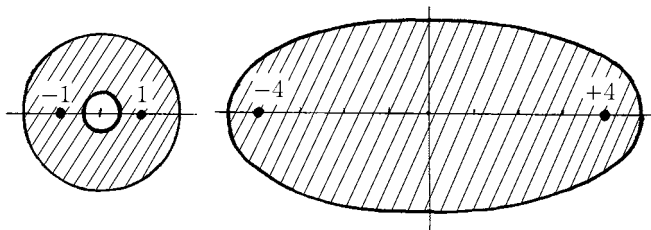


Рис. 20.1

Более наглядно описать отображение  $p$  можно следующим образом. Представим кольцо  $C$  как сферу с двумя дырками, имеющую ось симметрии  $l$  (рис. 20.2). отождествим точки сферы, симметричные относительно оси  $l$ . Легко проверить, что в результате получим диск  $D^2$ . Построенное отображение  $p : C \rightarrow D^2$  является двулистным разветвленным накрытием с двумя точками ветвления.

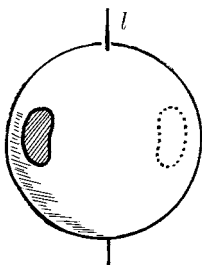


Рис. 20.2

**Задача 20.1.** Докажите, что если база  $M^2$  разветвленного накрытия  $p : N^2 \rightarrow M^2$  ориентируема, то накрывающее многообразие  $N^2$  тоже ориентируемо.

**20.5. Теорема.** Пусть  $M_g^2$  — сфера с  $g$  ручками. Тогда существует разветвленное накрытие  $p : M_g^2 \rightarrow S^2$ .

*Первое доказательство.* Расположим сферу с  $g$  ручками так, чтобы ось симметрии  $l$  была такого вида, как на рис. 20.3. отождествим пары точек, симметричных относительно  $l$ . В результате получим сферу  $S^2$ . Естественная проекция  $p : M_g^2 \rightarrow S^2$  является двулистным разветвленным накрытием с  $2g + 2$  точками ветвления.  $\square$

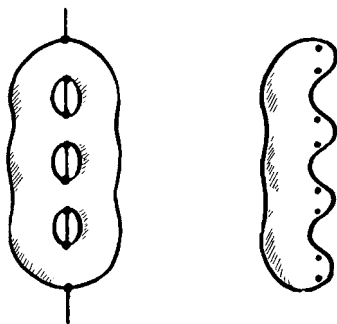


Рис. 20.3

*Второе доказательство.* Рассмотрим *триангуляцию* многообразия  $M_g^2$ . (Это означает, что  $M_g^2$  разрезано на криволинейные треугольники, любые два из которых пересекаются по общей стороне или по общей вершине, либо не пересекаются вовсе.) Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — вершины рассматриваемой триангуляции. Выберем на сфере точки  $B_1, \dots, B_n$  общего положения в следующем смысле: никакие три из них не лежат на одной дуге большей окружности и никакие две не диаметрально противоположны. Тогда любые три точки  $B_i, B_j, B_k$  однозначно определяют сферический треугольник  $\Delta_1$ . Пусть  $\Delta_2$  — замыкание его дополнения  $S^2 \setminus \Delta_1$ . Ясно, что  $\Delta_2$  гомеоморфно  $\Delta_1$ . Поэтому существуют гомеоморфизмы

$$f_1 : A_i A_j A_k \rightarrow \Delta_1, \quad f_2 : A_i A_j A_k \rightarrow \Delta_2,$$

которые отображают стороны треугольников линейно в следующем смысле. Будем считать, что на  $M_g^2$  и на  $S^2$  определено понятие длины кривой. Тогда мы потребуем, чтобы точка  $X$  делила дугу  $A_p A_q$  в таком же отношении, в каком точка  $f_r(X)$ ,  $r = 1, 2$ , делит дугу  $B_p B_q$ .

Фиксируем ориентации многообразия  $M_g^2$  и сферы  $S^2$ . Ориентации треугольников  $A_i A_j A_k$  и  $B_i B_j B_k$ , индуцированные порядком их вершин, могут быть согласованы или не согласованы с ориентациями  $M_g^2$  и  $S^2$ . Если обе ориентации одновременно согласованы или не согласованы, то отображим  $A_i A_j A_k$  на  $\Delta_1 = B_i B_j B_k$  посредством гомеоморфизма  $f_1$ . Если же одна ориентация согласована, а другая ориентация не согласована, то отображим  $A_i A_j A_k$  на  $\Delta_2$  посредством гомеоморфизма  $f_2$ . Определив такие отображения для всех треугольников триангуляции  $M_g^2$ , получим отображение  $f : M_g^2 \rightarrow S^2$ . Проверим, что это отображение является разветвленным накрытием.

Для каждой внутренней точки  $x_0$  треугольника  $A_i A_j A_k$  существует окрестность  $U(x_0)$ , которую  $f$  отображает на ее образ гомеоморфно. Докажем, что это верно не только для внутренних точек треугольников, но и для внутренних точек сторон треугольников. В самом деле, пусть сторона  $A_i A_j$  принадлежит двум треугольникам  $A_i A_j A_k$  и  $A_i A_j A_l$ . На сфе-



ре  $S^2$  большая окружность, проходящая через точки  $B_i$  и  $B_j$ , может либо разделять точки  $B_k$  и  $B_l$ , либо не разделять их. В первом случае применяются отображения  $f_1$  и  $f_1$  (или  $f_2$  и  $f_2$ ), а во втором случае  $f_1$  и  $f_2$  (или  $f_2$  и  $f_1$ ). Во всех случаях достаточно малая окрестность точки, лежащей внутри стороны  $A_i A_j$ , будет гомеоморфно отображаться на свой образ (рис. 20.4). Таким образом, точками ветвления могут быть лишь точки  $B_1, \dots, B_n$  (хотя и не все они должны быть точками ветвления).  $\square$

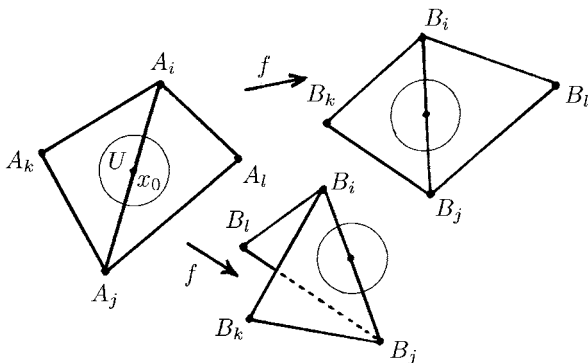


Рис. 20.4

**20.6. Теорема.** Пусть  $M_g^2$  — сфера с  $g$  ручками,  $g \geq 1$ . Тогда существует разветвленное накрытие  $p : M_g^2 \rightarrow S^2$  ровно с тремя точками ветвления.

*Доказательство.* Возьмем произвольную триангуляцию многообразия  $M_g^2$  и рассмотрим ее барицентрическое подразделение, т.е. разрежем каждый треугольник его медианами на 6 треугольников. Вершинам барицентрического подразделения сопоставим числа 0,1,2 следующим образом:

- 0 — вершине исходного треугольника;
- 1 — середине стороны;
- 2 — барицентру треугольника.

Если ориентация некоторого треугольника 012, индуцированная порядком его вершин, совпадает с ориентацией мно-

гообразия  $M_g^2$ , то окрасим этот треугольник в черный цвет, а если не совпадает, то в белый (рис. 20.5).

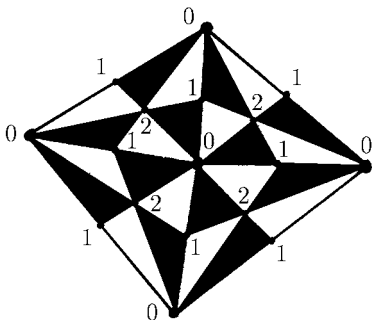


Рис. 20.5

Можно считать, что сфера  $S^2$  склеена из двух треугольников. Пусть  $0', 1', 2'$  — вершины этих треугольников. Окрасим один треугольник в черный цвет, а другой в белый. Отобразим теперь каждый белый треугольник  $012$  барицентрического подразделения триангуляции  $M_g^2$  на белый треугольник  $0'1'2'$  сферы  $S^2$ , а каждый черный треугольник отобразим на черный треугольник  $0'1'2'$ . Более подробно это отображение описано во втором доказательстве теоремы 20.5; там же приведено доказательство того, что построенное отображение является разветвленным накрытием. Точками ветвления могут быть лишь точки  $0', 1', 2'$ . В следующем параграфе мы убедимся, что все они обязательно должны быть точками ветвления (теорема 21.7).  $\square$

## §21. Формула Римана–Гурвица

**21.1.** В этом параграфе мы сначала напомним определения и некоторые основные свойства эйлеровой характеристики, а затем воспользуемся этим понятием, чтобы сформулировать и доказать классическую формулу Римана–Гурвица, которая связывает топологические свойства базы и накрывающего многообразия с индексами ветвления.

**21.2. Эйлерова характеристика.** Пусть  $M^n$  — компактное триангулированное многообразие размерности  $n$ . Его *эйлеровой характеристикой*  $\chi(M^n)$  называют альтернированную сумму

$$\chi(M^n) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n,$$

где  $a_k$  — количество симплексов размерности  $k$ . Тот факт, что число  $\chi(M^n)$  не зависит от выбора триангуляции, следует из теории гомологий. В общем случае доказывать это мы не будем. Но при  $n = 2$  доказательство вполне элементарно. Приведем его вкратце. Напомним, что триангуляцию  $K'$  называют *подразделением* триангуляции  $K$ , если любой симплекс триангуляции  $K$  можно представить в виде объединения симплексов триангуляции  $K'$ . Две триангуляции  $K_1$  и  $K_2$  двумерной поверхности называют *трансверсальными*, если их ребра пересекаются трансверсально в конечном числе точек. Любые две триангуляции двумерной поверхности малым шевелением можно превратить в трансверсальные.

**Задача 21.1.** а) Докажите, что эйлерова характеристика триангулированного двумерного многообразия не изменяется при переходе к подразделению его триангуляции.

б) Докажите, что у любых двух трансверсальных триангуляций двумерного многообразия есть общее подразделение.

в) Докажите, что эйлерова характеристика двумерного многообразия не зависит от выбора триангуляции.

Легко проверить, что если (компактное) многообразие  $A \cup B$  получено из многообразий  $A$  и  $B$  склейкой по многообразию  $A \cap B$ , то

$$\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B). \quad (21.1)$$

Для многообразий размерности 2, когда  $A \cap B$  состоит из одной или нескольких окружностей, получаем более простую формулу:

$$\chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B). \quad (21.2)$$

В самом деле, в этом случае  $\chi(A \cap B) = 0$ , так как эйлерова характеристика окружности равна нулю.

**21.3. Предложение.** Если  $M_g^2$  — сфера с  $g$  ручками, то  $\chi(M_g^2) = 2 - 2g$ .

*Доказательство.* Пусть  $F_g^2 = M_g^2 \setminus (D^2 \cup D^2)$ , т.е.  $F_g^2$  — сфера с  $g$  ручками, из которой вырезаны два диска (рис. 21.1). Тогда

$$\chi(M_g^2) = \chi(F_g^2) + 2\chi(D^2), \quad \text{т.е.} \quad \chi(F_g^2) = \chi(M_g^2) - 2.$$

Но  $M_{g+1}^2$  можно получить из  $F_g^2$ , приклеив ручку (см. рис. 21.1), эйлерова характеристика которой равна нулю. Поэтому

$$\chi(M_{g+1}^2) = \chi(F_g^2) = \chi(M_g^2) - 2.$$

Легко проверить, что  $\chi(S^2) = 2$ . Поэтому по индукции получаем  $\chi(M_g^2) = 2 - 2g$ .  $\square$

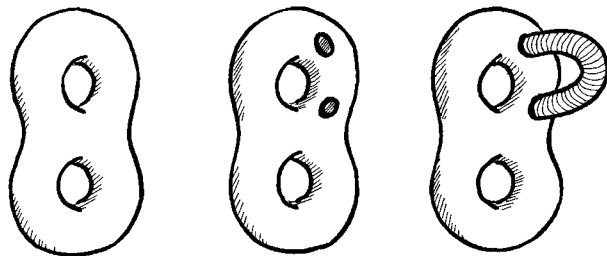


Рис. 21.1

Таким образом, топологический тип любого компактного ориентируемого двумерного многообразия без края полностью определяется его эйлеровой характеристикой.

**21.4. Теорема (формула Римана–Гурвица).** Пусть  $p : M^2 \rightarrow N^2$  — разветвленное  $n$ -листное накрытие компактных двумерных многообразий,  $y_1, \dots, y_l$  — точки, из которых состоят прообразы точек ветвления,  $d_1, \dots, d_l$  — соответствующие индексы ветвления. Тогда

$$\chi(M^2) + \sum_{i=1}^l (d_i - 1) = n\chi(N^2). \quad (21.3)$$

Доказательство теоремы 21.4 будет легче понять, если сначала мы разберем ее частный случай, когда  $p$  — обычное (неразветвленное) накрытие.

**21.5. Теорема.** Пусть  $p: M^2 \rightarrow N^2$  —  $n$ -листное накрытие компактных двумерных многообразий. Тогда

$$\chi(M^2) = n\chi(N^2). \quad (21.4)$$

*Доказательство.* Если в триангуляции многообразия  $N^2$  треугольники достаточно малы, то прообраз каждого треугольника состоит из  $n$  попарно непересекающихся треугольников. При этом каждой вершине, каждой стороне, каждому треугольнику триангуляции  $N^2$  соответствуют  $n$  вершин,  $n$  сторон,  $n$  треугольников триангуляции  $M^2$ . Поэтому из формулы  $\chi(N^2) = B - P + \Gamma$ , где  $B$  — число вершин триангуляции,  $P$  — число ребер,  $\Gamma$  — число граней (треугольников), следует, что  $\chi(M^2) = n\chi(N^2)$ .  $\square$

**Задача 21.2.** а) Пусть  $p: M_g^2 \rightarrow N_h^2$  — накрытие сферы с  $h$  ручками сферой с  $g$  ручками. Докажите, что  $g - 1$  делится на  $h - 1$ .

б) Предположим, что  $g, h \geq 2$ , причем  $g - 1$  делится на  $h - 1$ . Докажите, что тогда существует накрытие  $p: M_g^2 \rightarrow N_h^2$ .

**21.6. Доказательство формулы Римана–Гурвица.** Прежде всего перепишем формулу (21.3) в более удобном виде. Можно считать, что  $d_1, \dots, d_{a_1}$  — индексы ветвления прообразов одной точки ветвления,  $d_{a_1+1}, \dots, d_{a_1+a_2}$  — индексы ветвления прообразов другой точки ветвления и т.д. Как было сказано в 20.2,

$$d_1 + \dots + d_{a_1} = d_{a_1+1} + \dots + d_{a_1+a_2} = \dots = n,$$

поэтому

$$\sum_{i=1}^l (d_i - 1) = (n - a_1) + (n - a_2) + \dots = kn - a_1 - a_2 - \dots - a_k,$$

где  $k$  — количество точек ветвления,  $a_i$  количество прообразов  $i$ -й точки ветвления. Следовательно, формулу (21.3) можно записать в виде

$$\chi(M^2) = n(\chi(N^2) - k) + a_1 + \dots + a_k. \quad (21.5)$$

Нам будет более удобно доказывать формулу Римана–Гурвица именно в этом виде.

Многообразия  $M^2$  и  $N^2$  можно представить следующим образом:

$$M^2 = A_M \cup B_M \quad \text{и} \quad N^2 = A_N \cup B_N,$$

где  $A_N$  — объединение замыканий  $\varepsilon$ -окрестностей всех точек ветвления,  $A_M$  — прообраз множества  $A_N$ , а  $B_M$  и  $B_N$  — замыкания дополнений  $M^2 \setminus A_M$  и  $N^2 \setminus A_N$ . Множества  $A_M \cap B_M$  и  $A_N \cap B_N$  состоят из попарно непересекающихся окружностей, поэтому можно воспользоваться формулой (21.2). В результате получим

$$\chi(M^2) = \chi(A_M) + \chi(B_M), \quad \chi(N^2) = \chi(A_N) + \chi(B_N).$$

Ограничение отображения  $p$  на множество  $B_M$  является (неразветвленным) накрытием, поэтому согласно теореме 21.5 получаем

$$\chi(B_M) = n\chi(B_N).$$

Множество  $A_N$  состоит из  $k$  дисков, а множество  $A_M$  состоит из  $a_1 + \dots + a_k$  дисков. Поэтому

$$\chi(A_M) = a_1 + \dots + a_k, \quad \chi(A_N) = k.$$

Из полученных формул следует, что

$$\chi(M^2) = a_1 + \dots + a_k + n\chi(B_N) = a_1 + \dots + a_k + n(\chi(N^2) - k),$$

а это и есть требуемая формула (21.5). Доказательство формулы Римана–Гурвица завершено.  $\square$

Формула Римана–Гурвица имеет многочисленные приложения. Обсудим некоторые из них. Прежде всего дополним доказательство теоремы 20.6, которая утверждает, что при  $g \geq 1$  существует разветвленное накрытие  $p : M_g^2 \rightarrow S^2$  ровно с тремя точками ветвления (фактически было построено разветвленное накрытие, у которого не более трех точек ветвления). Выясним, чему равно минимальное число точек ветвления разветвленного накрытия  $p : M_g^2 \rightarrow S^2$ , где  $g \geq 1$ .

**21.7. Теорема.** Если  $g \geq 1$ , то не существует разветвленного накрытия  $p: M_g^2 \rightarrow S^2$ , у которого меньше трех точек ветвления.

*Доказательство.* Согласно формуле (21.5)

$$\begin{aligned} 2 - 2g &= \chi(M_g^2) = n(\chi(S^2) - k) + a_1 + \dots + a_k = \\ &= n(2 - k) + a_1 + \dots + a_k. \end{aligned}$$

Если  $k \leq 2$ , то  $n(2 - k) \geq 0$ , а значит,  $n(2 - k) + a_1 + \dots + a_k > 0$ , так как равенства  $a_1 + \dots + a_k = 0$  (т.е.  $k = 0$ ) и  $n(2 - k) = 0$  не могут выполняться одновременно. Поэтому  $2 - 2g > 0$ , а значит,  $g = 0$ , что противоречит условию теоремы. Таким образом,  $k > 2$ , что и утверждалось.  $\square$

**Задача 21.3.** Докажите, что если  $p: D^2 \rightarrow D^2$  — разветвленное накрытие диска диском, имеющее ровно одну точку ветвления, то прообраз точки ветвления состоит ровно из одной точки.

**21.8. Род комплексной алгебраической кривой.** Формулу Римана–Гурвица можно применить для вычисления рода алгебраической кривой в  $\mathbb{C}P^2$ . Начнем с определения основных понятий. *Алгебраическая кривая* степени  $n$  в  $\mathbb{C}P^2$  — это множество точек, удовлетворяющих однородному уравнению  $F(x, y, z) = 0$ , где

$$F(x, y, z) = \sum_{i+j+k=n} a_{ij} x^i y^j z^{n-i-j}, \quad x, y, z \in \mathbb{C}.$$

При  $z = 1$  и  $x, y \in \mathbb{R}$ , получаем *плоскую алгебраическую кривую*

$$\sum_{i+j \leq n} a_{ij} x^i y^j = 0.$$

Если градиент

$$\text{grad}F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

не обращается в нуль ни в одной точке алгебраической кривой в  $\mathbb{C}P^2$ , то кривую называют *неособой*. А если многочлен  $F$

*неприводим*, т.е. его нельзя представить в виде произведения двух однородных многочленов меньшей степени, то кривую называют *неприводимой*. Можно доказать, что неособая неприводимая алгебраическая кривая в  $\mathbb{C}P^2$  гомеоморфна сфере с  $g$  ручками для некоторого  $g \geq 0$ ; число  $g$  называют при этом *родом* кривой.

**21.9. Предложение.** *Кривая Ферма  $x^n + y^n + z^n = 0$  имеет род*

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что кривая Ферма  $\Gamma \subset \mathbb{C}P^2$  неособая, так как

$$\text{grad}F = n(x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1}) \neq 0 \quad \forall (x:y:z) \in \mathbb{C}P^2.$$

Рассмотрим отображение  $p: \mathbb{C}P^2 \setminus \{(0:0:1)\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , которое переводит точку  $(x:y:z) \in \mathbb{C}P^2$  в точку  $(x:y) \in \mathbb{C}P^1$ . Точка  $(0:0:1)$  не лежит на кривой  $\Gamma$ , поэтому отображение  $p$  индуцирует отображение  $p': \Gamma \rightarrow \mathbb{C}P^1 = S^2$ . Прообраз точки  $(x_0:y_0) \in \mathbb{C}P^1$  состоит из таких точек  $(x_0:y_0:z) \in \mathbb{C}P^2$ , что  $z^n = -(x_0^n + y_0^n)$ . При  $x_0^n + y_0^n \neq 0$  прообраз состоит из  $n$  точек, а при  $x_0^n + y_0^n = 0$  прообраз состоит из одной точки. Поэтому  $p'$  —  $n$ -листное разветвленное накрытие с точками ветвления  $(1:\varepsilon_n) \in \mathbb{C}P^1$ , где  $\varepsilon_n$  — корень степени  $n$  из единицы. Итак, количество точек ветвления равно  $n$ , причем прообраз каждой точки ветвления состоит ровно из одной точки. Согласно формуле (21.5) получаем

$$\chi(\Gamma) = n(\chi(S^2) - n) + n = n(2 - n) + n = -n^2 + 3n.$$

Поэтому

$$g = \frac{2 - \chi(\Gamma)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \quad \square$$

**21.10. Предложение.** *Гиперэллиптическая кривая  $y^2 = P_n(x)$ , где  $P_n$  — многочлен степени  $n \geq 5$  без кратных корней, имеет род  $[(n+1)/2] - 1$ .*

*Замечание.* Это утверждение верно и при  $n < 5$ . При  $n = 3, 4$  кривую  $y^2 = P_n(x)$  называют *эллиптической*.



*Доказательство.* Пусть  $P_n(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ . Тогда гиперэллиптическая кривая  $\Gamma$  в  $\mathbb{C}P^2$  задается уравнением

$$y^2 z^{n-2} = \sum_{k=0}^n a_k x^k z^{n-k}. \quad (21.6)$$

Для гиперэллиптической кривой имеем  $\text{grad } F = 0$  в точке  $(0 : 1 : 0) \in \Gamma$ , поэтому кривая  $\Gamma$  особая.

Рассмотрим отображение

$$p : \mathbb{C}P^2 \setminus \{(0 : 1 : 0)\} \rightarrow \mathbb{C}P^1, \quad \mathbb{C}P^2 \ni (x : y : z) \mapsto (x : z) \in \mathbb{C}P^1.$$

Пусть  $p' : \Gamma \setminus \{(0 : 1 : 0)\} \rightarrow \mathbb{C}P^1$  — ограничение этого отображения. Покажем, что при  $x = 1$  прообраз точки  $(x : z)$  стремится к особой точке  $(0 : 1 : 0) \in \Gamma$  при  $z \rightarrow 0$ . В самом деле, из уравнения (21.6) получаем  $y^2 \approx a_n z^{2-n} \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$(1 : y : z) = (1/y : 1 : z/y) \rightarrow (0 : 1 : 0).$$

Таким образом, отображение  $p'$  можно продолжить до отображения всей кривой  $p' : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}P^1$ , положив  $p'((0 : 1 : 0)) = (1 : 0)$ .

Чтобы найти прообраз точки  $(x_0 : z_0) \in \mathbb{C}P^1$  при отображении  $p'$  в случае  $z_0 \neq 0$ , нужно решить уравнение

$$y^2 = z_0^2 \sum_k a_k \cdot \left(\frac{x_0}{z_0}\right)^k = z_0^2 P_n\left(\frac{x_0}{z_0}\right).$$

Если  $x_0/z_0$  — не корень многочлена  $P_n$ , то это уравнение имеет ровно два решения. Поэтому отображение  $p' : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}P^1$  является двулиственным разветвленным накрытием, причем точками ветвления служат точки  $(x_0 : z_0) \in \mathbb{C}P^1$ , где  $x_0/z_0$  — корень многочлена  $P_n$  и, возможно, точка  $(1 : 0)$ . Покажем, что точка  $(1 : 0)$  будет точкой ветвления лишь при нечетном  $n$ . При малых  $z$  прообраз точки  $(1 : z)$  состоит из точек вида  $(1 : y : z)$ , где  $y^2 \approx a_n z^{2-n}$ . Пусть  $z = \rho e^{i\phi}$ . При изменении  $\phi$  от 0 до  $2\pi$ , т.е. при обходе вокруг точки  $(1 : 0) \in \mathbb{C}P^1$ , аргумент числа  $y \in \mathbb{C}$  изменяется на

$(2-n)2\pi/2 = (2-n)\pi$ . Поэтому при нечетном  $n$  число  $y$  изменяет знак, т.е. мы попадаем на другую ветвь, а при четном  $n$  число  $y$  не изменяется, т.е. мы остаемся на той же самой ветви.

Итак, количество точек ветвления равно  $2[(n+1)/2]$ . Пусть  $g$  — род кривой  $\Gamma$ . Тогда согласно формуле (21.5)

$$2 - 2g = 2 \left( 2 - 2 \left[ \frac{n+1}{2} \right] \right) + 2 \left[ \frac{n+1}{2} \right] \quad \text{и} \quad g = \left[ \frac{n+1}{2} \right] - 1. \quad \square$$

## §22. Разветвленные накрытия трехмерных многообразий

**22.1.** Многие определения и теоремы из §20 можно перенести на случай трехмерных многообразий без существенных изменений. Определение накрытия не требует вообще никаких изменений. *Разветвленное накрытие* трехмерных многообразий определяется как такое непрерывное отображение  $p : M^3 \rightarrow N^3$ , что в  $N^3$  существует одномерный подкомплекс  $L^1$ , прообраз которого  $p^{-1}(L^1)$  является одномерным подкомплексом, причем ограничение  $p$  на  $M^3 \setminus p^{-1}(L^1)$  является накрытием. В такой ситуации  $M^3$  называют *накрывающим многообразием*,  $N^3$  — *базой накрытия*, а  $L^1$  — *множеством ветвления*.

Теоремы 20.5 и 20.6 вместе с их доказательствами легко переносятся с размерности 2 на размерность 3. Для теоремы 20.5 мы при этом имеем в виду ее второе доказательство. Таким образом получаем следующие утверждения.

**22.2. Теорема (Александр).** Пусть  $M^3$  — компактное ориентируемое многообразие без края. Тогда существует разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$ .  $\square$

**22.3. Теорема.** Пусть  $M^3$  — компактное ориентируемое многообразие без края. Тогда существует разветвленное накрытие  $p: M^3 \rightarrow S^3$ , множеством ветвления которого служит одномерный остов тетраэдра (т.е. 6 его ребер).

*Замечание.* Теоремы 22.2 и 22.3 без труда переносятся на  $n$ -мерные многообразия. В обобщении теоремы 22.3 множеством ветвления будет  $(n-2)$ -мерный остов  $n$ -мерного симплекса.

**Задача 22.1.** Пусть  $M^3$  — компактное ориентируемое многообразие без края. Докажите, что существует разветвленное накрытие  $p: M^3 \rightarrow S^3$ , множество ветвления которого устроено так, как показано на рис. 22.1.

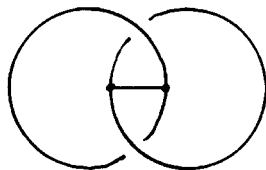


Рис. 22.1

**22.4.** В дальнейшем нас будут интересовать лишь разветвленные накрытия  $p: M^3 \rightarrow N^3$ , для которых множеством ветвления служит не просто подкомплекс, а подмногообразие (в случае многообразий размерности 3 — зацепление), причем прообраз множества ветвления тоже является подмногообразием. Для таких разветвленных накрытий аналоги теорем 22.2 и 22.3 доказываются гораздо сложнее. Мы докажем их в §§23–25.

**22.5. Циклические разветвленные накрытия.** Важным примером разветвленного накрытия служит  $n$ -листное циклическое разветвленное накрытие  $p: S^3 \rightarrow S^3$ . Оно определяется следующим образом. Представим  $S^3$  как  $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ . Выделим в  $\mathbb{R}^3$  прямую  $l$  и отождествим точки  $\mathbb{R}^3$ , которые получаются друг из друга поворотом на угол  $2\pi/n$  вокруг оси  $l$ . В результате получим отображение  $p_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_n$ , где  $\mathbb{Z}_n$  — группа поворотов на угол  $2\pi k/n$  вокруг оси  $l$ . Ограничение отображения  $p_1$  на плоскость, перпендикулярную прямой

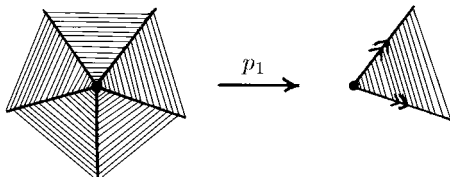


Рис. 22.2

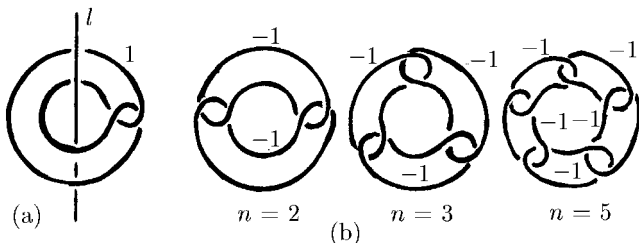
$l$ , изображено на рис. 22.2; стороны угла, отмеченные стрелками, нужно отождествить.

Ясно, что  $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_n \approx \mathbb{R}^3$ , причем отображение  $p_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  является разветвленным накрытием с множеством ветвления  $l$ . Добавив к каждому из этих пространств  $\mathbb{R}^3$  бесконечно удаленную точку, получим разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$ , которое называют *циклическим*. Множеством ветвления циклического разветвленного накрытия служит окружность  $l \cup \infty$ . Прообразом множества ветвления тоже является окружность  $l \cup \infty$ .

**22.6.** Исходя из циклического разветвленного накрытия  $p : S^3 \rightarrow S^3$ , можно построить другие примеры разветвленных накрытий, делая перестройки по оснащенным зацеплениям (см. §16). Выберем в базе разветвленного накрытия  $p$  оснащенное зацепление  $L$  и сделаем по нему перестройку. В результате получим некоторое многообразие  $N^3$ . Рассмотрим прообраз оснащенного зацепления  $L$  и сделаем по нему перестройку. В результате получим еще одно многообразие  $M^3$ . Разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$  индуцирует разветвленное накрытие  $p' : M^3 \rightarrow N^3$ ; его мы тоже будем называть *циклическим*.

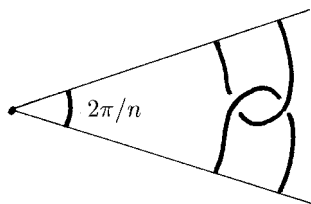
Оснащения компонент зацепления  $p^{-1}(L)$  определяются следующим образом. Оснащение каждой компоненты зацепления  $L$  зададим посредством кривой на крае ее  $\varepsilon$ -окрестности. Тогда на крае  $\varepsilon$ -окрестности каждой компоненты зацепления  $p^{-1}(L)$  тоже будет задана некоторая кривая. Следующее утверждение служит примером, иллюстрирующим эту ситуацию.

**22.7. Предложение.** *Прообразом кривой с оснащением 1, изображенной на рис. 22.3 (а), при  $n$ -листном циклическом разветвленном накрытии служит оснащенное зацепление, изображенное на рис. 22.3 (b) для  $n = 2, 3, 5$ . (Для произвольного  $n$  зацепление состоит из  $n$  компонент и устроено аналогично.)*

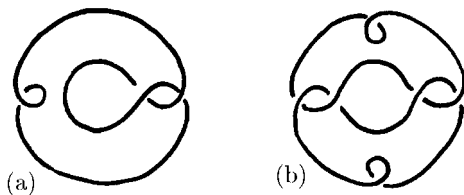


**Рис. 22.3**

*Доказательство.* Рассматриваемый прообраз получается в результате склейки  $n$  экземпляров зацепленных кривых, изображенных на рис. 22.4. Поэтому прообраз действительно устроен так, как показано на рис. 22.3 (b). Остается лишь найти оснащения его компонент.



**Рис. 22.4**



**Рис. 22.5**

В 19.6 мы дали определение диаграммы оснащенного зацепления. Для исходной кривой с оснащением +1 диаграмма выглядит так, как показано на рис. 22.5 (a); отрицательная

петелька, дающая в оснащение вклад  $-1$ , добавлена потому, что каждый из двух перекрестков диаграммы дает в оснащение вклад  $+1$  (а в сумме мы должны получить  $+1$ ). При  $n = 2$  диаграмма оснащенного зацепления  $p^{-1}(L)$  изображена на рис. 22.5 (b). Оснащение каждой компоненты этого зацепления полностью определяется добавленной отрицательной петелькой. Для произвольного  $n$  оснащение каждой компоненты равно  $-1$ .  $\square$

**22.8. Предложение.** Для многообразия  $M^3$ , полученного из  $S^3$  перестройкой по оснащеному зацеплению, изображенному на рис. 22.3 (b), существует  $n$ -листное разветвленное накрытие  $p: M^3 \rightarrow S^3$  с ветвлением над трилистником.

*Доказательство.* Согласно предложению 22.7 прообраз кривой  $J$  с оснащением  $+1$  при  $n$ -листном циклическом разветвленном накрытии  $p_1: S^3 \rightarrow S^3$  состоит из  $n$  кривых  $J_1, \dots, J_n$  с оснащениями  $-1$ . Рассмотрим зацепление  $\{J, K\}$ , изображенное на рис. 22.6 (b). Несложно убедиться, что это зацепление изотопно зацеплению, изображенному на рис. 22.7 (подробно требуемая изотопия изображена на рис. 18.8).

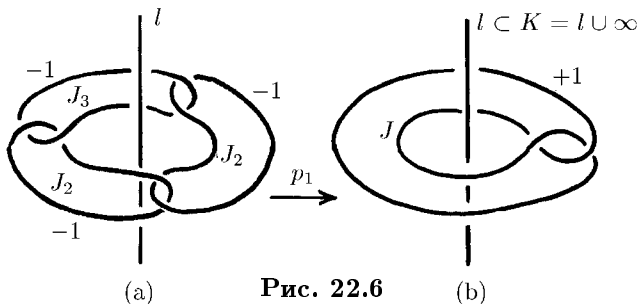


Рис. 22.6

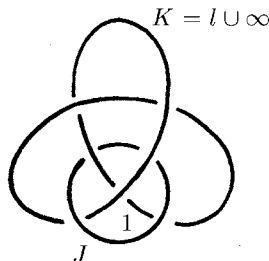


Рис. 22.7

Сделаем перестройку  $S^3$  по кривой  $J$  с оснащением  $+1$ . В результате множество ветвления  $K$  превратится в трилистник, а само многообразие  $S^3$  не изменится (потому что кривая  $J$  незаузлена). Таким образом, после перестройки базы и накрывающего многообразия по оснащенным зацеплениям  $J$  и  $\{J_1, \dots, J_n\}$  соответственно отображение  $p_1 : S^3 \rightarrow S^3$  превращается в разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с ветвлением над трилистником.  $\square$

**Задача 22.2.** Докажите, что существует 2-листное разветвленное накрытие  $p : L(3, 1) \rightarrow S^3$  с ветвлением над трилистником.

**22.9. Предложение.** Сфера Пуанкаре 5-листно накрывает сферу  $S^3$  с ветвлением над трилистником.

*Доказательство.* В случае  $n = 5$  предложение 22.8 дает 5-листное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с ветвлением над трилистником. При этом многообразие  $M^3$  получено из сферы  $S^3$  перестройкой по оснащенному зацеплению, изображенному на рис. 22.8(a). Сделав зеркальную симметрию, мы получим оснащенное зацепление, изображенное на рис. 22.8 (b). Но мы уже установили, что перестройка сферы по такому оснащенному зацеплению дает сферу Пуанкаре (см. рис. 18.12).  $\square$

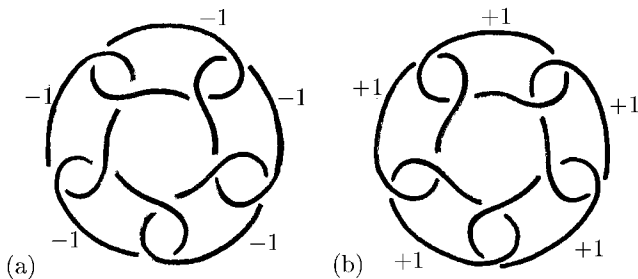


Рис. 22.8

**22.10.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — меридиан и параллель стандартно вложенного тора,  $p$  и  $q$  — взаимно простые натуральные числа. Тогда замкнутую кривую  $p\alpha + q\beta$  на торе называют *торическим узлом* типа  $(p, q)$ .

**Задача 22.3.** Докажите, что торический узел типа  $(p, q)$  изотопен торическому узлу типа  $(q, p)$ .

**22.11. Предложение.** Сфера Пуанкаре 3-листно покрывает сферу  $S^3$  с ветвлением над торическим узлом типа  $(2, 5)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим 3-листное циклическое разветвленное накрытие  $p_1 : S^3 \rightarrow S^3$  (рис. 22.9).

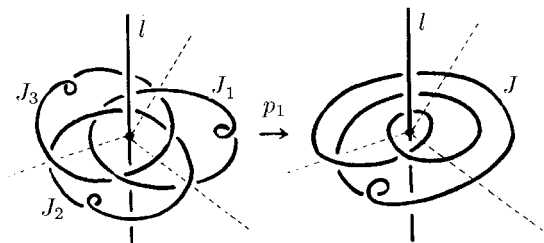


Рис. 22.9

Кривая  $J$  незаузлена и ее оснащение равно 1. Поэтому после перестройки базы  $S^3$  по кривой  $J$  снова получаем сферу  $S^3$ . А как показывает рис. 22.10, кривая  $K = l \cup \infty$  при такой перестройке превращается в торический узел типа  $(2, 5)$ . В

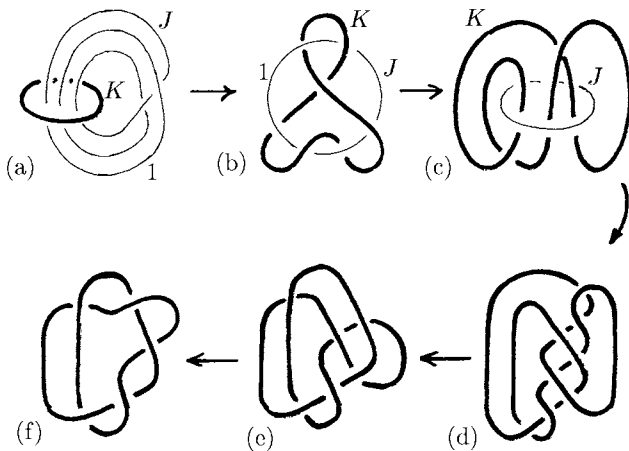


Рис. 22.10

накрывающем многообразии  $S^3$  нужно сделать перестройку по прообразу кривой  $J$ , т.е. по зацеплению  $\{J_1, J_2, J_3\}$ . Эта перестройка дает сферу Пуанкаре  $M^3$  (см. рис. 18.10). После указанных перестроек разветвленное накрытие  $p_1 : S^3 \rightarrow S^3$



превращается в требуемое разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$ .  $\square$

**22.12. Предложение.** *Сфера Пуанкаре 2-листно накрывает сферу  $S^3$  с ветвлением над торическим узлом типа  $(3, 5)$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим 2-листное циклическое разветвленное накрытие  $p_1 : S^3 \rightarrow S^3$  (рис. 22.11).

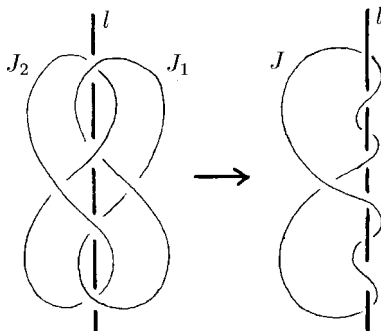


Рис. 22.11

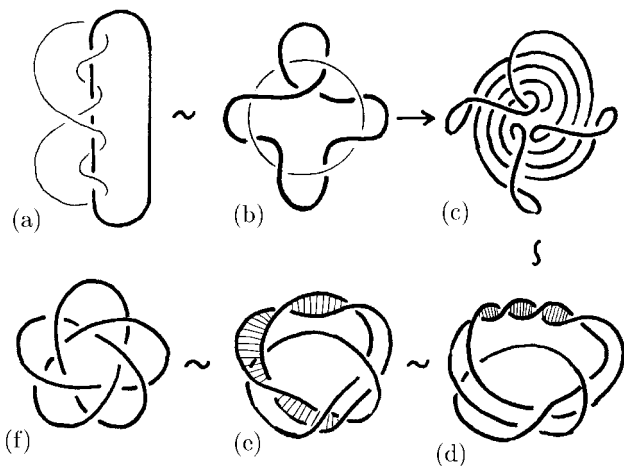


Рис. 22.12

Кривая  $J$  незаузлена и ее оснащение равно 1. Как показывает рис. 22.12, кривая  $K = l \cup \infty$  при перестройке  $S^3$  по

кривой  $J$  превращается в торический узел типа  $(3, 5)$ . Перестройка по зацеплению  $\{J_1, J_2\}$  превращает накрывающее многообразие  $S^3$  в сферу Пуанкаре.  $\square$

Предложения 22.9, 22.11 и 22.12 показывают что сфера Пуанкаре  $p$ -листно покрывает сферу  $S^3$  с ветвлением над торическим узлом типа  $(q, r)$  для любой тройки  $(p, q, r)$ , которая получается из тройки  $(2, 3, 5)$  перестановкой элементов.

## §23. Трехмерные многообразия как разветвленные накрытия сферы

В этом параграфе мы докажем следующее утверждение, уточняющее теорему Александра 22.2 о разветвленных накрытиях.

**23.1. Теорема (Хилден–Монтесинос).** *Для любого компактного ориентируемого многообразия  $M^3$  без края существует 3-листное разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с ветвлением над узлом.*

Отметим, что это утверждение уточняет теорему Александра сразу в трех отношениях:

- (1) указывается точное число листов накрытия  $p$ ;
- (2) показывается, что в качестве множества ветвления можно взять не просто подкомплекс, а подмногообразие;
- (3) это подмногообразие можно считать связным.

Теорема Хилдена–Монтесиноса служит мостом между теорией узлов и теорией трехмерных многообразий.

Доказательство теоремы 23.1 довольно длинное. Его общая схема такова: мы возьмем некоторое 3-листное разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$  и с помощью перестроек превратим накрывающее многообразие  $S^3$  в заданное многообразие  $M^3$ . Предварительно нужно выяснить, как должны быть согласованы перестройка базы и перестройка накрывающего многообразия, чтобы в результате снова получилось разветвленное накрытие.

Предположим, что база разветвленного накрытия  $p : M^3 \rightarrow N^3$  склеена из многообразий  $N_1^3$  и  $N_2^3$ , а накрывающее многообразие склеено из многообразий  $M_1^3$  и  $M_2^3$  (не обязательно связных), причем  $M_i^3 = p^{-1}(N_i^3)$ . Можно считать, что

$$\partial N_1^3 = \partial N_2^3 = N^2 \quad \text{и} \quad \partial M_1^3 = \partial M_2^3 = M^2,$$

причем склейки производятся по тождественным гомеоморфизмам многообразий  $N^2$  и  $M^2$ .

**23.2. Лемма.** Пусть  $p_1$  — ограничение отображения  $p$  на многообразии  $M^2$ . Предположим что многообразии  $N^2$  пересекает множество ветвления трансверсально. Тогда после приклейки  $N_1^3$  к  $N_2^3$  и  $M_1^3$  к  $M_2^3$  по гомеоморфизмам

$$f : \partial N_1^3 \rightarrow \partial N_2^3 \quad \text{и} \quad g : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_2^3$$

соответственно отображение  $p$  остается разветвленным накрытием в том и только в том случае, когда  $p_1 g = f p_1$ .

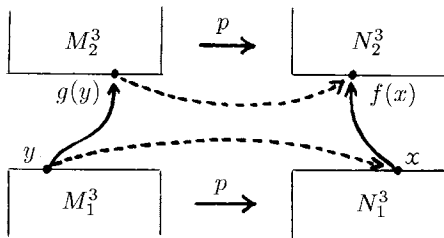


Рис. 23.1

*Доказательство.* Условие  $p_1 g = f p_1$  необходимо и достаточно для того, чтобы отображение  $p$  осталось после указанной переклейки однозначно определенным и непрерывным (рис. 23.1). Из того, что многообразие  $N^2$  пересекает множество ветвления трансверсально, следует, что отображение  $p_1 : M^2 \rightarrow N^2$  является разветвленным накрытием (двумерных поверхностей). Так как  $f$  и  $g$  — гомеоморфизмы, причем  $p_1 g = f p_1$ ,  $g$  взаимно однозначно отображает  $p^{-1}(f^{-1}(x))$  на  $p^{-1}(x)$ .

Следовательно,  $f$  переводит точку ветвления в точку ветвления, а  $g$  переводит прообраз точки ветвления в прообраз точки ветвления. Таким образом, при указанной переклейке происходит также переклейка множества ветвления и его прообраза. Поэтому после перестройки ограничение отображения  $p$  на дополнение прообраза множества ветвления снова будет накрытием.  $\square$

**23.3.** Пусть  $p_1 : M^2 \rightarrow N^2$  — разветвленное накрытие. Будем говорить, что гомеоморфизм  $g : M^2 \rightarrow M^2$  *накрывает* данный гомеоморфизм  $f : N^2 \rightarrow N^2$  (по отношению к  $p_1$ ), если  $p_1 g = f p_1$ .

Лемма 23.2 показывает, что описание одновременных перестроек базы и накрывающего многообразия разветвленного накрытия  $p : M^3 \rightarrow N^3$ , согласованных с отображением  $p$ , сводится к описанию гомеоморфизма  $f$  и накрывающего его гомеоморфизма  $g$ . Рассмотрим два примера накрывающих гомеоморфизмов. Оба эти примера нам понадобятся в дальнейшем.

**23.4. Пример.** Рассмотрим 2-листное разветвленное накрытие, изображенное на рис. 23.2 (c). Легко проверить, что накрывающее многообразие гомеоморфно кольцу (см. рис. 23.2 (a) и (b)).

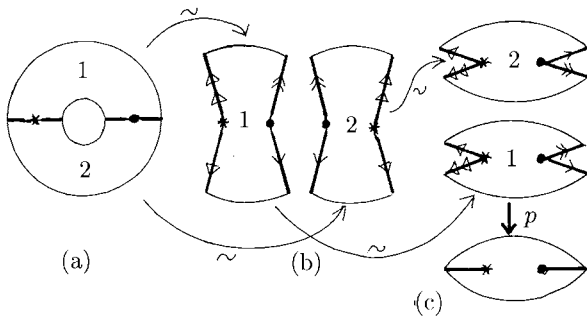


Рис. 23.2

Пусть  $f$  — тождественный на крае гомеоморфизм диска, меняющий местами точки ветвления посредством закручивания на  $180^\circ$ ; на рис. 23.3 изображен образ отрезка  $I$  при гомеоморфизме  $f$ .

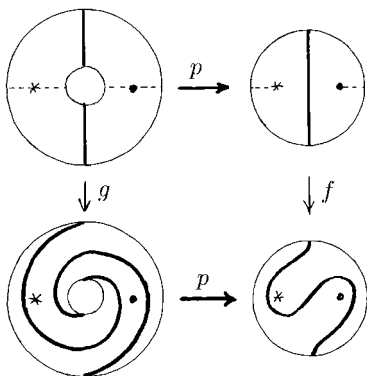


Рис. 23.3

Тогда для гомеоморфизма  $f$  существует тождественный на крае гомеоморфизм  $g$ , накрывающий  $f$ . Он устроен так, как показано на рис. 23.3.

Чтобы построить гомеоморфизм  $g$ , разрежем два экземпляра диска с изображением образа отрезка  $I$  (рис. 23.4(a)) и склеим их так, чтобы получить накрывающее многообразие накрытия  $p$  (рис. 23.4(b)).

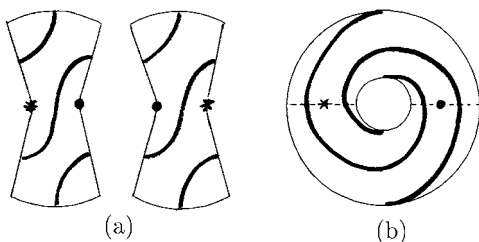


Рис. 23.4

**23.5. Пример.** Рассмотрим 3-листное разветвленное накрытие, изображенное на рис. 23.5 (а). Легко проверить, что накрываемое многообразие гомеоморфно диску (рис. 23.5 (b) и (c)).

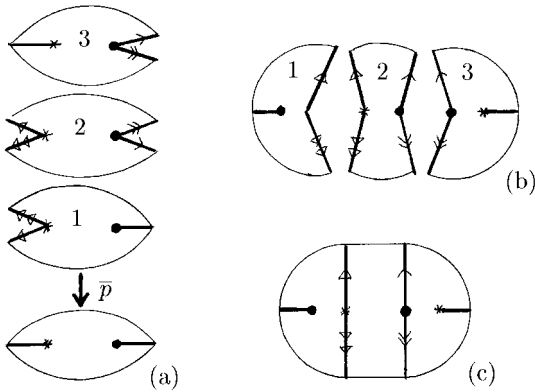


Рис. 23.5

Строение этого разветвленного накрытия  $\bar{p}$  более детально изображено на рис. 23.6. Обратите внимание, что заштрихованные области переводятся друг в друга посредством параллельных переносов и, возможно, симметрий относительно точки.

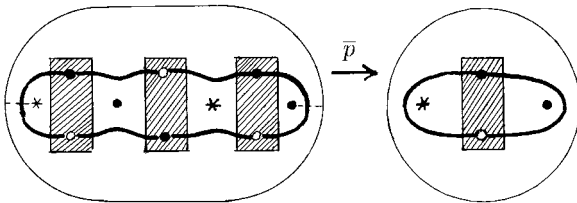


Рис. 23.6

Пусть  $f$  — тождественный на крае гомеоморфизм диска, меняющий местами точки ветвления посредством закручивания на  $3\pi$  (рис. 23.7). Тогда существует тождественный на крае гомеоморфизм  $g$ , накрывающий  $f$ . Он устроен так, как показано на рис. 23.7.

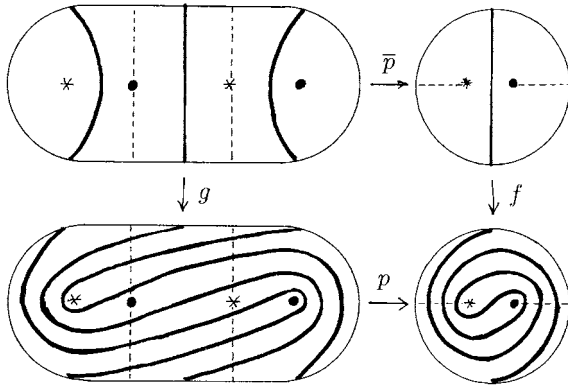


Рис. 23.7

Чтобы построить гомеоморфизм  $g$ , возьмем три экземпляра базы, разрежем их, а затем склеим так, чтобы в результате получить накрывающее пространство (рис. 23.8). Ясно, что гомеоморфизм  $g$  переставляет точки ветвления посредством закручивания на  $\pi$ , поэтому мы действительно построили требуемый гомеоморфизм.

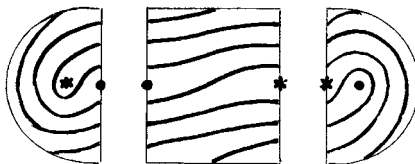


Рис. 23.8

**Задача 23.1.** Докажите, что если бы в примере 23.5 мы вместо гомеоморфизма  $f$ , закручивающего базу на  $3\pi$ , взяли бы закручивания на  $\pi$  или  $2\pi$ , то не удалось бы найти тождественный на крае гомеоморфизм  $g$ , накрывающий  $f$ .

**23.6.** Возвращаясь к доказательству теоремы Хилдена–Монтесиноса, определим разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$ , преобразуя которое, мы построим требуемое отображение  $p : M^3 \rightarrow S^3$ . Конструкция накрытия  $p$  будет основана на примере 23.5. Возьмем прямое произведение накрытия из этого примера на отрезок  $[0, 1]$  (рис. 23.9(a); выделенные отрезки в накрываемом многообразии соответствуют точкам с индексом ветвления 2). Как база накрытия, так и накрываемое многообразие являются трехмерными шарами. Поэтому, склеив два экземпляра базы по тождественному гомеоморфизму краев и склеив аналогично два экземпляра накрываемого многообразия, получим 3-листное разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$  (рис. 23.9(b)).

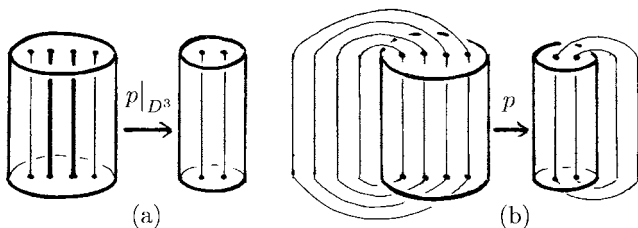


Рис. 23.9

Рассмотрим в базе разветвленного накрытия  $p$  подмногообразие  $D_1^3$ , гомеоморфное шару, которое пересекает множество ветвления так, как показано на рис. 23.10.

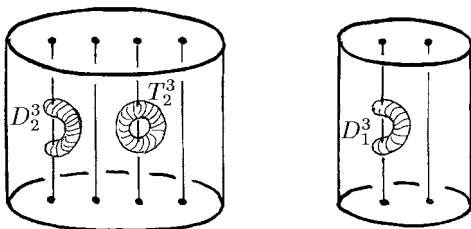


Рис. 23.10

Строение накрытия  $p$  определяется строением вспомогательного накрытия  $\bar{p}$ , изображенного на рис. 23.6. Внимательное изучение этой картинки показывает, что прообраз



$p^{-1}(D_1^3)$  маленького изогнутого диска  $D_1^3$  состоит из маленького диска  $D_2^3$  и маленького полнотория  $T_2^3$  (рис. 23.10). При этом ограничение отображения  $p$  на  $D_2^3$  является гомеоморфизмом. Покажем теперь, что ограничение  $p$  на  $T_2^3$  устроено как прямое произведение на отрезок  $[0, 1]$  разветвленного накрытия из примера 23.4. Для этого представим отображение из примера 23.4 следующим образом. Расположим кольцо так, чтобы оно имело ось симметрии  $l$  и пересекало  $l$  в двух точках (рис. 23.11(a)). Отождествив точки кольца, симметричные относительно  $l$ , получим требуемое разветвленное накрытие. Теперь ясно, что прямое произведение этого накрытия на отрезок  $[0, 1]$  устроено так же, как ограничение отображения  $p$  на  $T_2^3$  (рис. 23.11 (b)).

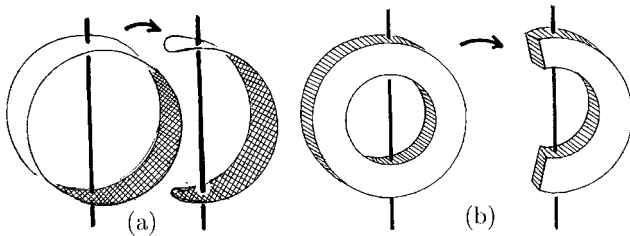


Рис. 23.11

Мы будем преобразовывать отображение  $p : S^3 \rightarrow S^3$ , вырезая и вклеивая обратно маленькие диски и маленькие полнотория так, чтобы можно было применить лемму 23.2.

**23.7.** Пусть  $p_1 : M^2 \rightarrow N^2$  — разветвленное 2-листное накрытие из примера 23.4. Здесь  $M^2$  — кольцо,  $N^2$  — диск. Чтобы применить лемму 23.2, нужно построить гомеоморфизм  $f_1 : \partial(N^2 \times I) \rightarrow \partial(N^2 \times I)$  и накрывающий его гомеоморфизм  $g_1 : \partial(M^2 \times I) \rightarrow \partial(M^2 \times I)$ . Положим  $f_1(x, 1) = f(x)$  и  $g_1(x, 1) = g(x)$ , где  $f$  и  $g$  — гомеоморфизмы из примера 23.4, и будем считать, что все остальные точки  $f_1$  и  $g_1$  оставляют на месте (рис. 23.12). Такие гомеоморфизмы  $f_1$  и  $g_1$  существуют, потому что гомеоморфизмы  $f$  и  $g$  тождественны на крае.

Вырежем теперь из базы разветвленного накрытия  $p : S^3 \rightarrow S^3$  подмногообразие  $D_1^3$ , а затем вклеим его обратно

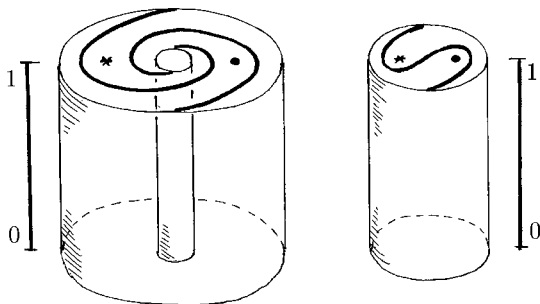


Рис. 23.12

по гомеоморфизму  $f_1 : \partial(D_1^3) \rightarrow \partial(D_1^3)$ . Одновременно с этим вырежем подмногообразия  $D_2^3$  и  $T_2^3$  и вклеим их обратно по гомеоморфизмам  $f_1 : \partial(D_2^3) \rightarrow \partial(D_2^3)$  и  $g_1 : \partial(T_2^3) \rightarrow \partial(T_2^3)$ . Согласно лемме 23.2 мы снова получим разветвленное накрытие. Область, в которой гомеоморфизм  $f_1$  не тождествен, заштрихована на рис. 23.13 (а). Этот гомеоморфизм меняет местами две точки ветвления, лежащие в этой области. Поэтому множество ветвления перестраивается так, как показано на рис. 23.13 (b) или (c). Дело в том, что наряду с гомеоморфизмом  $f_1$  можно рассмотреть гомеоморфизм  $f'_1$ , соответствующий закручиванию в противоположную сторону. Один из этих гомеоморфизмов соответствует перестройке (b), а другой перестройке (c). Обратите внимание, что количество компонент множества ветвления при таких перестройках не изменяется.

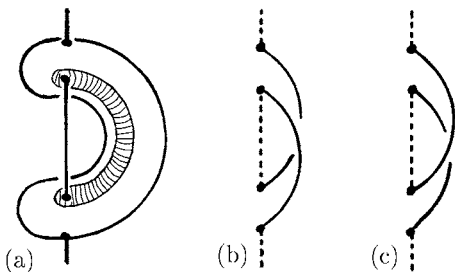


Рис. 23.13

Когда мы вырезаем диск  $D_1^3$  или  $D_2^3$ , а затем вклеиваем

его обратно (по гомеоморфизму  $f_1$ ), соответствующее многообразие не изменяется. Но когда мы вырезаем несколько полноторий такого вида, как полноторие  $T_2^3$ , а затем их вклеиваем обратно по гомеоморфизмам вида  $g_1$ , то накрывающее многообразие может измениться. Выясним более подробно, как устроена перестройка по гомеоморфизму  $g_1$  и гомеоморфизму  $g'_1$ , накрывающему гомеоморфизм  $f'_1$ . При гомеоморфизмах  $g_1$  и  $g'_1$  меридиан  $\alpha$  переходит в кривую  $\alpha \pm \beta$  (рис. 23.14). Таким образом, рассматриваемое нами преобразование накрывающего многообразия является перестройкой по незаузеленной кривой с оснащением  $\pm 1$ .

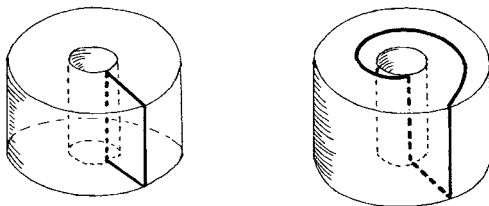


Рис. 23.14

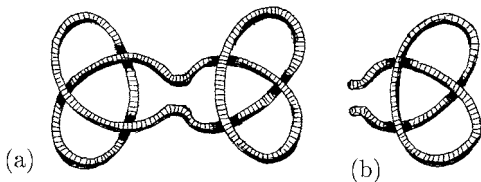


Рис. 23.15

Диск  $D_1^3$  не обязательно должен быть расположен в  $S^3$  именно так, как показано на рис. 23.10. Сделав изотопию, не затрагивающую множество ветвления, можно расположить этот диск, например, так, как показано на рис. 23.15 (b). Тогда соответствующее полноторие  $T_2^3$  будет выглядеть так, как показано на рис. 23.15 (a). Полученное полноторие  $T_2^3$  незаузелено и симметрично относительно прямой  $l$ , соответствующей одной из двух компонент множества точек с индексом ветвления 2. Таким образом, в разветвленном накрытии  $p : S^3 \rightarrow S^3$  накрывающее многообразие  $S^3$  можно перестроить по системе незаузеленных кривых с оснащениями  $\pm 1$ , каждая из которых симметрична относительно одной из двух

параллельных прямых  $l_1$  и  $l_2$ , причем кривая пересекает свою ось симметрии ровно в двух точках, а с другой прямой кривая не зацеплена и не пересекает ее. Назовем такую систему оснащенных кривых *специальной*.

**23.8. Лемма.** Любое компактное ориентируемое многообразие  $M^3$  без края можно получить из сферы  $S^3$  перестройкой по оснащеному зацеплению, которое представляет собой специальную систему оснащенных кривых.

*Доказательство.* Согласно 12.4 и 12.7 многообразие  $M^3$  можно получить из сферы  $S^3$  перестройкой по целочисленному оснащеному зацеплению  $L$ , все компоненты которого незаузлены. Преобразуем  $L$  в специальную систему кривых так, как показано на рис. 23.16.

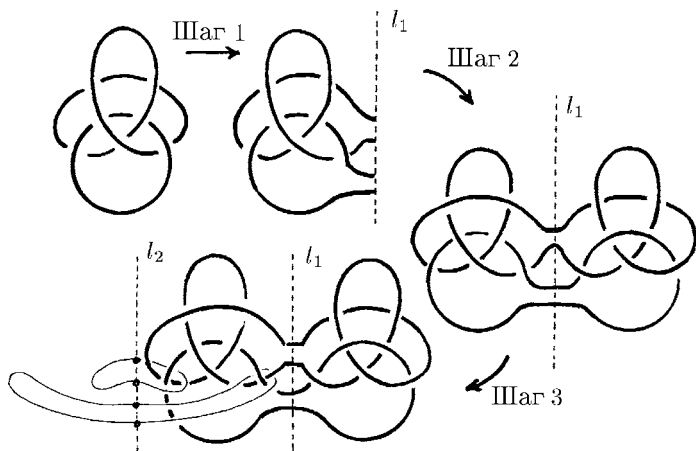


Рис. 23.16

Эти три шага можно описать подробнее так.

*Шаг 1.* Выберем плоскость так, чтобы зацепление  $L$  целиком лежало по одну сторону от нее. Затем выберем в этой плоскости прямую  $l_1$ . Подведем одну из дуг каждой компоненты зацепления  $L$  непосредственно к прямой  $l_1$ . Это делается посредством изотопии.

*Шаг 2.* Рассмотрим зацепление  $S(L)$ , симметричное  $L$  относительно прямой  $l_1$ , и построим композицию  $L\#S(L)$  зацеплений  $L$  и  $S(L)$ . Полученное зацепление  $L\#S(L)$  может

оказаться не изотопным  $L$ . Кроме того, мы пока не указали оснащения его компонент. Чтобы получить требуемое специальное зацепление, нужно сделать еще один шаг.

*Шаг 3.* Добавим незаузленные кривые с оснащениями  $\pm 1$ , охватывающие некоторые из перекрестков зацепления  $L$  таким образом, что после перестройки по добавленным кривым зацепление  $L$  распадается на попарно не зацепленные компоненты. Не теряя общности, можно считать, что добавленные кривые не зацеплены друг с другом и симметричны относительно прямой  $l_2$ . Снабдим каждую компоненту  $K_i$  зацепления  $L \# S(L)$  таким оснащением, что после перестройки по всем добавленным кривым оснащение  $K_i$  совпадет с оснащением соответствующей компоненты зацепления  $L$ . В итоге мы получим оснащенное зацепление, состоящее из всех компонент зацепления  $L \# S(L)$  (с новыми оснащениями) и добавленных кривых с оснащениями  $\pm 1$ .

Покажем, что перестройка по полученному в итоге оснащеному зацеплению дает то же самое многообразие, что и перестройка по оснащеному зацеплению  $L$ . Это почти очевидно: когда мы сделаем перестройку по всем добавленным кривым, компоненты  $L$  распейтятся, а значит, зацепление  $L \# S(L)$  станет изотопно  $S(L)$  (т.е. изотопно  $L$ ), причем все его компоненты будут иметь такие же оснащения, как и соответствующие компоненты  $L$ .

Доказательство леммы пока не завершено, потому что оснащения компонент построенного оснащенного зацепления могут быть произвольными целыми числами (для компонент, пересекающих прямую  $l_1$ ), а нам нужно, чтобы они были равны  $\pm 1$  (лишь в таком случае оснащенное зацепление будет специальным). Чтобы добиться этого, обратимся к рис. 23.17.

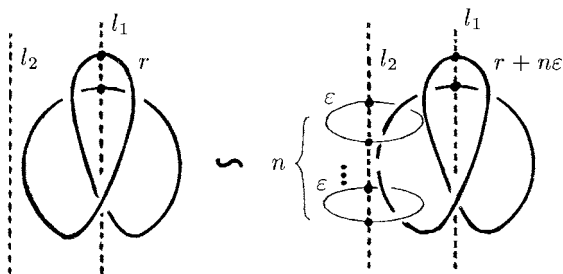
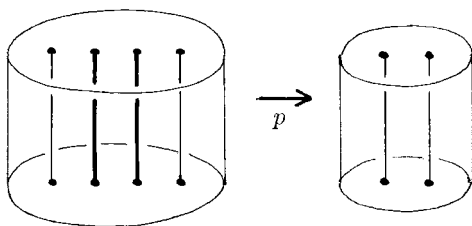


Рис. 23.17

Этот рисунок показывает, как тривиальный узел с оснащением  $r$  можно преобразовать в тот же самый тривиальный узел с оснащением  $r + n\varepsilon$ , где  $\varepsilon = \pm 1$  и  $n \geq 0$ . Выбрав подходящим образом числа  $n$  и  $\varepsilon$ , можно добиться выполнения равенства  $r + n\varepsilon = \pm 1$ . Таким образом, представленная на рис. 23.17 конструкция позволяет преобразовать незаузленную кривую с произвольным целочисленным оснащением к требуемому специальному виду.  $\square$

**23.9.** Подведем итоги. С помощью леммы 23.8 можно построить 3-листное разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с ветвлением над двукомпонентным зацеплением. В самом деле, мы начинали с двукомпонентного множества ветвления в базе  $S^3$  (рис. 23.9), а при последующих перестройках количество компонент множества ветвления не изменялось. Поэтому для завершения доказательства теоремы Хилдена–Монтесиноса остается сделать множество ветвления связным.

Напомним, что исходное 3-листное разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$  склеено из двух экземпляров прямого произведения на отрезок разветвленного накрытия из примера 23.5 (рис. 23.18).



**Рис. 23.18**

Можно считать, что все перестройки происходят в одном из этих экземпляров; второй экземпляр мы используем для того, чтобы сделать множество ветвления связным. Для этого применим гомеоморфизмы  $f$  и  $g$  из примера 23.5. С их помощью можно построить гомеоморфизмы  $f_1$  и  $g_1$ , каждый из которых отображает цилиндр в себя, а именно:  $f_1$  и  $g_1$

совпадают с  $f$  и  $g$  на верхних основаниях цилиндров и тождественны во всех остальных точках (рис. 23.19).

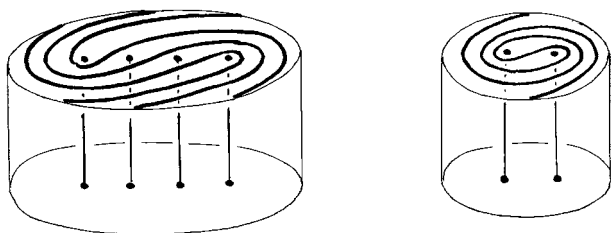


Рис. 23.19

Если мы вырежем диски, заключенные внутри этих цилиндров, а затем вклеим их обратно по гомеоморфизмам  $f_1$  и  $g_1$ , то мы не изменим ни базу, ни накрывающее многообразие накрытия  $p : M^3 \rightarrow S^3$ . Но так как гомеоморфизмы  $f_1$  и  $g_1$  являются закручиваниями на  $3\pi$  и  $\pi$  соответственно, то множество ветвления и его прообраз после перестройки будут выглядеть так, как показано на рис. 23.20. Множество ветвления при этом станет связным. Это завершает доказательство теоремы Хилдена–Монтесиноса.  $\square$

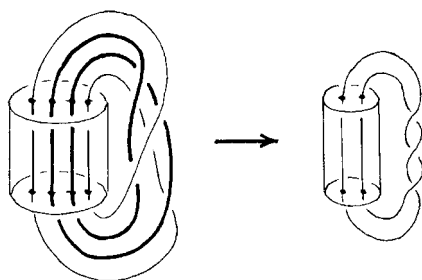


Рис. 23.20

*Замечание.* Вместо того чтобы приводить оснащенное зацепление, задающее  $M^3$ , к специальному виду, можно воспользоваться следующей теоремой.

**23.10. Теорема (Ликориш).** *Любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм сферы с  $g$  ручками на себя изотопен композиции скручиваний вдоль  $3g - 1$  кривых, изображенных на рис. 23.21.*

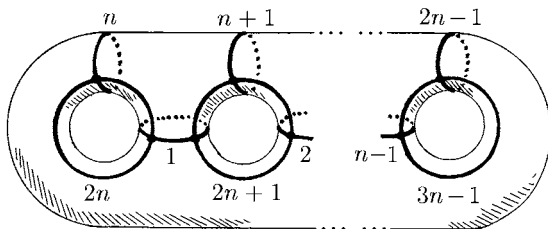


Рис. 23.21

Доказательство этой теоремы можно найти в [Lic2-3], [Bir1] или [MF].

Из теоремы 23.10 следует, что любое компактное ориентируемое многообразие  $M^3$  без края можно получить из  $S^3$  перестройкой по зацеплению, компоненты которого параллельны окружностям, изображенным на рис. 23.21. (Пример такого зацепления изображен на рис. 23.22.)

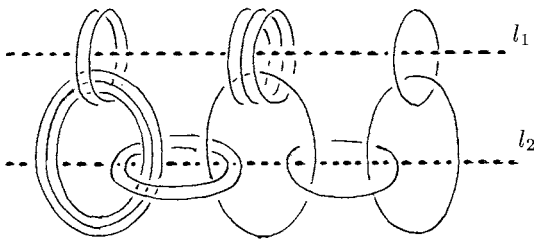


Рис. 23.22

Оснащения компонент равны при этом  $\pm 1$ , как и требуется. С помощью изотопии можно добиться, чтобы каждая из этих окружностей пересекала прямую  $l_1$  или  $l_2$  ровно в двух точках и была бы симметрична относительно этой прямой.



## §24. Разветвленные накрытия и крашенные диаграммы зацеплений

**24.1.** В этом параграфе мы обсудим способ задания разветвленных накрытий сферы  $S^3$  посредством зацеплений, представленных диаграммами, дуги которых «раскрашены», т.е. каждой дуге сопоставлен элемент группы подстановок  $S_n$ . Наш интерес к этому способу задания разветвленных накрытий связан с потребностями следующего параграфа, в котором будет доказано, что кольца Борромео — универсальное зацепление (т.е. любое многообразие  $M^3$  накрывает  $S^3$  с ветвлением над кольцами Борромео). Для доказательства этого утверждения нам понадобятся различные преобразования множества ветвления, не изменяющие накрываемое многообразие. Техника крашенных диаграмм позволяет получить все нужные для этих целей преобразования. Мы не будем пользоваться ни существованием, ни единственностью разветвленного накрытия, представленного крашеной диаграммой. Поэтому мы оставим в стороне ряд известных в этой области результатов.

**24.2. Правильные раскраски диаграмм.** Любому  $n$ -листному разветвленному накрытию  $p : M^3 \rightarrow S^3$  можно сопоставить гомоморфизм  $\tilde{p} : \pi_1(S^3 \setminus L, x_0) \rightarrow S_n$ , где  $L$  — множество ветвления,  $x_0 \in S^3 \setminus L$  — некоторая фиксированная точка,  $S_n$  — группа подстановок. Это делается следующим образом. Пусть  $y_1, \dots, y_n$  — прообразы точки  $x_0$ . Возьмем петлю  $\gamma$  в  $S^3 \setminus L$  с началом и концом в  $x_0$  и рассмотрим путь в  $M^3$  с началом в  $y_i$ , накрывающий петлю  $\gamma$ . Обозначим конец этого пути через  $\sigma_\gamma(y_i)$ . Таким образом, петле  $\gamma$  мы сопоставим подстановку  $\sigma_\gamma \in S_n$ . Ясно, что эта подстановка зависит лишь от гомотопического класса петли  $\gamma$  и построенное отображение  $\tilde{p} : \pi_1(S^3 \setminus L, x_0) \rightarrow S_n$  является гомоморфизмом групп.

Чтобы задать этот гомоморфизм, достаточно указать его значения на образующих группы  $\pi_1(S^3 \setminus L, x_0)$ . Предположим, что зацепление  $L$  представлено диаграммой, состоящей из  $k$  дуг. Тогда группа  $\pi_1(S^3 \setminus L, x_0)$  порождена  $k$  петлями такого вида, как на рис. 24.1 (а); эти петли удобно изображать так,

как показано на рис. 24.1 (b). Таким образом, если задана диаграмма множества ветвления накрытия  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с нарисованными на ней стрелками, ортогональными дугам, то дуги этой диаграммы можно «раскрасить» элементами группы  $S_n$  (элементы соответствуют цветам).

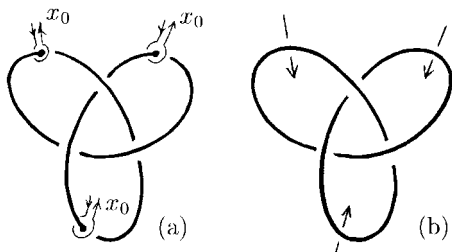


Рис. 24.1

Изменение направления стрелки соответствует изменению направления обхода петли, т.е. соответствует замене образующей  $a \in \pi_1(S^3 \setminus L, x_0)$  на элемент  $a^{-1}$ . Если же  $\tilde{p}(a) = \tilde{p}(a^{-1})$ , то нет необходимости указывать направление. Равенство  $\sigma = \sigma^{-1}$  выполняется, в частности, для транспозиции  $\sigma = (ij)$ . Дуге диаграммы зацепления  $L$  будет соответствовать транспозиция  $(ij)$  в том случае, когда при обходе точки  $X$  вокруг этой дуги прообраз точки  $X$  переходит с листа  $i$  на лист  $j$  и наоборот, а на всех остальных листах прообраз возвращается в исходное положение. Легко проверить, что 3-листное разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  из теоремы 23.1 обладает этим свойством. Следовательно, этому разветвленному накрытию соответствует диаграмма множества ветвления, раскрашенная в три цвета (12), (23), (13).

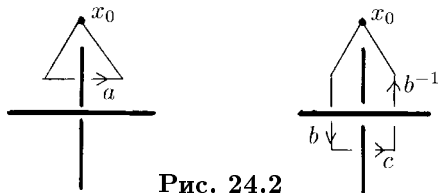


Рис. 24.2

В рассматриваемой ситуации раскраска диаграммы множества ветвления не произвольна, так как выбранные образующие группы  $\pi_1(S^3 \setminus L, x_0)$  удовлетворяют определенным соотношениям, а именно, для каждого перекрестка выполняется соотношение  $a = bcb^{-1}$  (рис. 24.2). Для диаграммы,

окрашенной в цвета (12), (23) и (31), это соотношение означает, что на каждом перекрестке сходятся либо дуги одного цвета, либо дуги всех трех разных цветов. В самом деле,  $(12)(13)(12)^{-1} = (23)$ .

Пусть дуги диаграммы зацепления раскрашены в три цвета (все точки одной и той же дуги окрашены одним цветом). Назовем такую раскраску *правильной*, если на каждом перекрестке сходятся либо дуги одного цвета, либо дуги трех разных цветов. В том случае, когда в качестве цветов используются элементы группы подстановок  $S_n$  и каждая дуга помечена стрелкой, указывающей направление обхода образующей фундаментальной группы, раскраску назовем *правильной*, если на каждом перекрестке для цветов выполняется соотношение  $a = bcb^{-1}$ .

**Задача 24.1.** Докажите, что количество правильных раскрасок диаграммы зацепления в три цвета не изменяется при преобразованиях Рейдемейстера. Примените этот инвариант для доказательства того, что узел трилистник нетривиален.

**24.3. Допустимые преобразования.** Теперь можно непосредственно обратиться к изучению преобразований диаграмм множества ветвления накрытия  $p : M^3 \rightarrow S^3$ . Предположим, что диаграмма множества ветвления накрытия  $p$  правильно раскрашена. Рассмотрим преобразование разветвленного накрытия, которое переводит  $p$  в разветвленное накрытие с тем же самым накрываемым многообразием  $M^3$ , но с другой правильно раскрашенной диаграммой множества ветвления. Такие преобразования крашенных диаграмм множества ветвления будем называть *допустимыми*. В оставшейся части этого параграфа мы опишем несколько допустимых преобразований, которых будет достаточно для целей §25.

**Задача 24.2.** Докажите, что плоские изотопии и преобразованию Рейдемейстера являются допустимыми преобразованиями.

**24.4.** Помимо преобразований Рейдемейстера есть и другие допустимые преобразования. Например, в §23, для того чтобы сделать множество ветвления связным, мы использо-

вали преобразование, изображенное на рис. 24.3. В §23 показано, что это преобразование допустимое.

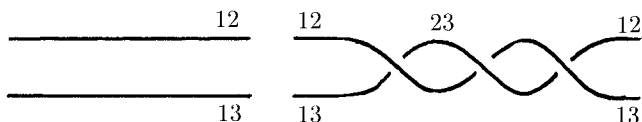


Рис. 24.3

Напомним, что это преобразование основано на том, что скручивание основания цилиндра в  $S^3$  на  $3\pi$  приводит к скручиванию основания цилиндра в  $M^3$  на  $\pi$ .

**Задача 24.3.** Докажите, что преобразования множества ветвления 3-листного разветвленного накрытия  $p: M^3 \rightarrow S^3$ , изображенные на рис. 24.4, допустимы.

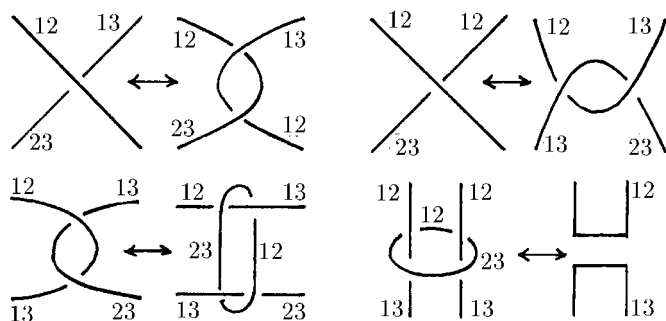


Рис. 24.4

**24.5.** Для  $n$ -листного разветвленного накрытия в том случае, когда числа  $i, j, k$  попарно различны, допустимо преобразование, изображенное на рис. 24.5.

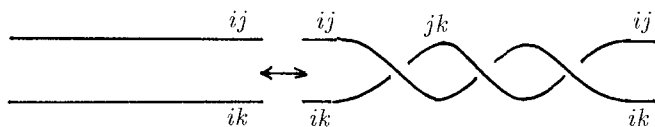
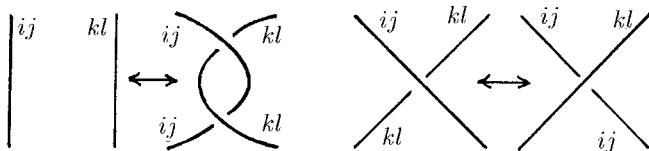


Рис. 24.5

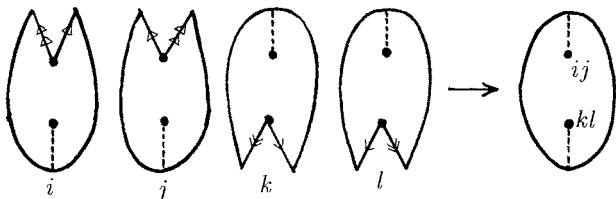
Доказательство этого утверждения почти такое же, как и для 3-листных накрытий. В самом деле, прообраз (при рассматриваемом  $n$ -листном накрытии) диска  $D^3$ , вырезаемого из базы, состоит из диска  $D_1^3$ , расположенного на листах с номерами  $i, j$  и  $k$ , и нескольких других дисков, каждый из которых целиком лежит на одном из других листов. Диск  $D_1^3$  3-листно накрывает  $D^3$ , а остальные диски отображаются на  $D^3$  гомеоморфно. Поэтому для дисков обоих типов существуют накрывающие гомеоморфизмы. Применяя лемму 23.2, получим новое разветвленное накрытие с тем же самым накрывающим многообразием.

**24.6.** Рассмотрим теперь аналогичное преобразование для параллельных нитей, окрашенных цветами  $(i, j)$  и  $(k, l)$ , где числа  $i, j, k, l$  попарно различны. Покажем, что преобразования, изображенные на рис. 24.6, допустимы. (Легко проверить, что эти преобразования эквивалентны в том смысле, что они получаются друг из друга посредством преобразований Рейдемейстера.)



**Рис. 24.6**

Прежде всего отметим, что раскраска диаграмм на рис. 24.6 правильная, так как  $(ij)(kl) = (kl)(ij)$  в том случае, когда числа  $i, j, k, l$  попарно различны. Накрытие круга с двумя точками ветвления, окрашенными в цвета  $(ij)$  и  $(kl)$ , представлено на рис. 24.7.



**Рис. 24.7**

Если мы умножим это накрытие на отрезок  $[0, 1]$ , то увидим, что интересующая нас часть прообраза, вырезаемого из базы цилиндра устроена так, как показано на рис. 24.8 (на остальных компонентах прообраза отображение  $p$  гомеоморфно). Для каждой из двух компонент прообраза, изображенных на этом рисунке, можно построить накрывающий гомеоморфизм с помощью гомеоморфизмов  $f$  и  $g$  из примера 23.4. При этом в базе  $S^3$  происходит перестройка, заключающаяся в закручивании основания цилиндра на  $2\pi$ . Допустимость преобразования диаграмм следует из леммы 23.2.

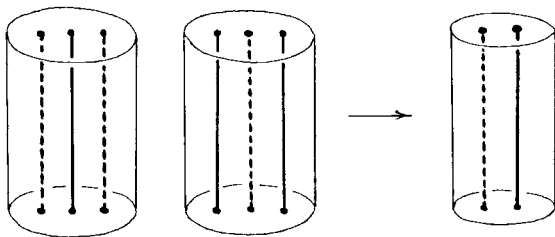


Рис. 24.8

**24.7.** Последнее допустимое преобразование, которое мы обсудим, называется *добавление тривиального листа*. Мы сначала опишем его строение глобально (для многообразий), а затем посмотрим, как это преобразование действует на множество ветвления. Рассмотрим  $n$ -листное разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$ . На рис. 24.9 заштрихована область, в которой лежит множество ветвления; заштрихован также прообраз этой области.

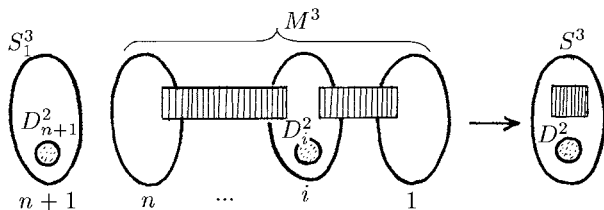


Рис. 24.9

Рассмотрим несвязную сумму  $M^3$  и сферы  $S_1^3$ , которая тождественно отображается на базу  $S^3$ . Иными словами, к  $M^3$  добавляем  $S_1^3$  в качестве  $(n + 1)$ -го листа. Чтобы получить  $(n + 1)$ -листное разветвленное накрытие со связным накрывающим многообразием, поступим следующим образом. Выберем в базе  $S^3$  круг  $D^2$ , лежащий в незаштрихованной области, и рассмотрим компоненты  $D_i^2$  и  $D_{n+1}^2$  его прообраза, лежащие в  $i$ -м и  $(n + 1)$ -м листах. Разрежем  $i$ -й и  $(n + 1)$ -й листы по кругам  $D_i^2$  и  $D_{n+1}^2$ , а затем склеим возникшие при этом края так, как показано на рис. 24.10.

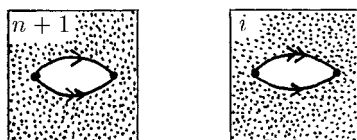


Рис. 24.10

С топологической точки зрения эта операция заключается в том, что  $M^3$  разрезается по некоторому двумерному диску, а затем к полученной при этом разрезе граничной двумерной сфере приклеивается трехмерный диск. Ясно, что полученное в результате многообразие  $M_1^3$  гомеоморфно исходному многообразию  $M^3$ . Для многообразия  $M_1^3$  естественным образом определяется  $(n + 1)$ -листное разветвленное накрытие  $p_1 : M_1^3 \rightarrow S^3$ . В окрестности любой точки граничной окружности круга  $D_i^2$  или  $D_{n+1}^2$  отображение  $p_1$  является 2-листным разветвленным накрытием; оно устроено так, как показано на рис. 24.11.

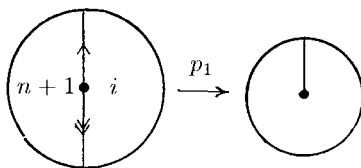


Рис. 24.11

Таким образом, соответствующее преобразование крашенной диаграммы множества ветвления заключается в том, что

к первоначальному множеству ветвления  $L$  добавляется незаузленная кривая цвета  $(i, n + 1)$ , которую можно отделить сферой от остальных компонент зацепления  $L$ . Схематично эта операция изображена на рис. 24.12.

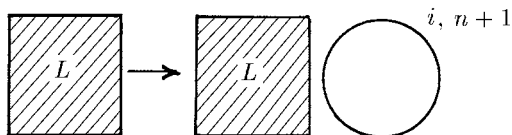


Рис. 24.12

На этом мы закончим изучение допустимых преобразований крашенных диаграмм множества ветвления.

## §25. Кольца Борромео — универсальное зацепление

**25.1.** Назовем подкомплекс  $C$  в сфере  $S^3$  *универсальным*, если для любого компактного ориентируемого многообразия  $M^3$  без края существует разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с множеством ветвления  $C$ .

Мы уже доказали, что ребра тетраэдра образуют универсальный подкомплекс (теорема 22.3). Но этот подкомплекс не является подмногообразием. В этом параграфе мы приведем пример универсального подмногообразия, а именно, мы докажем следующее утверждение.

**25.2. Теорема.** *Кольца Борромео — универсальное зацепление.*

Доказательство этой теоремы займет всю оставшуюся часть этого параграфа. Общая стратегия доказательства следующая. Пусть задано многообразие  $M^3$ . Прежде всего мы воспользуемся теоремой Хилдена–Монтесиноса (23.1), чтобы получить 3-листное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с ветвлением над некоторым зацеплением  $L$ . Это зацепление мы представим крашенной диаграммой (см. 24.2). После этого, за пять шагов,



мы посредством допустимых преобразований сначала увеличим число компонент зацепления, чтобы сделать его более однородным (шаги 1–4), а затем упростим зацепление и превратим его в кольца Борромео (шаг 5).

**25.3. Шаг 1. Превращение  $L$  в косу.** В силу теоремы Александера о замыкании кос (теорема 6.5) можно считать, что множество ветвления  $L \subset S^3$  представлено в виде замыкания косы. Раскраска диаграммы зацепления  $L$  индуцирует раскраску диаграммы этой косы. Диаграмма зацепления  $L$  не может быть одноцветной, потому что для диаграммы цвета  $(ij)$  разветвленное 3-листное накрытие распадается на 2-листное и 1-листное.

Более того, можно считать, что на каждом перекрестке диаграммы косы, представляющей зацепление  $L$ , встречаются дуги всех трех цветов. В самом деле, от одноцветных перекрестков можно избавиться с помощью изотопии, изображенной на рис. 25.1.

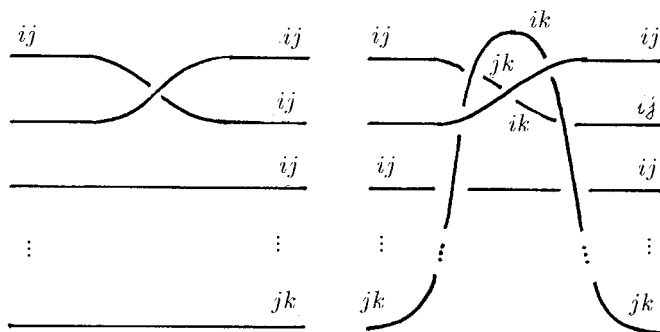


Рис. 25.1

При этом нужно лишь позаботиться о том, чтобы нить цвета  $(jk)$  не проходила над другими нитями того же цвета. Но этого можно добиться, взяв ближайшую к рассматриваемому перекрестку нить цвета  $(jk)$ .

**25.4. Шаг 2. Превращение всех перекрестков в положительные.** Теперь нам понадобится допустимое преобразова-

ние, изображенное на рис. 25.2 (вспомните рис. 24.4 и задачу 24.3).

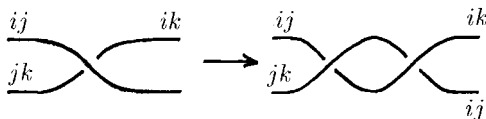


Рис. 25.2

С помощью преобразования, изображенного на рис. 25.2, все перекрестки косы можно сделать положительными, т.е. такими, как на рис. 25.3 (а), а не отрицательными, как на рис. 25.3 (б). В самом деле, указанное преобразование заменяет один отрицательный перекресток на два положительных. При этом свойство разноцветности перекрестков, полученное на первом шаге, не нарушается.

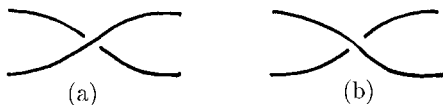


Рис. 25.3

**25.5. Шаг 3. Тривиализация косы.** Этот шаг состоит из преобразований, изображенных на рис. 25.4 (а)–(ф).

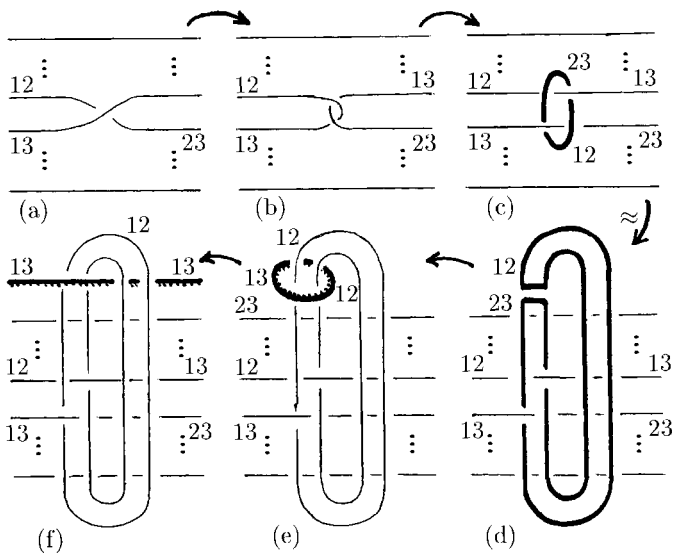


Рис. 25.4

Для перехода от (a) к (b) и (c), а также для перехода от (d) к (e), нужно воспользоваться результатом задачи 24.3. Переход от (b) к (c) заключается в изотопии выделенной окружности. Окружность, выделенная на рис. (e) превращается в дополнительную нить косы (рис. (f)). Отметим, что в дальнейшем при превращении окружности в дополнительную нить косы выделенную окружность нужно двигать так, чтобы она проходила *под* большими окружностями, появившимися на предыдущих шагах (рис. 25.5).

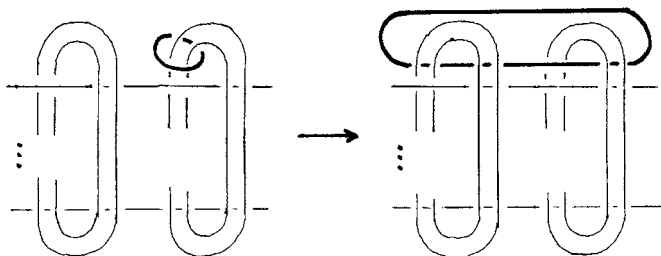


Рис. 25.5

Когда все  $q$  перекрестков косы будут таким образом уничтожены, мы получим  $2q$  больших окружностей, надетых на параллельные нити тривиальной косы, как это показано на рис. 25.6. Обратите внимание, что правая половина окружности будет расположена *над* нитями тривиальной косы.

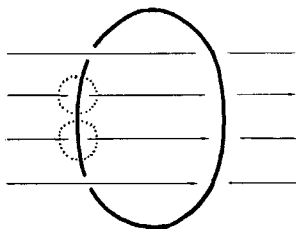


Рис. 25.6

**25.6. Шаг 4. Переход к симметричному зацеплению на торе.** Сделаем теперь допустимые преобразования так, чтобы левая половина большой окружности оказалась распо-

женной *под* нитями тривиальной косы. Для этого нужно изменить типы перекрестков, обведенных на рис. 25.6 пунктирными окружностями. Эти изменения типов перекрестков можно сделать с помощью операции добавления тривиального листа (см. 24.7) и допустимого преобразования, изображенного на рис. 25.7 (здесь числа  $i, j, k, l$  должны быть попарно различны). Перекресток, тип которого нужно изменить, может быть либо одноцветным, либо содержащим дуги всех трех цветов.

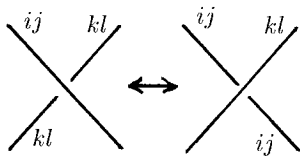


Рис. 25.7

Для трехцветного перекрестка требуемые преобразования изображены на рис. 25.8. Сначала мы добавляем тривиальный лист, т.е. добавляем маленькую окружность цвета  $(i, l)$ . Затем делаем преобразования Рейдемейстера, а в конце делаем допустимое преобразование, изображенное на рис. 25.7.

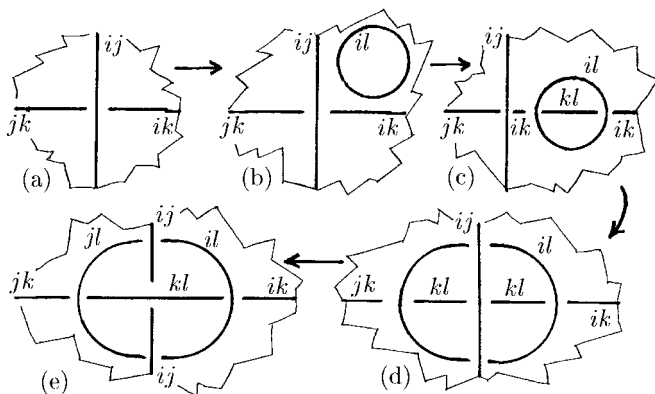


Рис. 25.8

Для одноцветного перекрестка аналогичное добавление тривиального листа привело бы к перекрестку с дугами цве-

тов  $(i, j)$ ,  $(i, l)$  и  $(j, l)$ . Но преобразование, изображенное на рис. 25.7 можно применить лишь к перекрестку с дугами цветов  $(i, j)$ ,  $(k, l)$  и  $(k, l)$ , где числа  $i, j, k, l$  попарно различны. Поэтому его нельзя будет применить к полученному перекрестку. Чтобы получить перекресток с нужной раскраской, придется добавить два тривиальных листа. Для этого можно дважды использовать одну и ту же окружность (рис. 25.9 (b)). Она будет иметь цвет  $(i, l)(j, l + 1)$ .

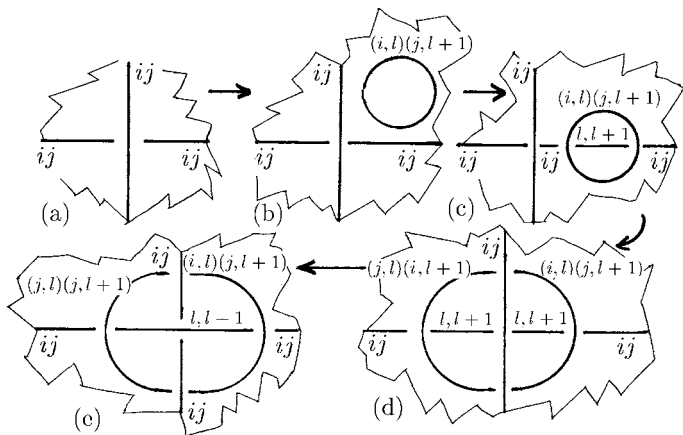


Рис. 25.9

Затем мы сделаем преобразования, изображенные на рис. 25.9 (c)–(e). Изменения раскраски диаграммы при преобразованиях Рейдемейстера определяются следующими соотношениями в группе подстановок:

$$(i, l)(j, l + 1)(i, j)(i, l)(j, l + 1) = (l, l + 1),$$

$$(i, j)(i, l)(j, l + 1)(i, j) = (j, l)(i, l + 1).$$

Когда мы с помощью этих преобразований сделаем все нужные изменения типов перекрестков, множество ветвления будет выглядеть так, как показано на рис. 25.10. На этом рисунке нити тривиальной косы служат параллелями тора, большие окружности, возникшие на шаге 3, служат меридианами тора, а маленькие окружности, охватывающие перекрестки,

появились после замены типов перекрестков. При этом мы подразумеваем, что некоторые из этих маленьких окружностей могут и не входить в множество ветвления (вспомните, что на рис. 25.6 не все перекрестки были отмечены пунктирными окружностями).

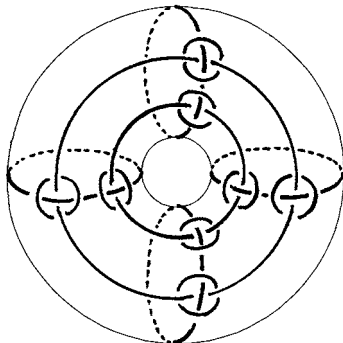


Рис. 25.10

**25.7. Шаг 5. Последние упрощения.** Прежде всего напомним, как устроено циклическое  $n$ -листное разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$ . Сферу  $S^3$  можно представить как  $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ . отождествим точки, которые получаются друг из друга поворотом на угол  $2\pi/n$  вокруг оси  $l$ . В результате получим  $n$ -листное разветвленное накрытие  $p : S^3 \rightarrow S^3$ , которое называют циклическим. Множеством ветвления накрытия  $p$  служит окружность  $l \cup \infty$  цвета  $(12 \dots n)$ .

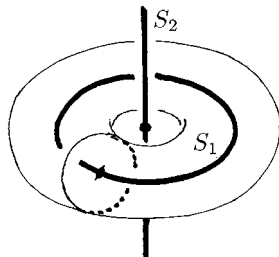


Рис. 25.11

Пусть  $p_1$  и  $p_2$  — циклические накрытия с ветвлением над центральной окружностью  $S_1$  полнотория и над центральной

окружностью  $S_2$  дополнительного полнотория (рис. 25.11). Количество листов накрытий  $p_1$  и  $p_2$  пусть будет равно соответственно количеству параллелей и количеству меридианов, входящих в множество ветвления, которое получено после шага 4 (рис. 25.10).

Можно считать, что эти параллели и меридианы расположены на торе симметрично. Тогда множество ветвления композиции отображений

$$M^3 \xrightarrow{p} S^3 \xrightarrow{p_1} S^3 \xrightarrow{p_2} S^3$$

будет выглядеть так, как показано на рис. 25.12 (а). С помощью последовательных изотопий это зацепление можно преобразовать в зацепление, изображенное на рис. 25.12 (d).

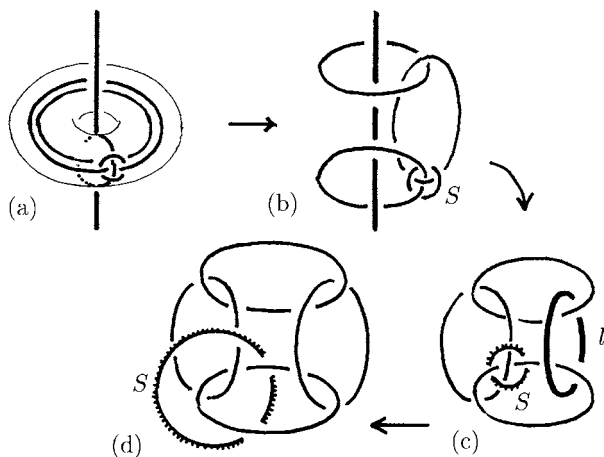


Рис. 25.12

Компоненту, обозначенную на рис. 25.12 (d) буквой  $S$ , можно выбрать в качестве оси симметрии и относительно этой оси симметрии построить 2-листное циклическое разветвленное накрытие  $p_3 : S^3 \rightarrow S^3$ . Тогда множество ветвления композиции отображений

$$M^3 \xrightarrow{p} S^3 \xrightarrow{p_1} S^3 \xrightarrow{p_2} S^3 \xrightarrow{p_3} S^3$$

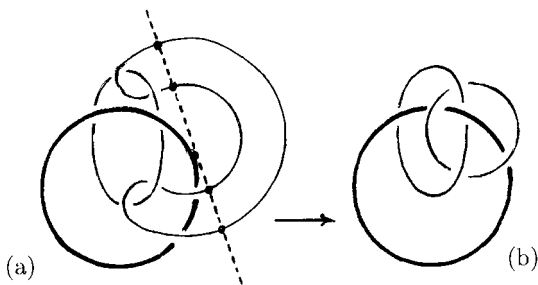


Рис. 25.13

будет выглядеть так, как показано на рис. 25.13(a). Легко проверить, что получено не что иное, как кольца Борромео (рис. 25.13(b)).  $\square$

## Комментарии

Вторая половина этой главы посвящена работам Монте-синоса (J.M. Montesinos) и Хилдена (H.M. Hilden). Их первоначальные доказательства были технически весьма сложны. Но впоследствии они совместно со своими сотрудниками добились существенного упрощения и прояснения этих доказательств. В частности, наше изложение красивой теоремы о том, что кольца Борромео  $B$  — универсальное зацепление (т.е. любое  $M^3$  покрывает  $S^3$  с ветвлением над  $B$ ), следует статье [HLMW](1987).

Построение разветвленных накрытий трехмерных многообразий обобщает и использует разветвленные накрытия двумерных поверхностей. Последняя тема появилась в 19 в. в комплексном анализе, но по своей природе она в значительной мере относится к топологии. Мы не смогли удержаться от искушения обсудить эту изумительную тему более подробно, чем это необходимо непосредственно для целей трехмерной топологии. Следует отметить, что первые важные результаты о разветвленных накрытиях трехмерных многообразий были получены Александером.

Наше изложение теории разветвленных накрытий трехмерных многообразий далеко не полно. Например, мы не включи-



ли интересные результаты о том, что узел восьмерка универсален ([HLM], 1983), а узел трилистник не универсален ([GH], 1972). Что же касается приложений этой теории, то мы не включили новое доказательство того, что любое компактное ориентируемое трехмерное многообразие без края параллелизуемо ([HMT], 1976).

Материал этой главы не используется в оставшейся части книги. Мы, однако, включили его не только из эстетических соображений, но и потому, что эта область сейчас активно развивается и в ней есть интересные нерешенные проблемы.

## Глава VIII

# Skein-инварианты трехмерных многообразий

Известно много разных инвариантов трехмерных многообразий. Классическими примерами инвариантов являются гомотопические группы и группы гомологий, а также различные числовые характеристики, происходящие из них (например, числа Бетти или эйлерова характеристика). В этой главе мы представим открытые совсем недавно комплекснозначные инварианты, основанные на представлении трехмерных многообразий посредством перестроек по оснащенным зацеплениям и на skein-алгебрах, происходящих из введенного в § 3 полинома Кауфмана. Основная идея этой конструкции весьма проста и естественна: нужно представить данное многообразие  $M^3$  посредством оснащенного зацепления в сфере  $S^3$ , а затем нужно определить комплексное число  $W(M^3)$  так, чтобы оно было инвариантно одновременно относительно преобразований Рейдемейстера и преобразований Кирби. К сожалению, реализация этой программы оказывается весьма сложной: определение числа  $W(M^3)$  появится лишь в самом конце этой главы, в § 29. При восхождении к этому определению нам придется доказать необходимые свойства вспомогательных объектов, которые встретятся по дороге.

Инвариант обозначается  $W$  в честь Виттена (E. Witten), хотя его первоначальное определение было основано на совершенно ином подходе, возникшем из квантовой теории поля, и

это определение было дано лишь «на физическом уровне строгости». (Более подробные сведения об истории этого инварианта можно найти в комментариях в конце главы и в § 32.)

## §26. Алгебра Темперли–Либа и другие skein-алгебры

**26.1.** Алгебра Темперли–Либа относится к классическим объектам теории операторных алгебр. Она во многом схожа с алгеброй Гекке. Однако в этой главе она предстает в другом облике, как одна из так называемых skein-алгебр. Последние, грубо говоря, являются алгебрами, которые получаются при факторизации пространства линейных комбинаций некоторых диаграмм по соотношениям, с помощью которых в § 3 определялся полином Кауфмана (прежде всего мы имеем в виду соотношение типа Конвея (1) на с. 35 — skein relation). Их роль в нашем изложении связана с тем, что они позволяют обеспечить инвариантность относительно преобразований Рейдемейстера тех объектов, которые строятся с их помощью. (Читатель, вероятно, помнит, что полином Кауфмана инвариантен относительно  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , но не инвариантен относительно  $\Omega_1$ .)

**26.2. Skein-пространство  $S$ .** Многообразию  $M^3$  мы представим посредством оснащенного зацепления в  $S^3$ . Оснащения компонент нам будет удобно задавать тем способом, который описан в конце §19. Напомним, в чем он заключается. Расположим полоски, задающие оснащенное зацепление, так, чтобы они плотно прилегали к плоскости диаграммы (заменяя закручивания петельками, как и в трюке с ремнем). После этого вместо полоски можно взять любой из ее краев и рассмотреть его проекцию на плоскость диаграммы. В результате получим диаграмму зацепления, которая содержит всю необходимую информацию об оснащениях компонент (эта информация закодирована посредством петелек). Многообразие  $M^3$ , представленное этим оснащенным зацеплением, не изменяется при преобразованиях Рейдемейстера

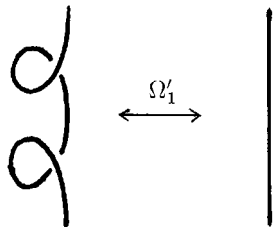


Рис. 26.1

$\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , а также при двойном скручивании петельки  $\Omega'_1$  (рис. 26.1).

В §3 мы сопоставили каждой диаграмме  $D$  зацепления  $L$  полином  $\langle D \rangle$  от переменных  $a$  и  $a^{-1}$ . Это полином инвариантен относительно преобразований  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  и удовлетворяет следующим соотношениям:

- (1)  $\langle \text{X} \rangle = a \langle \text{Y} \rangle + a^{-1} \langle \text{Z} \rangle$ ;
- (2)  $\langle D \cup \text{O} \rangle = (-a^{-2} - a^2) \langle D \rangle$ ;
- (3)  $\langle \text{O} \rangle = 1$ .

Для фиксированного комплексного числа  $a = a_0 \in \mathbb{C}$  значение полинома  $\langle D \rangle$  можно вычислить следующим образом. Рассмотрим множество  $\{D_i\}$  попарно не изотопных диаграмм зацеплений. Пусть  $V$  — линейное пространство над  $\mathbb{C}$ , состоящее из конечных линейных комбинаций диаграмм  $D_i$ . В пространстве  $V$  рассмотрим подпространство  $V_0$ , порожденное векторами вида

$$\left\{ \langle \text{X} \rangle - a_0 \langle \text{Y} \rangle - a_0^{-1} \langle \text{Z} \rangle, \quad D \cup \text{O} + (a_0^{-2} + a_0^2) D \right\}$$

(диаграмму  $D$  мы рассматриваем как вектор  $1 \cdot D \in V$ ). Положим  $S = V/V_0$ . Пространство  $S$  называют *skein-пространством*. При естественной проекции  $p: V \rightarrow V/V_0 = S$  элемент  $D$  переходит в  $\lambda e_1$ , где  $\lambda$  — значение многочлена  $\langle D \rangle$  в точке  $a_0$ , а  $e_1$  — образ в  $S$  диаграммы, состоящей из одной окружности. В самом деле, пусть  $E_i$  — диаграмма, состоящая из  $i$  попарно не пересекающихся окружностей.

Из доказательства теоремы существования и единственности полинома  $\langle D \rangle$  (см. 3.4) следует, что

$$D = \sum \lambda_i E_i + w_1 \quad \text{и} \quad \sum \lambda_i E_i = \lambda E_1 + w_2,$$

где  $w_1, w_2 \in V_0$ , а  $\lambda$  — значения полинома  $\langle D \rangle$  в точке  $a_0$ .

Отметим, что образ любой диаграммы при естественной проекции порождает  $S$ , поэтому  $\dim S = 1$ , т.е.  $S \cong \mathbb{C}$ .

Пусть теперь  $e$  — любой ненулевой элемент пространства  $S$ . Тогда  $p(D) = f(D)e$ , где  $f(D) \in \mathbb{C}$ . В качестве  $e$  удобно выбрать элемент  $e_0$ , соответствующий пустой диаграмме. При таком выборе базисного элемента будет выполняться следующее мультипликативное соотношение:

$$f(D_1 \cup D_2) = f(D_1)f(D_2). \tag{26.1}$$

В самом деле, пусть  $D_1 = \sum \lambda_i E_i + w_1$  и  $D_2 = \sum \mu_j E_j + w_2$ , где  $w_1, w_2 \in V_0$ . Для неотрицательных целых чисел  $m$  и  $n$  выполняется соотношение  $mE_s \cup nE_t = E_{ms} \cup E_{nt} = E_{ms+nt}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} p(D_1 \cup D_2) &= p\left(\left(\sum_i \lambda_i E_i\right) \cup \left(\sum_j \mu_j E_j\right)\right) = \\ &= p\left(\sum_{i,j} E_{i\lambda_i+j\mu_j}\right) = \left(\sum_{i,j} (c^i)^{\lambda_i} (c^j)^{\mu_j}\right) e_0, \end{aligned}$$

где  $c = (-a_0^2 - a_0^{-2})$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} f(D_1 \cup D_2) &= \sum_{i,j} (c^i)^{\lambda_i} \times (c^j)^{\mu_j} = \\ &= \sum_i (c^i)^{\lambda_i} \times \sum_j (c^j)^{\mu_j} = f(D_1)f(D_2), \end{aligned}$$

что и доказывает соотношение (26.1).

**26.3.** Конструкция пространства  $S$  допускает следующее обобщение. Пусть  $F$  — ориентируемая двумерная поверхность с краем  $\partial F$  (возможно, край пуст, т.е.  $\partial F = \emptyset$ ). Отметим  $2n$  точек края (если  $\partial F = \emptyset$ , то  $n = 0$ ). Будем рассматривать *диаграммы* на поверхности  $F$ , для которых пересечение

с  $\partial F$  состоит в точности из  $2n$  отмеченных точек (рис. 26.2). Фиксируем число  $a_0 \in \mathbb{C}$  и рассмотрим векторное пространство  $V(F, 2n)$  над  $\mathbb{C}$ , состоящее из конечных линейных комбинаций изотопических классов диаграмм. Пусть  $V_0(F, 2n)$  — подпространство в  $V(F, 2n)$ , порожденное векторами вида

$$\left\{ \left( \bigotimes - a_0 \bigvee - a_0^{-1} \bigwedge \right), D \cup \bigcirc + (a_0^{-2} + a_0^2) D \right\}.$$

Положим  $S(F, 2n) = V(F, 2n)/V_0(F, 2n)$ . Для краткости пространство  $S(F, 0)$  будем обозначать  $S(F)$ .

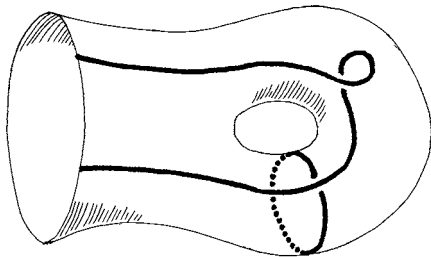


Рис. 26.2

*Замечание.* Предположение об ориентируемости поверхности  $F$  существенно потому, что на неориентируемой поверхности нельзя различить перекрестки типов  $\bigotimes$  и  $\bigotimes$ . Поэтому нельзя однозначно определить, перед какой диаграммой нужно ставить коэффициент  $a_0$ , а перед какой —  $a_0^{-1}$ .

**26.4. Теорема.** *Образ  $p(D)$  диаграммы  $D$  при естественной проекции на пространство  $S(F, 2n)$  инвариантен относительно двойного закручивания петельки  $\Omega'_1$  и относительно второго и третьего преобразований Рейдемейстера  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ .*

*Доказательство.* Если  $w \in V_0$ , то  $p(w) = 0$ . Поэтому

$$p\left(\bigotimes\right) = a_0 p\left(\bigvee\right) + a_0^{-1} p\left(\bigwedge\right), \quad (26.2)$$

$$p(D \cup \bigcirc) = -(a_0^{-2} + a_0^2) p(D). \quad (26.3)$$

В §3 было показано (см. 3.1), что из (26.2) и (26.3) следуют соотношения

$$\begin{aligned}
 p(\text{Diagram 1}) &= p(\text{Diagram 2}); & p(\text{Diagram 3}) &= p(\text{Diagram 4}); \\
 p(\text{Diagram 5}) &= -a_0^3 p(\text{Diagram 6}); & p(\text{Diagram 7}) &= -a_0^{-3} p(\text{Diagram 8}).
 \end{aligned}$$

Первые два соотношения означают инвариантность относительно  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ , а из двух последних соотношений следует инвариантность относительно  $\Omega'_1$ . В самом деле,

$$p(\text{Diagram 9}) = -a_0^3 p(\text{Diagram 10}) = p(\text{Diagram 11}),$$

так как  $(-a_0^{-3})(-a_0^3) = 1$ .  $\square$

**26.5. Теорема.** *Базис пространства  $S(F, 2n)$  состоит из образов при естественной проекции всех изотопических классов диаграмм  $D_i$ , которые не содержат ни перекрестков, ни стягиваемых замкнутых кривых.*

*Доказательство.* Соотношение (26.2) позволяет представить образ любой диаграммы в  $S(F, 2n)$  в виде линейной комбинации образов диаграмм без перекрестков. Соотношение (26.3) позволяет представить образ диаграммы без перекрестков в виде  $\lambda e_i$ , где  $e_i$  — образ диаграммы  $D_i$  при естественной проекции. Следовательно, векторы  $e_i$  порождают пространство  $S(F, 2n)$ .

Остается доказать, что векторы  $e_i$  линейно независимы. Напомним, что формулы (26.2) и (26.3) можно применять в любом порядке, т.е. представление образа диаграммы  $D$  в  $S(F, 2n)$  в виде линейной комбинации векторов  $e_i$  не зависит от того, в каком порядке мы уничтожаем перекрестки и стягиваемые замкнутые кривые (см. доказательство теоремы 3.4). Таким образом, каждой диаграмме  $D$  однозначно сопоставляется конечная сумма  $\sum \lambda_i D_i$ . Это сопоставление индуцирует линейное отображение  $f : V \rightarrow S'$ , где  $S'$  — множество всех конечных линейных комбинаций векторов  $D_i$ . Ясно также, что  $f(V_0) = 0$ . Поэтому  $f$  индуцирует линейное отображение  $\tilde{f} : V/V_0 \rightarrow S'$ , причем  $\tilde{f}(e_i) = \tilde{f}(D_i) = D_i$ . Элементы  $e_1, e_2, \dots$  при линейном отображении  $f$  переходят

в базисные элементы пространства  $S'$ , поэтому они должны быть линейно независимы.  $\square$

Рассмотрим теперь простейшие примеры пространств  $S(F, 2n)$ .

**26.6. Предложение.**  $S(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}$ .

*Доказательство.* По определению пространство  $S(\mathbb{R}^2)$  совпадает со skein-пространством  $S$ , про которое мы уже выяснили, что оно одномерно.  $\square$

**26.7. Предложение.**  $S(S^2) \cong S(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}$ .

*Доказательство.* Представим сферу  $S^2$  как  $\mathbb{R}^2 \cup \infty$ . Каждой диаграмме на  $S^2$ , не проходящей через точку  $\infty$ , можно сопоставить диаграмму на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . В любом изотопическом классе диаграмм на  $S^2$  существует диаграмма, не проходящая через точку  $\infty$ . Поэтому мы получаем некоторое соответствие между изотопическими классами диаграмм на сфере  $S^2$  и изотопическими классами диаграмм на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Любому классу плоских диаграмм соответствует ровно один класс сферических диаграмм, но одному классу диаграмм на сфере могут соответствовать несколько классов плоских диаграмм. Покажем, однако, что при переходе к факторпространствам  $S(\mathbb{R}^2)$  и  $S(S^2)$  соответствие становится взаимно однозначным.

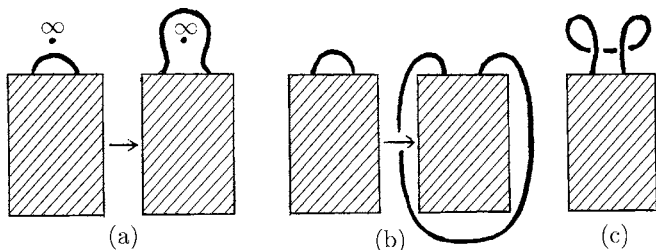


Рис. 26.3

Прежде всего покажем, что изотопным диаграммам на  $S^2$  соответствует один и тот же элемент пространства  $S(S^2)$ . Для этого достаточно проверить, что «перебрасывание нити диаграммы через бесконечность» (рис. 26.3 (а)); вспомните трюк на сфере из § 2) не изменяет образ диаграммы в



$S(\mathbb{R}^2)$ . На плоскости  $\mathbb{R}^2$  это преобразование выглядит так, как показано на рис. 26.3 (b). С помощью второго и третьего преобразований Рейдемейстера от полученной при таком преобразовании диаграммы можно перейти к диаграмме, изображенной на рис. 26.3 (c). А эту диаграмму можно преобразовать в исходную диаграмму преобразованием  $\Omega'_1$ . Все эти преобразования не изменяют соответствующий элемент пространства  $S(\mathbb{R}^2)$ .

Используя тот факт, что изотопным диаграммам на сфере  $S^2$  соответствует один и тот же элемент пространства  $S(\mathbb{R}^2)$ , нетрудно показать, что  $S(S^2) \cong S(\mathbb{R}^2)$ . В самом деле, соотношения (26.2) и (26.3) для диаграмм на  $S^2$  и диаграмм на  $\mathbb{R}^2$  отличаются лишь тем, что замкнутую кривую  $C$  на  $S^2$ , охватывающую точку  $\infty$  (рис. 26.4 (a)), можно стянуть в точку по закрашенной области, а на плоскости так поступить нельзя. Но кривую  $C$  можно заменить на изотопную ей кривую (сняв ее с точки  $\infty$ ), которую можно стянуть на плоскости по соответствующей закрашенной области (рис. 26.4 (b)).

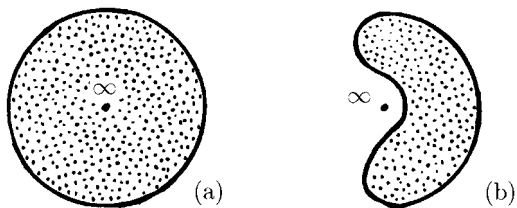


Рис. 26.4

**26.8. Предложение.** *Пространство  $S(I \times S^1)$  имеет естественную структуру алгебры над полем  $\mathbb{C}$ . Эта алгебра изоморфна  $\mathbb{C}[\alpha]$  (алгебра многочленов над  $\mathbb{C}$  от одной переменной  $\alpha$ ).*

*Доказательство.* Согласно теореме 26.5, в качестве базиса пространства  $S(I \times S^1)$  можно взять семейство диаграмм, каждая из которых состоит из  $n$  окружностей, параллельных основаниям цилиндра  $I \times S^1$ ; здесь  $n = 0, 1, 2, \dots$  (для  $n = 2$  см. рис. 26.5 (a)).

Определим произведение двух диаграмм следующим образом. Склеим верхнее основание одного цилиндра с нижним

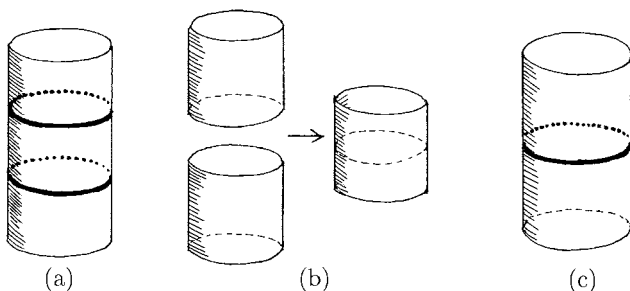


Рис. 26.5

основанием другого цилиндра, а затем полученный цилиндр сожмем в два раза по высоте (рис. 26.5 (b)). Эта операция снабжает пространство  $S(I \times S^1)$  структурой алгебры над  $\mathbb{C}$ .

Пусть  $\alpha$  — образ при естественной проекции диаграммы, изображенной на рис. 26.5 (c). Тогда базис пространства  $S(I \times S^1)$  имеет вид  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \dots$ , где  $\alpha^0$  — образ пустой диаграммы. Следовательно,  $S(I \times S^1) \cong \mathbb{C}[\alpha]$ .  $\square$

**26.9. Алгебра Темперли–Либя.** Рассмотрим теперь пространство  $S(D^2, 2n)$ , которое будет играть важную роль в дальнейших построениях. Согласно теореме 26.5 базис этого пространства состоит из изотопических классов диаграмм, не содержащих ни перекрестков, ни стягиваемых замкнутых кривых. Но в случае  $F = D^2$  все замкнутые кривые можно последовательно уничтожить, начиная с самых внутренних. Поэтому базисные диаграммы состоят из попарно не пересекающихся дуг с концами на крае диска  $D^2$ .

**Задача 26.1.** Пусть  $c_n = \dim(S(D^2, 2n))$ . Докажите, что

$$(a) \quad c_{n+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}; \quad (b) \quad c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Пространство  $S(D^2, 2n)$  можно снабдить структурой алгебры над  $\mathbb{C}$ , хотя и не каноническим образом. Для этого нужно представить диск  $D^2$  с выделенными  $2n$  точками в виде квадрата, у которого на двух противоположных сторонах выделено по  $n$  точек. (Такое представление, разумеется, не

единственно.) Тогда произведение двух диаграмм определяется естественным образом: мы склеиваем из двух квадратов прямоугольник, а затем сжимаем его в два раза и получаем снова квадрат (рис.26.6). Эта операция превращает линейное пространство  $S(D^2, 2n)$  в алгебру, которую называют *алгеброй Темперли–Либа* и обозначают  $TL_n$ .

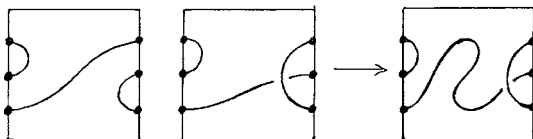


Рис. 26.6

Чтобы упростить обозначения для диаграмм, условимся обозначать  $k$  параллельных дуг одной дугой, помеченной числом  $k$ . Пусть  $e_i$  — элемент алгебры  $TL_n$ , соответствующий диаграмме, изображенной на рис. 26.7 (а). (Для  $n = 4$  все такие диаграммы изображены без сокращений на рис. 26.7 (b).) Пусть, далее,  $1_n$  — элемент алгебры  $TL_n$ , соответствующий диаграмме с  $n$  параллельными дугами.

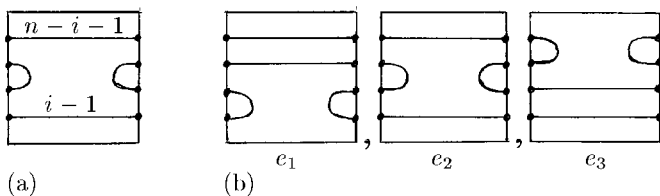


Рис. 26.7

**26.10. Теорема.** *Элементы  $1_n, e_1, \dots, e_{n-1}$  порождают алгебру  $TL_n$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную диаграмму, соответствующую элементу базиса пространства  $TL_n$ , например, диаграмму, изображенную на рис. 26.8 (а). Преобразуем диаграмму так, чтобы ее дуги состояли из горизонтальных отрезков и полуокружностей с вертикальными диаметрами (рис. 26.8 (b)). Такое преобразование возможно потому, что

для любой базисной диаграммы выполняется следующее свойство: дуга соединяющая точки одной и той же стороны квадрата, поднимается по вертикали на нечетное число шагов, а дуга, соединяющая точки противоположных сторон квадрата, поднимается на четное число шагов. Основная идея доказательства этого свойства заключается в том, чтобы последовательно уничтожать дуги, соединяющие пары соседних отмеченных точек на стороне квадрата (при этом не изменяется четность номеров остающихся точек). Эту идею легко превратить в доказательство с помощью индукции.

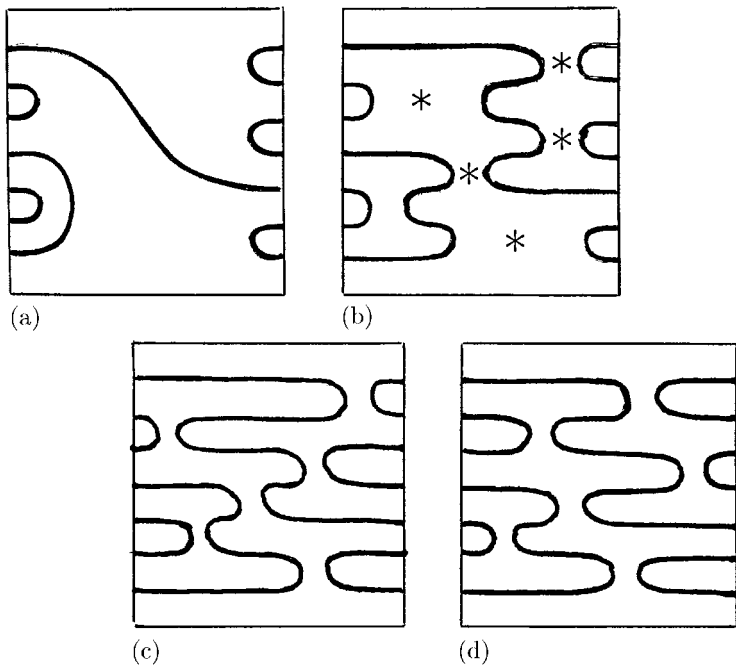


Рис. 26.8

На рис. 26.8 (b) каждой звездочке соответствует одна из образующих  $e_i$ . Сделаем изотопию (двигая точки лишь по горизонтали) так, чтобы проекции этих звездочек на горизонтальную сторону квадрата расположились равномерно. Это можно сделать несколькими способами (сравните рис. 26.8 (c)

и рис. 26.8 (d)). Полученную диаграмму очевидным образом можно представить в виде произведения элементов  $e_i$ .  $\square$

*Замечание.* Несложно найти соотношения, определяющие алгебру Темперли–Либа как абстрактную алгебру над  $\mathbb{C}$  (см. [Jon 2]), но мы этим не будем заниматься, поскольку в дальнейшем нам эти соотношения не потребуются.

## §27. Идемпотент Джонса–Венцля

**27.1.** Для построения skein-инвариантов трехмерных многообразий нам потребуется специальный элемент  $f^{(n)}$  алгебры Темперли–Либа  $TL_n$ , известный под названием *идемпотент Джонса–Венцля*. Пусть  $A_n$  — подалгебра  $TL_n$ , порожденная элементами  $e_1, \dots, e_{n-1}$  (отсутствует ровно одна образующая, а именно,  $1_n$ ). Элемент  $f_n$  определяется следующими двумя соотношениями:

$$(1) f^{(n)} A_n = A_n f^{(n)} = 0;$$

$$(2) 1_n - f^{(n)} \in A_n.$$

Такой элемент  $f^{(n)}$  существует лишь при определенном ограничении на параметр  $a_0 \in \mathbb{C}$ , который входит в определение алгебры  $TL_n$ . Напомним, что этот параметр участвует в определении элементов подпространства  $V_0 \subset V$  (см. 26.2), т.е. он входит в определение вида соотношений между диаграммами.

**27.2. Теорема.** (а) Пусть  $a_0^{4k} \neq 1$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Тогда существует единственный элемент  $f^{(n)} \in TL_n$ , удовлетворяющий соотношениям (1) и (2).

(б) Элемент  $f^{(n)}$  является идемпотентом, т.е.  $f^{(n)} f^{(n)} = f^{(n)}$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что из существования элемента  $f^{(n)}$  следует как его единственность, так и его идемпотентность. Дело в том, что  $1_n - f^{(n)}$  — единичный элемент алгебры  $A_n$ . Действительно, согласно соотношению (1) для любого элемента  $x \in A_n$  выполняются равенства  $(1_n - f^{(n)})x = x$  и  $x(1_n - f^{(n)}) = x$ , а согласно условию (2) элемент  $1_n - f^{(n)}$  принадлежит подалгебре  $A_n$ . Единственность элемента  $f^{(n)}$  следует теперь из единственности единичного

элемента в любой алгебре, а его идемпотентность следует из равенства  $(1_n - f^{(n)})(1_n - f^{(n)}) = 1_n - f^{(n)}$ .

Построим теперь элемент  $f^{(n)}$  индукцией по  $n$ . Алгебра  $TL_1$  порождена элементом  $1_1$ , поэтому  $A_1 = 0$ . Таким образом,  $f^{(1)} = 1_1 \in TL_1$ .

Элементы алгебры  $TL_n$  являются линейными комбинациями образов (при естественной проекции  $V \rightarrow V/V_0$ ) диаграмм. Но при определении некоторых операций над элементами этой алгебры удобно представлять себе эти образы как просто диаграммы (а не классы диаграмм). В такой ситуации мы будем предполагать, что все диаграммы, входящие в линейную комбинацию, подвергаются одной и той же операции. В соответствии с этим соглашением определим элемент  $\Delta_n \in S(\mathbb{R}^2)$  посредством операции *замыкания*, изображенной на рис. 27.1. При этой операции для каждой диаграммы, входящей в разложение элемента  $f^{(n)}$ , берется ее замыкание, а затем рассматривается образ в  $S(\mathbb{R}^2)$  полученной диаграммы на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . В результате линейная комбинация диаграмм переходит в линейную комбинацию элементов пространства  $S(\mathbb{R}^2)$ . Напомним, что  $S(\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{C}$ , поэтому  $\Delta_n$  можно считать комплексным числом (в качестве базисного элемента пространства  $S(\mathbb{R}^2)$  мы выбираем образ пустой диаграммы).

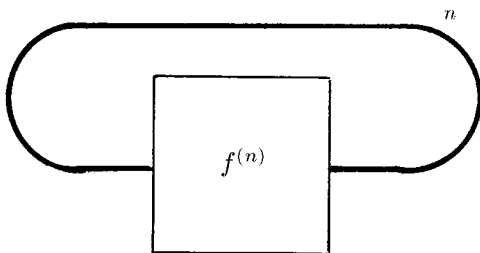


Рис. 27.1

Например, при замыкании элемента  $f^{(1)} = 1_1$  получаем просто одну окружность, поэтому  $\Delta_1 = -a_0^{-2} - a_0^2$ .

Равенство  $f^{(i)} f^{(i)} = f^{(i)}$  в соответствии с нашим соглашением можно изобразить так, как на рис. 27.2.

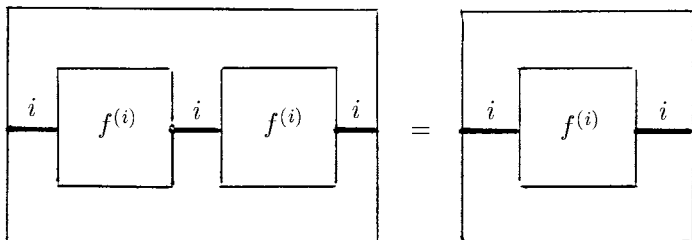


Рис. 27.2

Покажем, что это равенство допускает обобщение, изображенное на рис. 27.3.

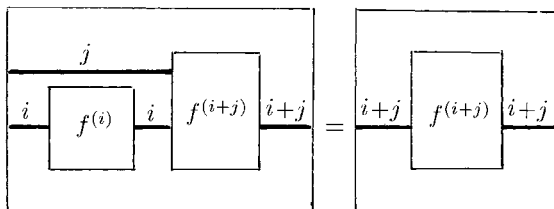


Рис. 27.3

Пусть  $f_j^{(i)}$  — элемент алгебры  $TL_{i+j}$ , полученный из элемента  $f^{(i)} \in TL_i$  посредством операции, изображенной на рис. 27.4.

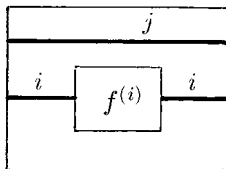


Рис. 27.4

При таком преобразовании элемент  $1_i \in TL_i$  переходит в  $1_{i+j} \in TL_{i+j}$ , а образующая  $e_p \in TL_i$  переходит в образую-

щую  $e_p \in TL_{i+j}$  (в более громоздких, но более точных обозначениях следовало бы сказать, что  $e_{p,i}$  переходит в  $e_{p,i+j}$ ). А так как

$$f^{(i)} = 1_i + \sum \lambda_{i_1, \dots, i_s} e_{i_1} \dots e_{i_s},$$

мы получаем

$$f_j^{(i)} = 1_{i+j} + \sum \lambda_{i_1, \dots, i_s} e_{i_1} \dots e_{i_s}.$$

Следовательно,

$$f_j^{(i)} f^{(i+j)} = \left( 1_{i+j} + \sum \lambda_{i_1, \dots, i_s} e_{i_1} \dots e_{i_s} \right) f^{(i+j)} = f^{(i+j)}.$$

Положим  $i = n - 1$  и  $j = 1$ . Тогда из равенства, изображенного на рис. 27.3, очевидным образом следует равенство, изображенное на рис. 27.5. Пусть  $x$  — элемент алгебры  $TL_{n-1}$ , стоящий в правой части этого равенства. Простая изотопия показывает, что в левой части стоит элемент  $f^{(n-1)}x$ . Таким образом,  $f^{(n-1)}x = x$ . С другой стороны, любой элемент  $x \in TL_{n-1}$  можно представить в виде  $x = \lambda 1_{n-1} + x'$ , где  $x' \in A_{n-1}$ . Поэтому  $f^{(n-1)}x = \lambda f^{(n-1)}$ , а значит,  $f^{(n-1)} = \lambda^{-1} f^{(n-1)}x = \lambda^{-1}x$ .

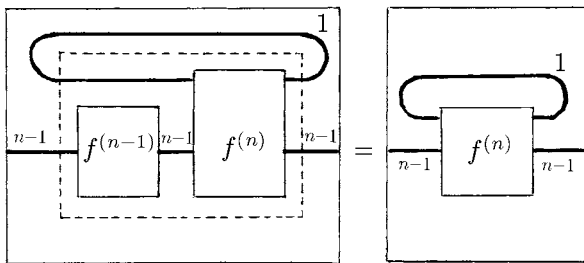


Рис. 27.5

Чтобы вычислить  $\lambda$ , замкнем диаграммы  $x$  и  $f^{(n-1)}$  (рис. 27.6), а затем рассмотрим образы полученных диаграмм в  $S(\mathbb{R}^2)$ .

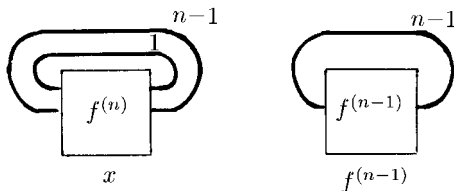


Рис. 27.6



В результате  $x$  перейдет в  $\Delta_n$ , а  $f^{(n-1)}$  в  $\Delta_{n-1}$ . Поэтому  $\Delta_n = \lambda\Delta_{n-1}$ , а значит,

$$f^{(n-1)} = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f^{(n-1)} x;$$

последнее соотношение изображено на рис. 27.7.

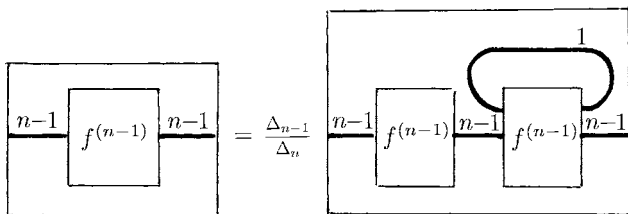


Рис. 27.7

Тот факт, что  $\Delta_n \neq 0$  при  $a_0^{4(n+1)} \neq 1$ , мы докажем отдельно (лемма 27.3). А пока мы будем считать, что элемент  $f^{(n)}$  уже построен (предположение индукции) и  $\Delta_n \neq 0$ . Покажем, что тогда (при  $n \geq 1$ ) в качестве  $f^{(n+1)}$  можно взять элемент

$$f_1^{(n)} - \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_1^{(n)} e_n f_1^{(n)}$$

(рис. 27.8). Чтобы это утверждение было верно при  $n = 0$  и  $n = 1$  будем считать, что  $f^{(0)}$  — пустая диаграмма (это означает, что  $\Delta_0 = 1$ ) и  $\Delta_{-1} = 0$ .

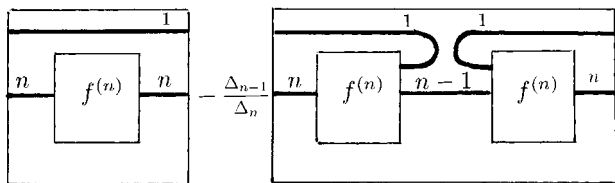


Рис. 27.8

Для определенного таким образом элемента  $f^{(n+1)}$  требуется доказать, что  $f^{(n+1)} e_i = e_i f^{(n+1)} = 0$  при  $i = 1, \dots, n$  и  $1_{n+1} - f^{(n+1)} \in A_n$ . При  $i = 1, \dots, n - 1$  равенства

$f^{(n+1)}e_i = e_i f^{(n+1)} = 0$  очевидным образом следуют из равенств  $f^{(n)}e_i = e_i f^{(n)} = 0$ . Ясно также, что  $1_{n+1} - f_1^{(n)} \in A_n$  и  $f_1^{(n)}e_n f_1^{(n)} \in A_{n+1}$ , поэтому

$$1_{n+1} - f^{(n+1)} = (1_{n+1} - f_1^{(n)}) + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} f_1^{(n)} e_n f_1^{(n)} \in A_{n+1}.$$

Некоторых усилий требует лишь доказательство того, что  $f^{(n+1)}e_n = e_n f^{(n+1)} = 0$ . Мы докажем лишь равенство  $f^{(n+1)}e_n = 0$  (рис. 27.9), так как другое равенство доказывается аналогично.

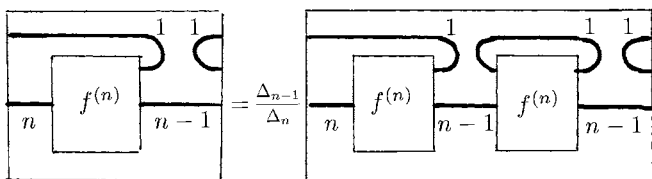


Рис. 27.9

Из равенства, изображенного на рис. 27.7, следует равенство, изображенное на рис. 27.10.

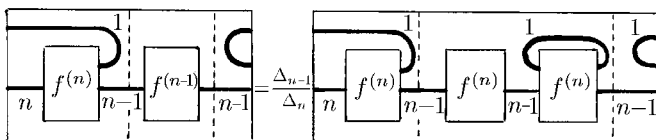


Рис. 27.10

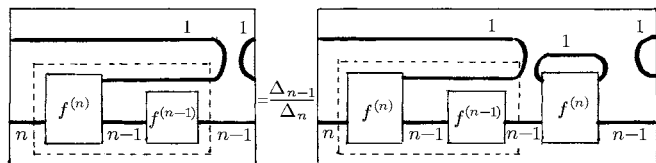


Рис. 27.11

С помощью изотопии от этого равенства можно перейти к равенству, изображенному на рис. 27.11. Точно так же, как

мы доказывали равенство  $f_j^{(i)} f^{(i+j)} = f^{(i+j)}$ , можно доказать равенство  $f^{(i+j)} f_j^{(i)} = f^{(i+j)}$ . На рис. 27.11 выделена пунктиром диаграмма  $f^{(i+j)} f_j^{(i)}$ , где  $i = n - 1, j = 1$ . Заменяя эту диаграмму на  $f^{(i+j)}$ , получим требуемое равенство.

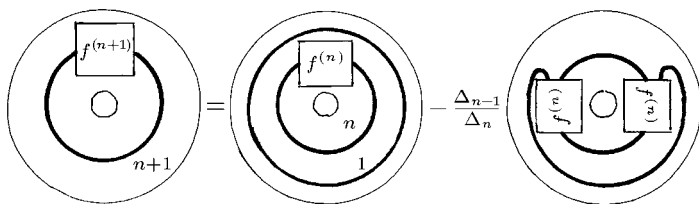
Чтобы завершить доказательство теоремы 27.2, остается проверить, что  $\Delta_1 \dots \Delta_n \neq 0$ .

**27.3. Лемма.** *Если  $a_0^{4(n+1)} \neq 1$ , то  $\Delta_n \neq 0$ .*

*Доказательство.* Мы докажем более точное утверждение, а именно,

$$\Delta_n = \frac{(-1)^n (a_0^{2(n+1)} - a_0^{-2(n+1)})}{a_0^2 - a_0^{-2}}. \tag{27.1}$$

Из определения элемента  $f^{(n+1)} \in TL_{n+1}$  следует равенство для элементов алгебры  $S(I \times S^1)$ , изображенное на рис. 27.12. Пусть  $S_n(\alpha)$  — образ в  $S(I \times S^1)$  замыкания элемента  $f^{(n)}$ . Тогда  $\Delta_n$  — образ элемента  $S_n(\alpha)$  при отображении  $S(I \times S^1) \rightarrow S(\mathbb{R}^2)$ , индуцированном вложением  $I \times S^1$  в  $\mathbb{R}^2$ . При этом отображении элемент  $\alpha$  переходит в комплексное число  $(-a_0^{-2} - a_0^2)$ .



**Рис. 27.12**

Покажем, что при переходе к  $S(I \times S^1)$  равенство, изображенное на рис. 27.12, превращается в равенство

$$S_{n+1}(\alpha) = \alpha S_n(\alpha) - S_{n-1}(\alpha). \tag{27.2}$$

Доказательство не очевидно лишь для члена  $S_{n-1}(\alpha)$ . Соответствующий элемент пространства  $S(I \times S^1)$  можно преобразовать

зовать так, как показано на рис. 27.13. Первое из изображенных там равенств основано на соотношении идемпотентности  $f^{(n)} f^{(n)} = f^{(n)}$ , а второе равенство следует из равенств, изображенных на рис. 27.5 и 27.7.

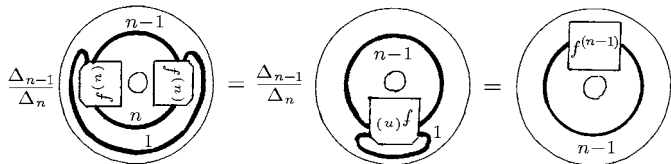


Рис. 27.13

Рассмотрим образ соотношения (27.2) при отображении  $S(I \times S^1) \rightarrow S(\mathbb{R}^2)$ , т.е. подставим вместо  $\alpha$  число  $(-a_0^{-2} - a_0^2)$ . В результате получим

$$\Delta_{n+1} = (-a_0^{-2} - a_0^2) \Delta_n - \Delta_{n-1}. \quad (27.3)$$

Теперь остается заметить, что числа  $\Delta_n$ , определенные формулой (27.1), удовлетворяют как рекуррентному соотношению (27.3), так и начальным условиям  $\Delta_0 = 1$  и  $\Delta_1 = (-a_0^{-2} - a_0^2)$ .  $\square \square$

## §28. Инвариантность относительно второго преобразованию Кирби

**28.1.** Сопоставим теперь каждой оснащенной диаграмме  $D$  зацепления с компонентами  $K_1, \dots, K_n$  полилинейное отображение

$$\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_D : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow S(\mathbb{R}^2),$$

где  $S_i \cong S(I \times S^1)$ . Чтобы определить это отображение, достаточно задать элементы  $\langle \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n} \rangle_D \in S(\mathbb{R}^2)$ , где  $\alpha_i$  — образующая алгебры  $S_i$ , соответствующая образующей  $\alpha$  алгебры  $S(I \times S^1)$ .

Еще раз напомним, как получается оснащенная диаграмма оснащенного зацепления. Расположим ленту  $B_i$ , задающую

оснащенную компоненту  $K_i$ , так, чтобы она стала параллельной плоскости диаграммы. В качестве диаграммы  $K_i$  берется диаграмма любого из краев ленты  $B_i$

Чтобы получить диаграмму, соответствующую элементу  $\langle \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n} \rangle_D \in S(\mathbb{R}^2)$ , на каждой ленте  $B_i$  нужно нарисовать  $k_i$  кривых, параллельных ее краям. Например, для оснащенной диаграммы  $D$ , изображенной на рис. 28.1(a), диаграмма  $\langle \alpha_1^3, \alpha_2^1, \alpha_3^0 \rangle_D$  представлена на рис. 28.1(b).

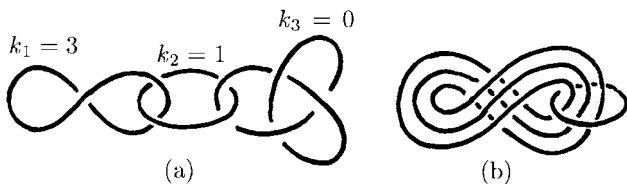


Рис. 28.1

**28.2.** Предположим, что оснащенные диаграммы  $D$  и  $D'$  эквивалентны, т.е. они получаются друг из друга посредством плоских изотопий, преобразования  $\Omega'_1$ , а также второго и третьего преобразований Рейдемейстера. Тогда диаграммы

$$\langle \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n} \rangle_D \quad \text{и} \quad \langle \alpha_1^{k_1}, \dots, \alpha_n^{k_n} \rangle_{D'}$$

тоже получаются друг из друга посредством плоских изотопий, преобразования  $\Omega'_1$ , а также второго и третьего преобразований Рейдемейстера. Поэтому согласно теореме 26.4 образы этих двух диаграмм в  $S(\mathbb{R}^2)$  совпадают. Это означает, что *построенное нами полинейное отображение  $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_D$  представляет собой инвариант оснащенного зацепления.*

Это свойство рассматриваемого отображения делает его удобным инструментом для построения инвариантов трехмерных многообразий (не нужно заботиться об инвариантности относительно изотопий оснащенного зацепления). Но еще нужно обеспечить инвариантность относительно преобразований Кирби. В этом нам поможет элемент  $\Delta_n$ , построенный в предыдущем параграфе.

Чтобы обеспечить инвариантность относительно второго преобразования Кирби, мы воспользуемся элементом

$$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha) \in S(I \times S^1),$$

где  $r \geq 3$  — целое число, а многочлен  $S_n(\alpha)$  и число  $\Delta_n$  были определены в 27.3. Элемент  $\omega$  зависит от  $r$ ; в наших обозначениях эта зависимость для краткости опущена, но она всегда будет подразумеваться.

**28.3. Теорема.** Пусть комплексное число  $a_0$  выбрано так, что  $a_0^4$  — примитивный корень степени  $r$  из единицы, а диаграммы  $D$  и  $D'$  получаются друг из друга вторым преобразованием Кирби. Тогда

$$\langle \omega, \omega, \dots, \omega \rangle_D = \langle \omega, \omega, \dots, \omega \rangle_{D'}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим сначала самый простой (с геометрической точки зрения) случай второго преобразования Кирби, а именно, предположим, что к некоторой ленте добавляется лента, параллельная окружности  $S^1$  с оснащением 0 (рис. 28.2).

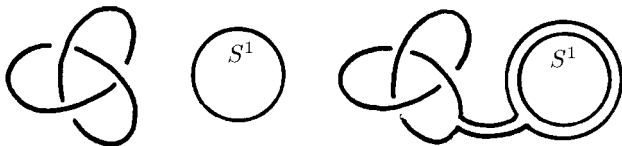


Рис. 28.2

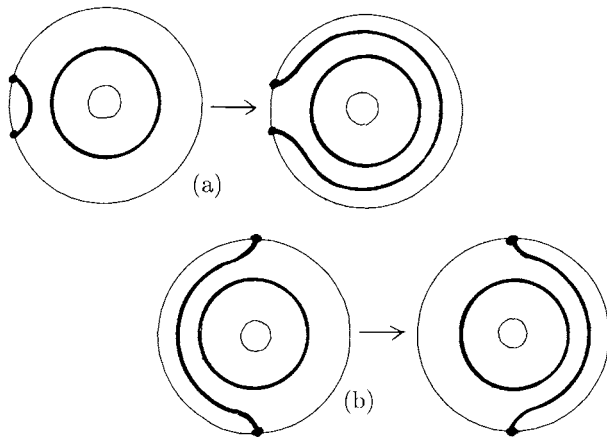


Рис. 28.3

В окрестности окружности  $S^1$  это преобразование выглядит так, как показано на рис. 28.3(а). Очевидной изотопией

это преобразование можно привести к более симметричному виду (рис. 28.3 (b)). Назовем это преобразование *перебрасыванием нити*.

Таким образом, переход от элемента  $\langle \omega, \dots, \omega \rangle_D$  к элементу  $\langle \omega, \dots, \omega \rangle_{D'}$  состоит из нескольких перебрасываний нити такого вида, как на рис. 28.4. Поясним, как именно устроены такие операции. Символ  $\omega$  рядом с окружностью означает, что мы имеем в виду не окружность, а элемент

$$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha) \in S(I \times S^1),$$

т.е. линейную комбинацию диаграмм, состоящих из концентрических окружностей. Перебрасывание нити производится для каждой из этих окружностей.

Для доказательства теоремы 28.4 достаточно проверить, что преобразование элементов пространства  $S(\mathbb{R}^2)$ , изображенное на рис. 28.4, тождественно. Мы сначала выясним, как устроено соответствующее преобразование на уровне элементов пространства  $S(I \times S^1)$ , а затем убедимся, что после проекции  $S(I \times S^1) \rightarrow S(\mathbb{R}^2)$  это преобразование действительно становится тождественным.

**28.4. Лемма.** *Разность двух элементов пространства  $S(I \times S^1)$ , изображенных на рис. 28.4, можно представить в виде линейной комбинации диаграмм, в каждую из которых входит диаграмма  $f^{(r-1)}$  (в качестве отдельной картинки, поддиаграммы).*

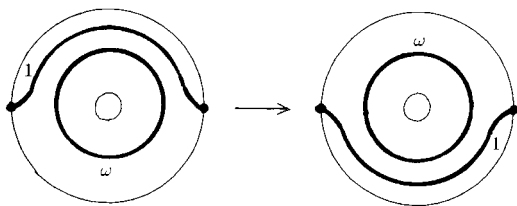


Рис. 28.4

*Доказательство.* Из рекуррентного определения элемента  $f^{(n+1)}$  следует равенство, изображенное на рис. 28.5.

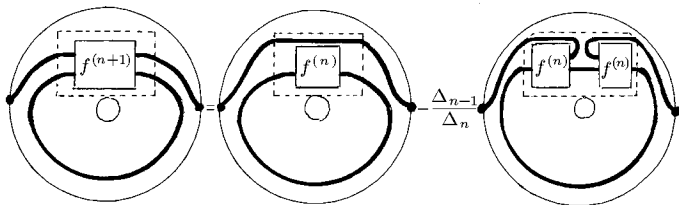


Рис. 28.5

Соотношение идемпотентности  $f^{(n)} f^{(n)} = f^{(n)}$  после isotopy можно будет применить к правой диаграмме на рис. 28.5. В результате получим равенство, изображенное на рис. 28.6.

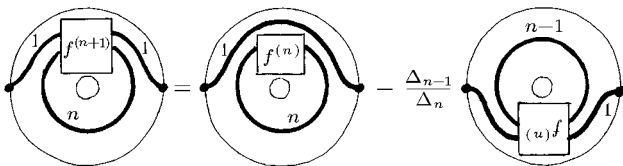


Рис. 28.6

При  $\Delta_n \neq 0$  последнее равенство эквивалентно равенству, изображенному на рис. 28.7.

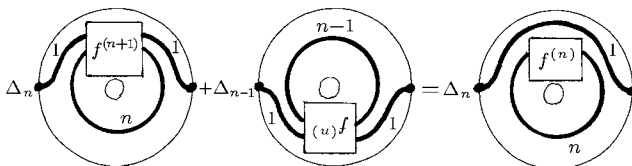


Рис. 28.7



Повернув все диаграммы на  $180^\circ$ , получим равенство, изображенное на рис. 28.8.

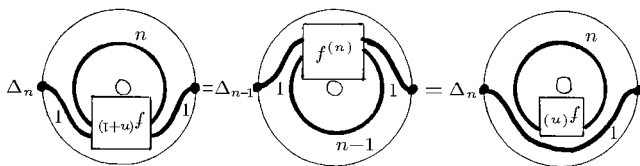


Рис. 28.8

Рассмотрим равенства, изображенные на рис. 28.7, для  $n = 0, 1, \dots, r - 2$ . В правой части суммы всех этих равенств стоит элемент, изображенный на рис. 28.9 (а). Дело в том, что элемент  $\omega$  равен сумме элементов, изображенных на рис. 28.9 (с), при  $n = 0, 1, \dots, r - 2$ . По той же причине в правой части аналогичной суммы равенств, изображенных на рис. 28.8, стоит элемент, изображенный на рис. 28.9 (б).

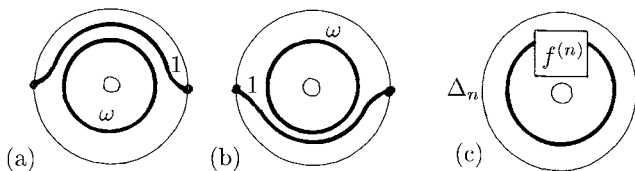


Рис. 28.9

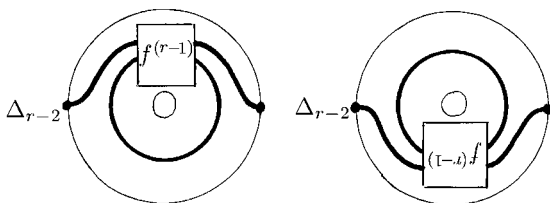


Рис. 28.10

Разность правых частей двух равенств равна разности их левых частей. Легко проверить, что левые части рассматриваемых сумм равенств различаются лишь элементами, изображенными на рис. 28.10 (при доказательстве этого утвер-

ждения нужно воспользоваться тем, что  $\Delta_{-1} = 0$ ). Непосредственно видно, что каждый из этих элементов содержит диаграмму  $f^{(r-1)}$ , что и утверждалось.  $\square$

Возвращаясь к доказательству теоремы, напомним, что по условию число  $a_0^4$  является примитивным корнем степени  $r$  из единицы. Примитивность корня гарантирует, что  $\Delta_n \neq 0$  при  $n = 0, 1, \dots, r-2$ , а из равенства  $a_0^{4r} = 1$  следует, что  $\Delta_{r-1} = 0$ . Чтобы завершить доказательство теоремы (в рассматриваемом частном случае), остается доказать следующее утверждение.

**28.5. Лемма.** Пусть  $\Delta_{r-1} = 0$ . Тогда любой элемент  $d$  пространства  $S(\mathbb{R}^2)$ , содержащий диаграмму  $f^{(r-1)}$ , равен нулю.

*Доказательство.* Согласно предложению 26.7 пространство  $S(\mathbb{R}^2)$  можно отождествить с пространством  $S(S^2)$ . Изобразим сферу  $S^2$  в виде цилиндра. Можно считать, что верхнее и нижнее основания цилиндра свободны от дуг всех диаграмм, входящих в разложение элемента  $d$ . Тогда элемент  $d$  является образом в  $S(\mathbb{R}^2)$  замыкания элемента  $f^{(r-1)}x$  при вложении боковой поверхности цилиндра в сферу  $S^2$ ; здесь  $x$  — некоторый элемент алгебры  $TL_{r-1}$  (рис. 28.11).

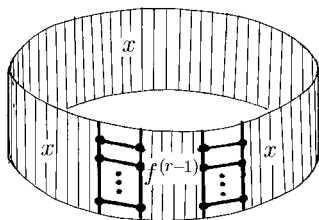


Рис. 28.11

Так как  $x = \lambda 1_{r-1} + x'$ , где  $x' \in A_{r-1}$ , имеем  $f^{(r-1)}x = \lambda f^{(r-1)}$ . Отождествим теперь  $S(S^2)$  с  $S(\mathbb{R}^2)$ . В результате получим, что элемент  $d$  является образом замыкания элемента  $\lambda f^{(r-1)}$  при вложении  $I \times S^1$  в  $\mathbb{R}^2$ . Поэтому  $d = \lambda \Delta_{r-1} = 0$ .  $\square$

**28.6.** Доказательство теоремы 28.2 в том случае, когда второе преобразование Кирби имеет простейший вид, завер-

шено. Напомним, что добавляемую ленту мы считаем расположенной простейшим образом, т.е. так, как показано на рис. 28.12 (вспомните рис. 28.2). Но те же самые рассуждения (с незначительными изменениями) годятся и в том случае, когда добавляется произвольная лента, параллельная плоскости диаграммы, например, лента, изображенная на рис. 28.12 (b). В самом деле, все использованные соотношения между диаграммами, нарисованными на такой ленте, остаются в силе. Для изотопий и операции уничтожения стягиваемых замкнутых кривых это очевидно, а для операции уничтожения перекрестков это следует из того, что ориентация любой части ленты согласована с ориентацией плоскости диаграммы, поскольку лента параллельна этой плоскости.

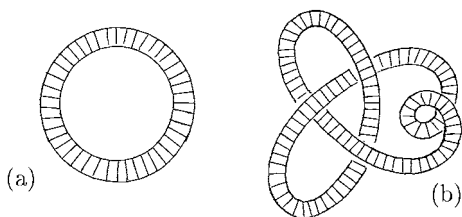


Рис. 28.12

Построение инварианта трехмерных многообразий, основанного на полинейном отображении из 28.1, было бы завершено, если бы удалось доказать, что это отображение инвариантно относительно *первого* преобразования Кирби. К сожалению, это неверно. В следующем параграфе мы введем «поправку» к этому отображению, чтобы обеспечить требуемую инвариантность.

## §29. Инвариантность относительно первого преобразования Кирби

**29.1. Матрица коэффициентов зацепления.** Величина  $\langle \omega, \dots, \omega \rangle_D$  инвариантна относительно изотопий оснащенного зацепления  $D$  и относительно второго преобразо-

вания Кирби. Но нам нужна еще и инвариантность относительно первого преобразования Кирби. Чтобы ее добиться, нам потребуется матрица  $B$  коэффициентов зацепления оснащенного зацепления  $L = \{K_1, \dots, K_n\}$ . Элементы вне диагонали этой матрицы равны соответствующим коэффициентам зацепления, т.е.  $b_{ij} = \text{lk}(K_i, K_j)$ , а диагональные элементы равны оснащениям соответствующих компонент, т.е.  $b_{ii} = \text{lk}(K_i, K'_i)$ , где  $K'_i$  — второй край ленты, задающей оснащение компоненты  $K_i$ .

Матрица  $B$  симметрическая, так как  $b_{ij} = \text{lk}(K_i, K_j) = \text{lk}(K_j, K_i) = b_{ji}$ . Поэтому все собственные значения матрицы  $B$  вещественны. Пусть  $b_+$  — количество положительных собственных значений матрицы  $B$ , а  $b_-$  — количество отрицательных собственных значений. Для построения инварианта нужна, по сути дела, не сама матрица  $B$ , а лишь числа  $b_+$  и  $b_-$ .

Матрица  $B$  зависит от выбора ориентации компонент зацепления  $L$ . Однако числа  $b_+$  и  $b_-$  не зависят от этого выбора. Изменим, например, ориентацию компоненты  $K_1$ . Тогда матрица  $B$  заменится на симметрическую матрицу  $B'$ , где  $b'_{11} = b_{11}$ ,  $b'_{1i} = -b_{1i}$  при  $i \neq 1$ ,  $b'_{ij} = b_{ij}$  при  $i, j \neq 1$ . Легко проверить, что  $B' = X^T B X$ , где  $X$  — диагональная матрица с диагональю  $(-1, 1, \dots, 1)$ . Поэтому матрицы  $B$  и  $B'$  являются матрицами одной и той же квадратичной формы в разных базисах. Как известно из линейной алгебры, числа  $b_+$  и  $b_-$  однозначно определяются квадратичной формой и не зависят от выбора базиса.

Убедимся теперь, что числа  $b_+$  и  $b_-$  не изменяются при втором преобразовании Кирби. Для этого достаточно доказать следующее утверждение.

**29.2. Теорема.** *При втором преобразовании Кирби матрица  $B$  коэффициентов зацепления заменяется на матрицу  $B' = X^T B X$ , где  $X$  — некоторая невырожденная вещественная матрица.*

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда к ленте, определяющей  $K_1$ , добавляется новая часть, парал-

ленте  $K_2$ . Покажем, что в этом случае

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \pm 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$B' = \begin{pmatrix} b_{11} \pm 2b_{12} + b_{22} & b_{12} \pm b_{22} & \dots & b_{1n} \pm b_{2n} \\ b_{12} \pm b_{22} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} \pm b_{2n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что второе преобразование Кирби заключается в том, что лента  $K_1$  подводится к ленте  $K_2$  (рис. 29.1), а затем заштрихованная часть ленты  $K_1$  заменяется на ленту, параллельную  $K_2$  (часть этой ленты изображена пунктиром на рис. 29.1). При этом ленту  $K_1$  можно подвести к ленте  $K_2$  двумя существенно разными способами. Мы имеем в виду, что в одном случае ориентация добавляемой части ленты совпадает с ориентацией ленты  $K_2$  (рис. 29.1 (а)), а в другом случае эти ориентации противоположны (рис. 29.1 (б)).

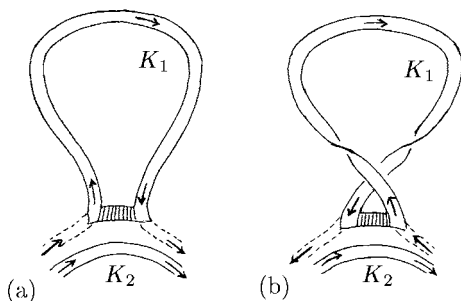


Рис. 29.1

Лента  $K_1$  подводится к ленте  $K_2$  посредством изотопии. Эта операция не влияет на коэффициенты зацепления. Они

изменяются лишь при добавлении новой части ленты, параллельной ленте  $K_2$ . Поэтому с точностью до множества, не влияющего на коэффициенты зацепления, можно считать, что  $K_1$  заменяется на  $K_1 \cup (\pm K_2)$ . При  $i \neq 1$  получаем

$$b'_{1i} = \text{lk}(K_1 \cup (\pm K_2), K_i) = \text{lk}(K_1, K_i) \pm \text{lk}(K_2, K_i) = b_{1i} \pm b_{2i}.$$

Чтобы вычислить элемент  $b'_{11}$ , нужно рассмотреть кривые  $K'_1$  и  $K'_2$  — вторые компоненты края лент, задающих оснащения  $K_1$  и  $K_2$ . Теперь ясно, что

$$b'_{11} = \text{lk}(K_1 \cup (\pm K_2), K'_1 \cup (\pm K'_2)) = b_{11} \pm 2b_{12} + b_{22}. \quad \square$$

**29.3. Инвариант.** Рассмотрим три стандартные оснащенные диаграммы  $U_+$ ,  $U$  и  $U_-$ , изображенные на рис. 29.2. Они представляют незаузленные кривые с оснащениями 1, 0 и  $-1$  соответственно. В том случае, когда  $\langle \omega \rangle_{U_+} \langle \omega \rangle_{U_-} \neq 0$ , для любой оснащенной диаграммы  $D$  можно рассмотреть комплексное число

$$I(D) = \langle \omega, \dots, \omega \rangle_D \langle \omega \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-b_-}. \quad (29.1)$$

Как мы скоро убедимся, это число является требуемым инвариантом.

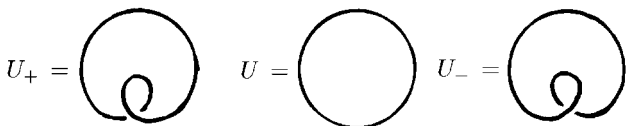


Рис. 29.2

**29.4. Предложение.** *Комплексное число  $I(D)$ , определенное формулой (29.1), является топологическим инвариантом трехмерного многообразия, представленного оснащенной диаграммой  $D$ , при условии, что  $\langle \omega \rangle_{U_+} \langle \omega \rangle_{U_-} \neq 0$ .*

*Замечание.* Как мы покажем в дальнейшем, выполнения последнего условия всегда можно добиться, подходящим образом выбрав параметр  $a_0$ .

*Доказательство предложения 29.4.* При изотопии и при втором преобразовании Кирби ни один из трех сомножителей числа  $I(D)$  не изменяется. При первом преобразовании Кирби сомножители изменяются, но, как мы сейчас увидим, их изменения взаимно компенсируются. Напомним, что первое преобразование Кирби (см. 19.1) заключается в том, что к диаграмме  $D$  добавляется (или уничтожается) диаграмма  $U_{\pm}$ .

Поскольку в качестве базисного элемента пространства  $S(\mathbb{R}^2)$  мы выбрали пустую диаграмму, то  $p(D_1 \cup D_2) = p(D_1)p(D_2)$ , где  $p(D_i)$  — образ диаграммы  $D_i$  при естественной проекции на  $S(\mathbb{R}^2)$ . Из этого соотношения следует, что

$$\langle x_1, \dots, x_{n+m} \rangle_{D_1 \cup D_2} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_{D_1} \langle x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \rangle_{D_2}.$$

В частности,

$$\langle \omega, \dots, \omega, \omega \rangle_{D \cup U_{\pm}} = \langle \omega, \dots, \omega \rangle_D \langle \omega \rangle_{U_{\pm}}.$$

Ясно также, что добавление диаграммы  $U_{\pm}$  приводит к тому, что число  $b_{\pm}$  увеличивается на 1. Поэтому изменения множителей  $\langle \omega, \dots, \omega \rangle_D$  и  $\langle \omega \rangle_{U_{\pm}}^{-b_{\pm}}$  взаимно компенсируются.  $\square$

**29.5.** Чтобы обеспечить выполнение неравенства  $\langle \omega \rangle_{U_+} \langle \omega \rangle_{U_-} \neq 0$ , нам придется наложить дополнительные ограничения на параметр  $a_0$ . А именно, в дальнейшем мы будем предполагать, что параметр  $a_0$  удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1)  $a_0$  — примитивный корень степени  $4r$  из единицы;
- (2)  $a_0$  — примитивных корень степени  $2r$  из единицы, причем  $r$  нечетно.

В обоих случаях  $a_0^4$  будет примитивным корнем степени  $r$  из единицы (т.е. будет выполняться условие теоремы 28.3). В самом деле, в случае (1) получаем  $a_0 = \exp(2\pi i k/4r)$  и  $(k, 4r) = 1$ , поэтому  $a_0^4 = \exp(2\pi i k/r)$  и  $(k, r) = 1$ ; в случае (2) получаем  $a_0 = \exp(2\pi i k/2r)$  и  $(k, 2r) = 1$ , поэтому  $a_0^4 = \exp(2\pi i (2k)/r)$  и  $(2k, r) = 1$ , так как  $r$  нечетно.

Отметим, что условия (1) и (2) накладывают дополнительные ограничения на параметр  $a_0$  по сравнению с тем, что число  $a_0^4$  должно быть примитивным корнем степени  $r$  из единицы. Например, число  $a_0 = \exp(2\pi i/3)$  таково, что  $a_0^4$  — примитивный корень степени  $r = 3$  из единицы; но это число не удовлетворяет ни условию (1), ни условию (2).

**29.6. Предложение.** Если число  $a_0$  удовлетворяет либо условию (1), либо условию (2), то  $\langle \omega \rangle_{U_+} \langle \omega \rangle_{U_-} \neq 0$ .

*Доказательство.* Рассмотрим оснащенную диаграмму  $D = U_+ \cup U_-$  (рис. 29.3 (a)). Посредством второго преобразования Кирби из диаграммы  $D$  можно получить диаграмму  $D'$  (рис. 29.3 (b)). С помощью плоской изотопии и преобразования  $\Omega'_1$  диаграмму  $D'$  можно представить в таком виде, как на рис. 29.3 (c).

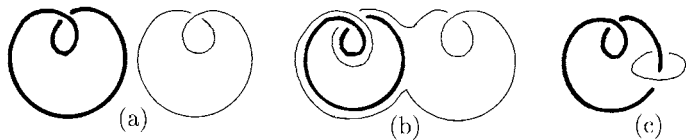


Рис. 29.3

Согласно предложению 29.4,

$$\langle \omega, \omega \rangle_{D'} = \langle \omega, \omega \rangle_D = \langle \omega \rangle_{U_+} \langle \omega \rangle_{U_-}.$$

Поэтому мы должны доказать, что величина  $\langle \omega, \omega \rangle_{D'}$  отлична от нуля. Чтобы вычислить эту величину, вспомним, что

$$\omega = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha).$$

Из этого определения и определения многочлена  $S_n(\alpha)$  (см. 27.3) непосредственно следует серия равенств, изображенных на рис. 29.4.

$$\langle \omega, \omega \rangle_{D'} = \left\langle \begin{array}{c} \omega \\ \omega \end{array} \right\rangle = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n \left\langle \begin{array}{c} \omega \\ S_n(\alpha) \end{array} \right\rangle = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n \left\langle \begin{array}{c} \omega \\ \boxed{f(n)} \\ n \end{array} \right\rangle$$

Рис. 29.4



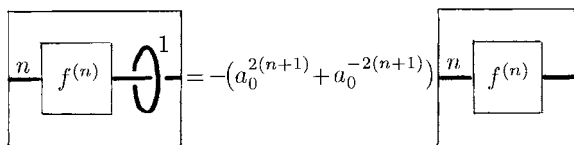


Рис. 29.5

Чтобы вычислить полученную сумму, мы воспользуемся соотношением, изображенным на рис. 29.5.

**Задача 29.1.** Докажите соотношение, изображенное на рис. 29.5.

Каждая диаграмма, входящая в искомую сумму, содержит диаграмму  $D_n$ , изображенную на рис. 29.6.

**29.7. Лемма.** Пусть комплексное число  $a_0$  удовлетворяет либо условию (1), либо условию (2). Тогда:

- (i) при  $1 \leq n \leq r - 3$  любая диаграмма, содержащая диаграмму  $D_n$ , равна нулю;
- (ii) при  $n = r - 2$  в случае (1) любая диаграмма, содержащая  $D_n$ , тоже равна нулю, а в случае (2) диаграмму  $D_n$  можно заменить на  $\langle \omega \rangle_U f^{(n)}$ .

(Здесь под «диаграммами» мы подразумеваем их образы в  $S(\mathbb{R}^2)$ .)

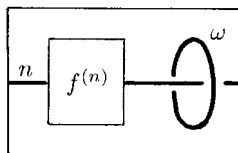


Рис. 29.6

*Доказательство.* Согласно теореме 28.3, второе преобразование Кирби не изменяет образ в  $S(\mathbb{R}^2)$  любой диаграммы, все компоненты которой помечены символом  $\omega$ . Но в действительности мы доказали более сильное утверждение, а именно, символом  $\omega$  обязательно должна быть помечена лишь та компонента, для которой параллельная ей лента добавляется к

другой компоненте; остальные компоненты могут иметь произвольные пометки. Воспользовавшись этим утверждением, получим равенства, изображенные на рис. 29.7.

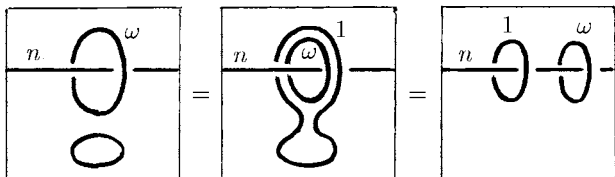


Рис. 29.7

Пусть  $D_n$  — диаграмма, изображенная на рис. 29.6. Для образа в  $S(\mathbb{R}^2)$  любой диаграммы, содержащей  $D_n$ , получаем соотношения, изображенные на рис. 29.8. Первое из этих равенств основано на операции добавления или уничтожения окружности, второе следует из рис. 29.7, а третье следует из соотношения, изображенного на рис. 29.5.

$$\begin{aligned}
 -(a_0^2 + a_0^{-2}) \boxed{D_n} &= \boxed{\begin{array}{c} n \\ \hline f^{(n)} \text{ --- } \omega \\ \hline 1 \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} n \\ \hline f^{(n)} \text{ --- } \omega \\ \hline 1 \end{array}} = \\
 &= -(a_0^{2(n+1)} + a_0^{-2(n+1)}) \boxed{D_n}
 \end{aligned}$$

Рис. 29.8

Таким образом, диаграмма, содержащая  $D_n$ , может быть ненулевой лишь в том случае, когда

$$a_0^2 + a_0^{-2} = a_0^{2(n+1)} + a_0^{-2(n+1)}, \text{ т.е. } a_0^2(a_0^{2n} - 1)(a_0^{-2(n+2)} - 1) = 0.$$

Последнее равенство выполняется лишь при  $a_0^{2n} = 1$  или  $a_0^{2(n+2)} = 1$ . В случае (1) при  $1 \leq n \leq r - 2$  ни одно из этих равенств выполняться не может. В случае (2) при  $1 \leq n \leq r - 3$  тоже ни одно из этих равенств выполняться не может, но

при  $n = r - 2$  выполняется равенство  $a_0^{2(n+2)} = 1$ . Рассмотрим последний случай. Так как  $a_0^{2r} = 1$ , то  $a_0^{2(n+1)} = a_0^{2(r-1)} = a_0^{-2}$ . Поэтому соотношение, изображенное на рис. 29.5 принимает такой вид, как на рис. 29.9.

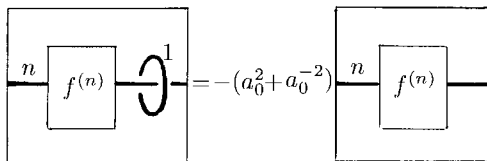


Рис. 29.9

Но умножение диаграммы на  $-(a_0^2 + a_0^{-2})$  эквивалентно добавлению окружности. Воспользовавшись этим, получим соотношение, изображенное на рис. 29.10.

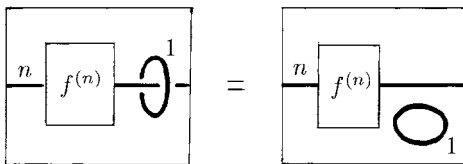


Рис. 29.10

Иными словами, одну из окружностей можно снять с нитей. Но тогда такую же операцию можно проделать и для нескольких concentрических окружностей, поэтому справедливо равенство, изображенное на рис. 29.11. Таким образом, диаграмму  $D_{r-2}$  можно заменить на  $\langle \omega \rangle_U f^{(r-2)}$ .  $\square$

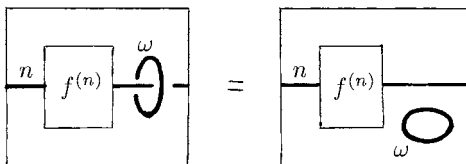


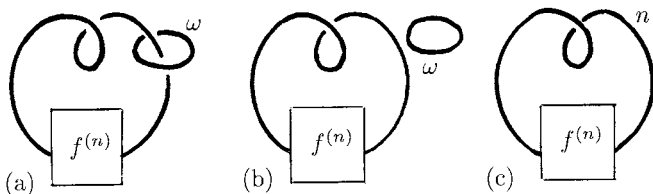
Рис. 29.11

**29.8.** Лемма 29.7 существенно облегчает вычисление искомой суммы, изображенной на рис. 29.4. В случае (1) остается единственное ненулевое слагаемое (соответствующее  $n = 0$ ), а в случае (2) остаются два ненулевых слагаемых (соответствующих  $n = 0$  и  $n = r - 2$ ). Слагаемое, соответствующее  $n = 0$ , представляет собой диаграмму  $U$ , помеченную символом  $\omega$  (напомним, что  $\Delta_0 = 1$ ). Образом этой диаграммы в  $S(\mathbb{R}^2)$  служит  $\langle \omega \rangle_U$ .

Легко проверить, что если  $a_0^{2r} = 1$  и  $a_0^2 \neq 1$ , то

$$\Delta_{r-2} = -\frac{a_0^{2(r-1)} - a_0^{-2(r-1)}}{a_0^2 - a_0^{-2}} = 1.$$

Поэтому в случае (2) слагаемое, соответствующее  $n = r - 2$ , представляется диаграммой, изображенной на рис. 29.12 (а). Согласно лемме 29.7 эта диаграмма эквивалентна диаграмме, изображенной на рис. 29.12 (б). Поэтому рассматриваемое слагаемое равно произведению  $\langle \omega \rangle_U$  на образ в  $S(\mathbb{R}^2)$  диаграммы, изображенной на рис. 29.12 (с).



**Рис. 29.12**

Чтобы завершить доказательство предложения 29.6, остается решить две несложные задачи.

**Задача 29.2.** Докажите, что если  $a_0$  — примитивный корень из единицы степени  $4r$ , то

$$\langle \omega \rangle_U = -\frac{2r}{(a_0^2 - a_0^{-2})^2} \neq 0.$$

**Задача 29.3.** Докажите, что в случае (2), образ в  $S(\mathbb{R}^2)$  диаграммы, изображенной на рис. 29.12 (с), равен 1.

После этого доказательство предложения 29.6 будет завершено.  $\square$

Сравнив предложения 29.4 и 29.6, мы получим основной результат этой главы.

**29.9. Теорема.** Если параметр  $a_0 \in \mathbb{C}$  удовлетворяет одному из условий (1) и (2) из 29.5 и  $r \geq 3$ , то формула

$$W(M^3) = I(D) = \langle \omega, \dots, \omega \rangle_D \langle \omega \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-b_-} \quad (29.1)$$

(уже встречавшаяся нам в 29.3) задает топологический инвариант любого компактного трехмерного ориентируемого многообразия  $M^3$  без края (здесь  $D$  — диаграмма оснащенного зацепления, представляющего  $M^3$ ).

**29.10. Примеры.** После того как мы установили топологическую инвариантность числа

$$I(D) = \langle \omega, \dots, \omega \rangle_D \langle \omega \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-b_-},$$

можно привести примеры вычисления значений этого инварианта для конкретных многообразий.

Сфера  $S^3$  представлена пустой диаграммой, поэтому  $I(S^3) = 1$ .

Многообразие  $S^1 \times S^2$  представлено диаграммой  $U$ . Для этой диаграммы матрица коэффициентов зацепления имеет вид  $B = (b_{11})$ , где  $b_{11} = 0$ . Поэтому  $b_+ = b_- = 0$ , а значит,  $I(S^1 \times S^2) = \langle \omega \rangle_U$ .

## Комментарии

Первое обобщение полинома Джонса с зацеплений в  $S^3$  на зацепления в произвольных трехмерных многообразиях появилось в замечательной статье Э. Виттена [Wit 2]. Краткое описание подхода Виттена будет представлено ниже в 32.5. Математики, однако, не были удовлетворены уровнем строгости статьи Виттена, указывая (вполне обоснованно) на то,

что интеграл, входящий в основное определение Виттена, с математической точки зрения не определен. (Ради справедливости следует отметить, что физики уже давно успешно работают с «интегралами» такого типа, в частности, с так называемыми фейнмановскими интегралами по траекториям.)

Математически строгое определение этого инварианта впервые было получено в работах Санкт-Петербургской школы (Н.Решетихин, В.Тураев, О.Виро). По сути дела, наше изложение в этой главе основано на упрощенной версии их подхода (принадлежащей Ликоришу) в частном случае, когда зацепление в трехмерном многообразии пусто, т.е. мы получаем инвариант самого многообразия, а не зацепления в нем. Точнее говоря, в этой главе и в §31 мы без существенных изменений следуем изложению Ликориша (основанному на skein-алгебрах), которое содержится в его статье [Lic 4].

Следует отметить, что основная составляющая часть рассматриваемого определения — это skein-алгебра, которая происходит из соотношения типа Конвея (skein relation) (в нашем случае — из версии Кауфмана этого соотношения). Но возможны и другие подходы, использующие либо другие виды соотношений типа Конвея, либо основанные на представлениях квантовых групп. Некоторые математики и физики-теоретики полагают, что эти соотношения, как и полином Кауфмана, имеют физический смысл и должны быть включены в основы топологической квантовой теории поля (см. 32.5 или, для более подробного знакомства, [Ati 2] и [BNMV]).

Пожалуй, следует также отметить, что соотношения типа Конвея имеют отношение и к биологии: известен определенный фермент, который «разрезает» длинные молекулы (например, ДНК), а затем «склеивает» их снова, производя таким образом изменение типа перекрестка. В этой связи см. [Sum].

## Глава IX

# Инварианты зацеплений в трехмерных многообразиях

Эта завершающая глава состоит из трех независимых параграфов, которые связаны друг с другом лишь тем, что все они посвящены инвариантам зацеплений в трехмерных многообразиях.

Первый из них, §30, вполне элементарен, его можно читать сразу после главы II. В этом параграфе представлены результаты Ю. Дроботухиной, которой удалось построить полиномиальный инвариант для зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$  (типа полинома Джонса), соответствующим образом обобщив подход Кауфмана (см. 3.5 и теорему 3.6).

Следующий за ним §31 является кульминацией всей этой книги. Он использует, прямо или косвенно, почти весь предшествующий материал. Цель этого параграфа заключается в том, чтобы дать строгое определение инвариантов зацеплений (и узлов) в произвольном компактном ориентируемом трехмерном многообразии без края. Эти инварианты, обобщающие полином Джонса  $V_L(q)$  (точнее говоря, его значения при некоторых фиксированных значениях  $q$ ), были открыты Э.Виттеном в конце 80-х годов. Однако идеи, на которые опиралось определение Виттена (представленное «на физическом уровне строгости»), не имели под собой удовлетворительного математического обоснования. По этой причине наше изложение основано на совершенно другом подходе, предложенном несколькими математиками (см. комментарии

к предыдущей главе и §32). Краткость §31 связана с тем, что наиболее трудная часть работы уже была выполнена в предыдущей главе, когда мы обсуждали skein-инварианты трехмерных многообразий (их теперь следует рассматривать как «трехмерные многообразия, содержащие пустое зацепление»).

Последний в этой главе §32 представляет собой обзор современного состояния дел в изучении связей между теорией узлов и физикой. В настоящее время эта тема очень популярна, ей посвящены сотни публикаций последних лет, в том числе около дюжины монографий ([Kau 4], [Tur 3], [Ati 1], [Kas], [BM], [Fu], [CP], [Lus].) Мы надеемся, что этот краткий обзор поможет читателю понять источники этого (зачастую таинственного) взаимодействия между, казалось бы, не имеющими друг к другу отношения темами. А если у читателя появится к этому интерес, то §32 может послужить начальным путеводителем по обширной литературе.

## §30. Полиномиальные инварианты зацеплений в $\mathbb{R}P^3$

**30.1.** В §3 мы описали конструкцию, позволяющую определить инвариант ориентированного зацепления  $L$  в сфере  $S^3$ , а именно, полином Кауфмана  $X(L)$ . Этот инвариант естественным образом переносится на ориентированные зацепления в  $\mathbb{R}P^3$ . Изложим эту конструкцию, следуя работе [Dro].

**30.2.** Многообразие  $\mathbb{R}P^3$  можно определить как сферу  $S^3$  с отождествленными диаметрально противоположными точками. Сфера  $S^3$  состоит из двух полусфер, каждая из которых гомеоморфна диску  $D^3$ . Следовательно,  $\mathbb{R}P^3$  можно получить, отождествив диаметрально противоположные точки края  $S^2 = \partial D^3$ . Поэтому зацепление в  $\mathbb{R}P^3$  можно определить как набор гладких замкнутых кривых и дуг, лежащих в диске  $D^3$ , при том условии, что концы этих дуг лежат на крае  $\partial D^3$  и разбиваются на пары диаметрально противоположных точек. Таким образом, зацепление в  $\mathbb{R}P^3$  можно представить посредством диаграммы в круге  $D^2$ , для которой все точки кривых, попадающие на границу  $S^1 = \partial D^2$ , должны быть расположены центрально симметрично. Пример диаграммы



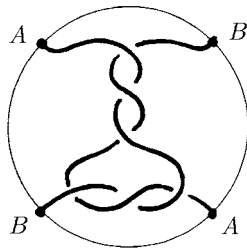


Рис. 30.1

такого вида изображен на рис. 30.1.

**Задача 30.1.** Пусть задана диаграмма зацепления в  $\mathbb{R}P^3$ . Опишите, как выглядит диаграмма прообраза этого зацепления в  $S^3$  при двулистном накрытии  $p : S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$ .

**30.3. Преобразования Рейдемейстера.** Для зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$ , как и для зацеплений в  $S^3$ , мы будем рассматривать только диаграммы общего положения. Это, в частности, означает, что диаграмма не должна касаться границы круга  $D^2$  и на границе круга  $D^2$  не должно быть перекрестков диаграммы. Напомним, что в случае сферы  $S^3$  запрещенные проекции (см. рис. 1.2) приводили к преобразованиям Рейдемейстера  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Аналогичным образом, две упомянутые выше запрещенные проекции приводят к двум новым преобразованиям, которые тоже называют *преобразованиями Рейдемейстера* и обозначают  $\Omega_4$  и  $\Omega_5$ ; эти преобразования изображены на рис. 30.2.

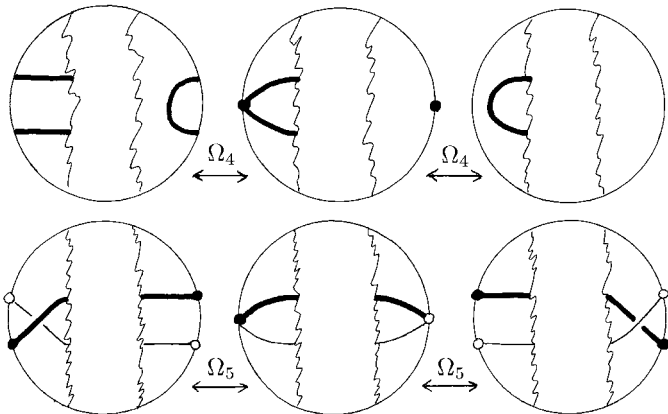


Рис. 30.2

**30.4. Теорема.** *Две диаграммы соответствуют изотопным зацеплениям в  $\mathbb{R}P^3$  тогда и только тогда, когда их можно получить друг из друга посредством изотопий диска  $D^2$ , классических преобразований Рейдемейстера  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  и двух новых преобразований Рейдемейстера  $\Omega_4$  и  $\Omega_5$ .*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству классической теоремы Рейдемейстера из главы I; мы его не приводим.

**30.5. Определение полинома  $\langle L \rangle$ .** Для ориентированного зацепления  $L$  в  $\mathbb{R}P^3$  мы определим полиномиальный инвариант точно так же, как был определен полином Кауфмана  $X(L)$  для ориентированных зацеплений в  $S^3$  (см. §3); некоторые дополнительные рассуждения потребуются лишь для доказательства инвариантности этого полинома относительно новых преобразований  $\Omega_4$  и  $\Omega_5$ .

Прежде всего для диаграммы  $L$  неориентированного зацепления в  $\mathbb{R}P^3$  определим полином  $\langle L \rangle$ , обладающий следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \langle \text{X} \rangle = a \langle \text{C} \rangle + a^{-1} \langle \text{O} \rangle, \\ (2) \quad & \langle L \cup \text{O} \rangle = (-a^{-2} - a^2) \langle L \rangle, \\ (3) \quad & \langle \text{O} \rangle = 1. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы существования и единственности полинома  $\langle L \rangle$  полностью совпадает с доказательством теоремы 3.4. Никаких изменений не требует и доказательство инвариантности полинома  $\langle L \rangle$  относительно преобразований  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ .

Для доказательства инвариантности полинома  $\langle L \rangle$  относительно преобразования  $\Omega_4$  удобно воспользоваться формулой (3.3). В самом деле, для любого состояния  $s$  диаграммы  $L$  числа  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  и  $\gamma(s)$  не изменяются после преобразования  $\Omega_4$  (для зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$  число  $\gamma(s)$  определяется как количество окружностей в  $\mathbb{R}P^3$ ).



где диаграмма  $|L|$  получена из диаграммы  $L$  стиранием стрелок (забыванием ориентации).

**30.7. Теорема.** *Полином  $X(L)$  является изотопическим инвариантом ориентированного зацепления  $L$  в  $\mathbb{R}P^3$ .*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 30.4, определения (30.1) и установленной выше инвариантности относительно преобразований  $\Omega_2 - \Omega_5$  (сравните с доказательством теоремы 3.6).  $\square$

**Задача 30.2.** Докажите, что для любого зацепления  $L$  в  $\mathbb{R}P^3$  в полином  $X(L)$  входят лишь четные степени переменной  $a$ .

**Задача 30.3.** Докажите, что для узла  $L$ , изображенного на рис. 30.1, полином  $X(L)$  содержит степени переменной  $a$ , не делящиеся на 4 (сравните с теоремой 3.9).

## §31. Инварианты оснащенных зацеплений в трехмерных многообразиях

Конструкцию, использованную в главе VIII для построения численных инвариантов компактных ориентируемых трехмерных многообразий без края, мы сейчас применим для построения инвариантов более сложных топологических объектов, а именно, оснащенных зацеплений в компактных ориентируемых трехмерных многообразиях без края. Оснащения компонент зацепления будут задаваться при этом посредством лент.

**31.1.** Рассмотрим многообразие  $M^3$  (компактное, ориентируемое и без края), содержащее оснащенное зацепление  $L$ . Многообразию  $M^3$  можно получить из сферы  $S^3$  перестройкой по оснащеному зацеплению  $L_M \subset S^3$  (см. §16). Это означает, что существует гомеоморфизм

$$f : S^3 \setminus L_M \rightarrow M^3 \setminus \tilde{L}_M,$$

где  $\tilde{L}_M$  — некоторое зацепление в  $M^3$ . Малым шевелением можно добиться того, чтобы зацепление  $\tilde{L}_M$  не пересекалось

с заданным зацеплением  $L \subset M^3$  (но при этом компоненты зацеплений  $L$  и  $\tilde{L}_M$  могут быть зацеплены друг с другом). Пусть  $L_L = f^{-1}(L)$  — прообраз зацепления  $L \subset M^3$  в сфере  $S^3$ . Отметим, что если зацепление  $L$  оснащенное, то зацепление  $L_L$  тоже оснащенное. Таким образом, оснащенное зацепление  $L$  в многообразии  $M^3$  можно задать посредством пары оснащенных зацеплений  $(L_L, L_M)$  в сфере  $S^3$ , причем зацепление  $L_L$  имеет столько же компонент, сколько и зацепление  $L$ .

**31.2.** Выясним теперь, при каких условиях пары зацеплений  $(L_L, L_M)$  и  $(L'_L, L'_M)$  определяют одно и то же оснащенное зацепление  $L$  в  $M^3$ . Перестройки по оснащенным зацеплениям  $L_M$  и  $L'_M$  должны давать одно и то же многообразие  $M^3$ , поэтому согласно теореме 19.3 зацепление  $L'_M$  можно получить из зацепления  $L_M$  посредством первых и вторых преобразований Кирби и изотопий. При этом в процессе изотопии зацепление  $L_M$  не должно пересекать  $L_L$ . Дело в том, что изотопия, переводящая  $L_M$  в  $L'_M$ , индуцирует гомеоморфизм

$$f : S^3 \setminus L_M \rightarrow M^3 \setminus \tilde{L}_M.$$

Ясно также, что малым шевелением можно добиться того, что преобразование Кирби не будет затрагивать некоторую окрестность зацепления  $L_L$ .

После того как будут сделаны нужные преобразования Кирби и изотопии, мы сможем считать, что  $L'_M = L_M$ . При этом зацепление  $L_L \cup L_M$  подвергается преобразованиям Кирби и изотопиям, а зацепление  $L_L$  подвергается только изотопиям. Таким образом, остается выяснить, как должны быть связаны  $L_L$  и  $L'_L$  в том случае, когда  $L_M = L'_M$ . В таком случае после перестройки сферы  $S^3$  по зацеплению  $L_M$  получается многообразие  $M^3$ , в котором образы зацеплений  $L_L$  и  $L'_L$  изотопны. В процессе этой изотопии в  $M^3$  образы зацеплений  $L_L$  и  $L'_L$  могут пересекать образ зацепления  $L_M$ . Поэтому в сфере  $S^3$  соответствующее преобразование не сводится к изотопии зацепления  $L_L \cup L_M$ . Точнее говоря, если в многообразии  $M^3$  в процессе изотопии компонента  $K_L$  образа зацепления  $L_L$  пересекает компоненту  $K_M$  образа зацепления  $L_M$ , то в сфере  $S^3$  происходит второе преобразование Кирби, а именно, к ленте  $K_L$  добавляется лента, параллельная ленте  $K_M$ .

Отметим два очевидных, но важных обстоятельства:

- (1) количества компонент зацеплений  $L_L$  и  $L'_L$  равны;
- (2) при вторых преобразованиях Кирби никогда не добавляются ленты, параллельные компонентам зацепления  $L_L$ .

**31.3.** Оснащенному зацеплению  $L_L \cup L_M$  можно сопоставить оснащенную диаграмму  $D_L \cup D_M$  (см. 19.6). Для зацепления  $L_M$  рассмотрим матрицу  $B$  коэффициентов зацепления его компонент (см. 29.1). Пусть  $b_+$  и  $b_-$  — количества положительных и отрицательных собственных значений матрицы  $B$ ,  $n$  — количество компонент зацепления  $L_L$ . Фиксируем элементы

$$p_1(\alpha), \dots, p_n(\alpha) \in S(I \times S^1) \cong \mathbb{C}[\alpha] \quad (31.1)$$

(здесь и в формулировке следующей теоремы мы используем основные определения и обозначения предыдущей главы).

**31.4. Теорема.** Пусть  $r \geq 3$  — натуральное число, а комплексное число  $a_0$  таково, что оно либо является примитивным корнем из единицы степени  $4r$ , либо  $r$  нечетно и  $a_0$  является примитивным корнем степени  $2r$ . Тогда комплексное число

$$W(M^3, L) = \langle p_1(\alpha), \dots, p_n(\alpha), \omega, \dots, \omega \rangle_{D_L \cup D_M} \langle \omega \rangle_{U_+}^{-b_+} \langle \omega \rangle_{U_-}^{-b_-} \quad (31.2)$$

является изотопическим инвариантом оснащенного зацепления  $L$  в многообразии  $M^3$ .

*Доказательство.* Прежде всего заметим, что число  $n$  определено инвариантно: оно равно количеству компонент данного зацепления  $L$ . Доказательство инвариантности числа (31.2) относительно допустимых преобразований зацепления  $L_L \cup L_M$  проводится, в основном, точно так же, как и доказательство теорем 29.4 и 29.6. Единственное дополнительное рассуждение заключается в следующем. При вторых преобразованиях Кирби никогда не приходится добавлять ленты, параллельные компонентам зацепления  $L_L$ . Это означает, что их можно пометить не только элементом  $\omega$ , но и произвольными элементами  $p_1(\alpha), \dots, p_n(\alpha) \in S(I \times S^1)$ .  $\square$

**31.5. Замечание.** Формула (31.2) определяет не один инвариант, а целую бесконечную серию инвариантов, со следующими варьируемыми параметрами:

- (1) комплексное число  $a_0$ , удовлетворяющее одному из двух условий, сформулированных в теореме 31.4;
- (2) набор  $n$  элементов (31.1) из алгебры  $S(S^1 \times I)$ .

В настоящее время мало известно о том, сколь хорошо различают эти инварианты зацепления в фиксированном многообразии. Не изучена также их связь с численными значениями полинома  $X(L)$  из предыдущего параграфа (в случае  $M^3 = \mathbb{R}P^3$ ).

## §32. Узлы и физика

В этом параграфе, написанном скорее в стиле эссе, чем как обзор, мы пытаемся пояснить связи между физикой и содержанием этой книги. Здесь не будет ни точных формулировок, ни доказательств; наша цель — не рассказать об основных достижениях современной математической физики, связанной с топологией, а указать на те конкретные места теории, которые служат причиной воистину таинственных и завлекательных совпадений между различными топологическими инвариантами и некоторыми величинами в физических моделях. Прежде чем начать наше изложение, мы хотим подчеркнуть два обстоятельства:

- Мы считаем, что сейчас еще рано судить о значимости и даже о применимости к реальному миру тех моделей, которые недавно здесь появились, например, в квантовых полевых теориях. История теории струн (которая, по нашему мнению, привела к построению очень красивой математики, но на сегодняшний день не сумела доказать свою причастность к реальной действительности) показывает, что словосочетание «приложения к физике» как характеристику современных работ (даже таких выдающихся ученых, как Атья и Виттен) не следует понимать слишком буквально.

- С другой стороны, отсутствие конкретных практических приложений к экспериментальной физике не делает удивительные связи, которые здесь появились (пусть даже рас-

сматриваемые «лишь» как связи между различными ветвями «чистой» математики) менее интересными.

**32.1. Уравнение Янга–Бакстера и топология.** Бесспорно, начальная точка связи между физикой и современными работами по теории инвариантов узлов состоит в наблюдении того, что уравнение Янга–Бакстера (фундаментальный закон как в статистической, так и в квантовой физике) также появляется в трехмерной топологии в разных ипостасях. Именно, в некотором формальном смысле уравнение Янга–Бакстера «совпадает» с соотношением Артина в теории кос (см. §5) и с третьей операцией Рейдемейстера (см. §1). Прежде чем обсудить это совпадение, поясним (с математической точки зрения), что такое уравнение Янга–Бакстера.

Пусть  $V$  — конечномерное векторное пространство с базисом  $e_1, \dots, e_n$  над полем  $F$  (на самом деле, можно рассматривать более общую ситуацию свободного модуля над коммутативным кольцом). Пусть  $R : V \otimes V \rightarrow V \otimes V$  — автоморфизм. Рассмотрим эндоморфизм

$$R_i = 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes R \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n},$$

где  $V^{\otimes n}$  обозначает  $n$ -кратное тензорное произведение (над  $F$ ) и в выражении для  $R_i$  автоморфизм  $R$  действует на компоненту  $(i, i + 1)$ . Тогда  $R$  называется *оператором Янга–Бакстера* (или  *$R$ -матрицей*), если он удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} R_i R_{i+1} R_i &= R_{i+1} R_i R_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 1 \\ R_i R_j &= R_j R_i, \quad |i - j| \geq 2. \end{aligned} \quad (32.1)$$

Первое из этих соотношений называется *уравнением Янга–Бакстера*, в то время, как второе представляет собой *дальнюю коммутативность* для эндоморфизмов  $R_1, \dots, R_{n-1}$ .

Физический смысл операторов Янга–Бакстера будет кратко описан в следующем пункте, а пока мы обсудим их связь с трехмерной топологией. Читатель наверняка заметил формальное совпадение между соотношением (32.1) и соотношениями, задающими группу кос (см. (5.1) и (5.2)): поменяв букву  $R$  на букву  $b$  или наоборот, мы переходим от одного к другому. Формальное сходство между уравнением Янга–Бакстера и третьей операцией Рейдемейстера, скорее графич-



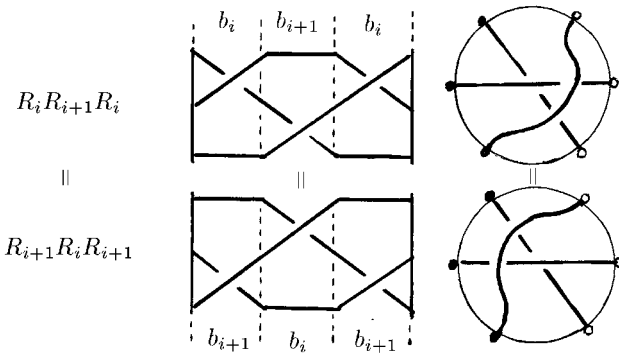


Рис. 32.1

ческое, чем алгебраическое, показано на рис. 32.1.

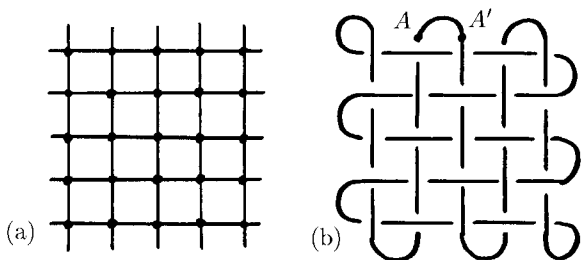
Естественно ожидать, что формальные совпадения, указанные выше, приводят к существенным взаимодействиям между теориями, из которых они происходят. Так оно и есть, и это будет объяснено ниже. В заключении этого раздела, укажем на чисто математическую связь между операторами Янга–Бакстера и инвариантами узлов.

Можно показать (см. [Dri1-2]), что любое неприводимое представление простой алгебры Ли может быть использовано для построения R-матрицы, и, в свою очередь, по любой R-матрице  $R : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$  можно построить инвариант узлов следующим простым способом (придуманным Владимиром Тураевым). Сначала R используется для определения представления группы кос  $\rho : B_n \rightarrow V^{\otimes n}$  по естественной формуле  $\rho(b_i) = R_i$ , где  $b_i$  суть стандартные образующие группы  $B_n$ . (Эта формула действительно задает представление именно потому, что определяющие соотношения группы кос совпадают с уравнениями (32.1), определяющими операторы Янга–Бакстера.) Затем, для данного зацепления (в частности узла)  $L$  мы находим косу  $b \in B_n$ , чье замыкание — зацепление  $L$  (такая коса существует по теореме Александра из §6), и полагаем  $T(L) = \text{trace}(\rho(b))$ . Легко показать (используя теорему Маркова, §6), что число  $T(L)$  корректно определено и действительно является инвариантом зацеплений. В частности, если простая алгебра Ли, с которой мы начали, есть  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , тогда инварианты Джонса (численные значения полиномов Джонса) могут быть получены таким образом.

Разумеется, описанная конструкция — чисто математическая, но следует отметить, что основные ее составляющие (уравнения Янга–Бакстера и их решения, полученные посредством представлений алгебр Ли) придуманы физиками.

**32.2. Две физические интерпретации уравнений Янга – Бакстера.** Уравнение Янга–Бакстера происходит из двух совсем независимых разделов физики. Один из них — статистическая физика (а точнее, теория точно решаемых двумерных дискретных моделей) и квантовая механика (одновременное взаимодействие трех квантовых частиц в одномерной модели).

Для детального изложения теории моделей на решетке (среди которых модель Изинга наиболее популярна) мы отсылаем к классической монографии [Вах]. Пример (своеобразной!) модели на решетке был описан при доказательстве существования скобки Кауфмана: тень любого плоского зацепления — это плоский граф, чьи вершины можно представить как *частицы* двумерной среды (*модели*), а ребра отвечают *взаимодействиям* между частицами, выбор угла типа *A* или *B* в вершинах — это приписывание *спина* соответствующей частице, выбор спинов во всех вершинах — это *состояние* модели; наконец, скобка Кауфмана — это *статистическая сумма* модели (основное орудие, используемое физиками во многих моделях для подсчета *полной энергии, температуры, фазовых переходов*, и др.).



**Рис. 32.2**

Разумеется, модель Кауфмана не описывает какую-либо известную физическую реальность, она лишь похожа (и то отдаленно) на модели, рассматриваемые физиками. Наглядно это сходство изображено на рис. 32.2, на котором квадратная

решетка (статистическая модель) на плоскости сопоставлена с некоторым узлом. Стоит отметить, что идея соединить некоторые далекие точки (например, точки  $A$  и  $A'$  на рисунке 32.2(в)), которая может показаться физически противостественной, как раз придумана физиками (во избежание «граничных эффектов») задолго до установления связей с теорией узлов. Таким образом, квадратной решетке со спинами можно сопоставить узел (или зацепление), топологические инварианты которого (возможно, не лишенные физического смысла) могут быть вычислены.

Если смотреть на отмеченную связь в противоположном направлении (от физики к теории узлов), следует отметить, что одна из классических двумерных моделей статистической физики может фактически быть использована (так, как мы использовали модель Кауфмана в §3) для определения полинома Джонса. Эта модель — *модель Поттса*, описывающая «двумерный лед»\* (в этой модели фазовый переход — это попросту замерзание воды или таяние льда). Для более подробного изложения см. [Jon3].

Вторая физическая интерпретация уравнения Янга–Бакстера связана с взаимодействием трех квантовых частиц на прямой (одномерное пространство или двумерное пространство–время). Мы опишем эту ситуацию очень кратко. Теперь следует рассматривать так называемое *квантовое уравнение Янга–Бакстера*, имеющее вид

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}. \quad (32.2)$$

Здесь матрицы  $R_{ij}$  получены из фиксированной матрицы  $R$ , задающей автоморфизм  $R : V^{\otimes n^2} \rightarrow V^{\otimes n^2}$  (например,  $R_{12} = R \otimes I_n$ , где  $I_n$  — единичная матрица  $n \times n$ ). Решение уравнения (32.2) называется *квантовой R-матрицей*. Матрица  $R_{ij}$  отвечает взаимодействию  $i$ -ой и  $j$ -ой частицы, а уравнение в целом описывает квантово-механический процесс на прямой при котором первая частица меняется местами с тре-

---

\* Конечно же, настоящий лед трехмерен, но лишь двумерную модель льда удалось разрешить физикам; к тому же, тени зацеплений тоже плоскостные.

твей, в то время как вторая остается в итоге между ними. Это может произойти двумя разными способами:

- (1) первая  $\leftrightarrow$  вторая, затем первая  $\leftrightarrow$  третья, наконец, вторая  $\leftrightarrow$  третья;
- (2) вторая  $\leftrightarrow$  третья, затем первая  $\leftrightarrow$  третья, наконец первая  $\leftrightarrow$  вторая.

Уравнение (32.2) говорит нам, что результат этих двух процессов одинаков (на самом деле, в соответствии с принципом Гейзенберга, мы не можем узнать, какой именно процесс произошел).

Сравнивая уравнение (32.2) с рис. 32.1(в), мы видим, что это уравнение не что иное, как очередной способ записи соотношения Артина для кос (при  $n = 3$ ): первая нить проходит над второй ( $R_{12}$ ), затем вторая над третьей ( $R_{13}$ ) и т.д. Так же как в классическом уравнении Янга–Бакстера (32.1), это не просто формальное совпадение: квантовое уравнение Янга–Бакстера может быть использовано для определения инвариантов узлов и зацеплений (см. например, [Naz]).

Здесь было бы естественно перейти к определению *квантовой группы*, но мы предварим наш краткий рассказ об этом фундаментальном понятии некоторыми начальными сведениями из классической и квантовой механики для читателей, не знакомых с этими разделами математической физики.

**32.3. Инварианты как наблюдаемые: классический и квантовый случаи.** Основная математическая модель классической механики —  $2n$ -мерное симплектическое многообразие  $M$  (*фазовое пространство*). Точки многообразия  $M$  — это *состояние системы* (в простейшем случае состояние — это положение движущейся точки вместе с ее скоростью  $s = (x(t), \dot{x}(t))$ ), так что  $M$  является тотальным пространством  $T(N) = M$  касательного расслоения  $n$ -мерного многообразия  $N$ , называемого *конфигурационным пространством*. Симплектическая структура порождает умножение (*скобку Пуассона*) в пространстве функций на  $M$ , и *наблюдаемые* суть функции на  $M$  образующие коммутативную алгебру относительно этой скобки. Эволюция системы во времени зависит от выбора *лагранжиана*  $L$  (функционала от состояний, подлежащего минимизации), удовлетворяющего *урав-*

нению Эйлера–Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i(t)} = 0.$$

Эквивалентная (дуальная) конструкция получается, если рассматривать *импульсы*  $p_i = m\dot{x}_i$ , т.е. ковекторы (элементы кокасательного пространства  $T^*(N)$ ) вместо векторов (скорости), и заменить уравнения Эйлера–Лагранжа на *уравнения Гамильтона*

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

В квантовой механике *состояния* уже не образуют конечномерное многообразие, они суть точки Гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ . С физической точки зрения состояние уже не является парой (точка, скорость), а представляет собой функцию (плотность), описывающую вероятность того, что частица расположена в данном положении и движется с данной скоростью. *Наблюдаемые* теперь являются операторами из  $\mathcal{H}$  в  $\mathcal{H}$ , они составляют некоммутативную алгебру относительно обычного коммутатора  $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$ . Выбор пространства  $\mathcal{H}$  и алгебры наблюдаемых зависит от конкретной рассматриваемой физической модели.

В простейшем случае,  $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$ , алгебра наблюдаемых удовлетворяет некоторым простым антикоммутативным соотношениям, и эволюция состояния  $\varphi$  удовлетворяет *уравнению Шрёдингера*

$$i \frac{d\varphi}{dt} = \hat{H} \varphi,$$

где  $\hat{H}$  — оператор с энергией  $H$  (*гамильтониан* конкретной функции, зависящий от специфики физической задачи).

Этот подход (и его обобщения), в котором рассматриваются наблюдаемые и который зависит от выбора гамильтониана называют *гамильтоновым*, в отличие от дуального *лагранжевого* подхода, который основан на минимизации некоторого функционала, называемого *лагранжианом*. Квантовые группы — это уточнение и развитие алгебр наблюдаемых в квантовой механике, и, значит, они следуют гамильтоновой

идеологии. (Мы вернемся к лагранжевому подходу после обсуждения квантовых групп.)

**32.4. Квантовые группы и другие биалгебры.** Квантовые группы появились в работах Л.Фаддеева и его школы в результате квантования обратной задачи рассеяния (см. [FRT]), приведшей к появления квантового уравнения Янга–Бакстера. Решающую роль сыграл вклад М.Джибо (см. [Jim1-2]). Алгебраическая теория квантовых групп развивалась Владимиром Дринфельдом, который ввел понятие *квазитреугольных* квантовых групп, связывающих квантовую теорию с теорией узлов посредством уравнения Янга–Бакстера. Мы не даем здесь формального определения квантовой группы и не излагаем начал соответствующей теории, отсылая читателя к любой из недавно появившихся монографий на эту тему (например, [Kau4], [Tur3], [Ati1], [Kas], [BM], [Fu], [CP], [Lus], [Mon]). Ниже представлен лишь набросок, в основном поясняющий связь с теорией инвариантов узлов.

Квантовые группы — это не группы, а алгебры, более того — *алгебры Хопфа*, т.е. алгебры  $A$  с единицей, снабженные дополнительной структурой: коумножением (отображением  $A \rightarrow A \otimes A$ ), *коединицей* и антигомоморфизмом  $S : A \rightarrow A$  которые удовлетворяют некоторым естественным коммутационным соотношениям. Грубо говоря, для построения квантовой группы можно начать с группы Ли  $G$  (чьи элементы — *состояния* модели) и со скобки Пуассона на алгебре  $A$  комплекснозначных функций на  $G$  (*наблюдаемые*). Умножение в  $G$  определяет по двойственности коумножение в  $A$ . Чтобы квантовая группа была квазитреугольной, ее элементы должны удовлетворять *треугольному соотношению* (из которого следует уравнение Янга–Бакстера). В этом случае конкретные представления группы  $G$  не только дают значимую информацию о состояниях и наблюдаемых, но приводят к новым инвариантам зацеплений в соответствии с общей конструкцией, описанной в пункте 32.1.

Следует отметить, что инварианты Васильева, хотя они не происходят от квантовых групп, имеют естественную структуру биалгебры (коумножение происходит от связной суммы узлов). Имеется целый ряд других интересных биалгебр, связанных с инвариантами Васильева, в частности, биалгебры,

появляющиеся в связи с интегралом Концевича и полиномами Татта (см. [CDL], [BN]).

Таким образом, алгебраический формализм квантовых групп, мотивированный физическими соображениями, оказался полезным для трехмерной топологии. Но, обратно, чем же трехмерная топология помогает физике? Прежде чем ответить на этот вопрос, мы кратко обсудим подход к физическим моделям, в основном придуманный Э. Виттеном, и в некотором смысле двойственный гамильтоновому подходу Дринфельда.

**Лагранжевый подход Виттена.** Чтобы разобраться в работах Виттена, нужно знать очень много физики и математики (теорию струн, римановы поверхности и геометрическое квантование, неабелевы калибровочные теории и аффинные связности, инстантоны и магнитные монополи как решения уравнения Янга–Миллса, квантовую хромодинамику, теорему Атья–Зингера, конформную теорию поля и т.п.). Здесь мы только наметим первоначальное «физическое» определение инвариантов узлов и зацеплений в трехмерных многообразиях, математический вариант которого был описан в предыдущем параграфе (§31).

Рассмотрим ориентируемое зацепление  $L = \cup_i K_i$  в ориентируемом трехмерном многообразии  $M$  (это многообразие —  $(2 + 1)$ -мерное *пространство-время*, его точки — *состояния*, а компоненты  $K_i$  зацепления  $L$  — *линии Вилсона*. Выбрав *связность*  $A$  (некоторую 1-форму на  $M$ ; см., например [KN, Ch.III, §3]), Виттен рассматривает следующий лагранжиан Черна–Саймонса:

$$L_{CS}(A) = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{Tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right),$$

где  $k$  — фиксированное натуральное число и  $\text{Tr}$  — след (определенный формой Киллинга). Оказывается, что  $L_{CS}(A)$  корректно определено (не зависит от выбора метрики); мотивировка выбора именно 3-формы  $A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A$  состоит в том, что эта форма — единственная комбинаторно инвариантная форма на  $M$ .

После этого Виттен определяет свой инвариант, полагая

$$W_L(M, k) = \int_A \left( \exp(ikL_{CS}(A)) \prod_i \text{Tr} \exp \int_{K_i} A \right) DA. \quad (32.3)$$

В случае сферы  $M = S^3$  получается следующая связь с полиномом Джонса  $V_L(q)$ :

$$W_L(M, k) = V_L(e^{2\pi i/k}).$$

К сожалению, с математической точки зрения, определение (32.3) не имеет смысла, ибо нет меры на множестве всех связностей на  $A$  и  $M$ , и внешний интеграл « $DA$ » не имеет точного математического смысла. Однако этот «интеграл» можно вычислить (асимптотическими методами с помощью *фейнмановских интегралов*), и поэтому он устраивает физиков.

Мы не станем объяснять физический смысл определения (32.3). Отметим, однако, что интеграл Виттена — это усреднение «по всем связностям», так что  $W_L(M, k)$  похож на статистическую сумму (обычно обозначаемую  $Z_L(M, k)$ ). Читатель, быть может, заметит некоторое сходство с дискретной статистической суммой, использованной для определения скобки Кауфмана в §3, хотя это сходство довольно отдаленное.

### 32.6. Топологические квантовые полевые теории.

В развитии формализмов полевых теорий, характерно постепенное обобщение свойств группы допустимых преобразований. Стремясь к надлежащей общности, преобразования менялись от сохраняющих метрику или псевдометрику (группа Лоренца в специальной теории относительности) до симплектоморфизмов и контактоморфизмов в классической механике, до различных пуассоновских отображений (сохраняющих разные варианты, включая квантово-механические, скобки Пуассона) или до отображений, сохраняющих суперструктуру, до отображений сохраняющих аффинные связности (этот шаг был первостепенной важности) и, в последние годы, до разных типов калибровочных преобразований. Топологические квантовые полевые теории (ТКПТ) идут еще дальше, допуская произвольные диффеоморфизмы. Следовательно, инварианты этих теорий (которые должны обладать физическим смыслом) должны быть инвариантами диффеоморфизмов. Так как топология (по крайней мере дифференциальная топология) как раз занимается подобными инвариантами, не удивительно, что физики стали искать что-то вроде инвариантов узлов, или разных инвариантных следов, дискретных



и непрерывных статистических сумм и т.п. И, как правило, были удовлетворены всем, что бы они не находили.

Основные современные идеи, связанные с ТКПТ, идут от Виттена (см. [Wit1]), но их формальное математическое построение впервые появились в работах Атья ([Ati2–3]), а более систематическое изложение (отнюдь не легкое чтение!) в его же книге ([Ati1]). В соответствии с этим подходом, ТКПТ в размерности  $d$  представляет собой функтор  $Z$ , который каждому  $(d + 1)$ -мерному многообразию с границей  $\Sigma = \partial Y$  сопоставляет пару  $Z(Y) \in Z(\Sigma)$ , где  $Z(Y)$  – вектор («статистическая сумма»), а  $Z(\Sigma)$  – конечномерное комплексное векторное пространство («гильбертово пространство, полученное квантованием»). В аксиомах, которые мы здесь не перечисляем (см. [Ati1, стр.12]), участвуют инволюция в дуальном пространстве и умножение (порожденное несвязным объединением); из них вытекает, в частности, что для замкнутого  $(d + 1)$ -мерного многообразия  $Y$  вектор  $Z(Y)$  одномерен, т.е. попросту является комплексным числом. Именно такая ситуация рассматривается в §29, где  $d = 2$ , и  $Z(Y)$  представляет собой инвариант Виттена трехмерного многообразия («содержавшего пустое зацепление»).

Для более общей ситуации, в которой дано непустое зацепление в многообразии без края (как в §31 выше), также имеется подходящая аксиоматизация, «относительная» версия функтора Атья. Этот функтор теперь определен на тройках  $(Y, \Sigma, L)$ , где  $Y$  и  $\Sigma$  определены, как выше, а  $L$  – зацепление в  $Y$ , если  $\Sigma$  пусто, и система дуг (с концами в  $\Sigma = \partial Y$ ) и замкнутых кривых в  $Y$ , удовлетворяющих некоторым условиям трансверсальности при  $\Sigma \neq \emptyset$ . Эти аксиомы выполнены для инварианта Виттена при  $\Sigma = \emptyset$  (см. §31).

Таким образом мы видим, что инварианты, описанные в этой книге, рассматриваются многими физиками не только как полезные, но даже как фундаментальные объекты современной математической физики.

Тематика ТКПТ находится в стадии интенсивного развития, и вряд ли имеет смысл сейчас пытаться создать не отстающую от нынешнего дня библиографию. Мы назовем лишь две работы. Одна написана П. Вожелем и его учениками ([ВНМV]), а другая в соавторстве Л. Крейнором и Д. Йеттером

([CY]). Первую мы включили потому, что рассматриваемый в ней функтор основан на скобке Кауфмана (с которой мы начали наше изучение инвариантов узлов еще в §3), а вторую частично потому, что в ней участвует симплициальная конструкция, с которой мы начали изучение трехмерных многообразий (ср. наш рис. 8.3 с Fig. 1 в [CY]), но в основном по той причине, что авторам удается построить осмысленную теорию в случае  $d = 3$ , т.е. для четырехмерного пространства-времени, в котором, как считается, мы живем.

## Приложение

Это приложение содержит основной материал, который обычно включает любой вводный курс топологии и которым мы свободно пользовались в нашей книге. Мы предполагаем, что читатель будет обращаться к приложению в том случае, когда он не вполне уверен, что встретившееся ему понятие достаточно хорошо ему известно. Изложение здесь будет очень сжатым (нет ни доказательств, ни примеров), поэтому приложение не может заменить учебник. Отметим, однако, что весь представленный здесь материал подробно изложен в следующих трех вводных курсах, к которым мы отсылаем читателя.

- (1) Коснёвски Ч. *Начальный курс алгебраической топологии*. М.: Мир, 1983. (Эта книга содержит почти все предварительные сведения из топологии, необходимые для чтения нашей книги.)
- (2) Манкрс Дж. *Элементарная дифференциальная топология* (содержится как дополнение в книге Милнор Дж., Сташеф Дж. *Характеристические классы*. М.: Мир, 1979). (Эта книга содержит, в частности, доказательство триангулируемости гладких многообразий.)
- (3) Прасолов В.В. *Наглядная топология*. М.: МЦНМО, 1995. (Неформальное введение в теорию узлов и двумерных поверхностей.)

## §1. Топологические пространства

*Топологическим пространством* называют множество  $X$ , в котором выделена система подмножеств  $\tau$ , обладающая следующими свойствами:

- (1) пустое множество и всё множество  $X$  принадлежат  $\tau$ ;
- (2) пересечение конечного числа элементов  $\tau$  принадлежит  $\tau$ ;
- (3) объединение любого семейства элементов  $\tau$  принадлежит  $\tau$ .

Систему  $\tau$  называют *топологией* на множестве  $X$ . Множества, принадлежащие  $\tau$ , называют *открытыми*. *Окрестностью* точки  $x \in X$  называют любое открытое множество, содержащее  $x$ . Множества, дополнения которых открыты, называют *замкнутыми*.

Любое подмножество  $Y \subset X$  превращается в топологическое пространство с *индуцированной топологией*, если определить его открытые множества, как пересечения  $Y$  с открытыми подмножествами  $X$ .

Отображение одного топологического пространства в другое называют *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт. Отображение  $f : X \rightarrow Y$  называют *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и оба отображения  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны; пространства  $X$  и  $Y$  называют в таком случае *гомеоморфными* или *топологически эквивалентными*.

Понятие топологического пространства включает необозримо широкий класс объектов. Но в нашей книге речь идет лишь о достаточно хороших топологических пространствах, а именно, о многообразиях. Их определение будет дано ниже.

Топологическое пространство  $X$  называют *компактным*, если любое *открытое покрытие*  $X$  (т.е. любой набор открытых подмножеств  $X$ , объединение которых совпадает с  $X$ ) содержит конечное подпокрытие.

Топологическое пространство называют *отделимым* или *хаусдорфовым*, если любые две его различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Топологическое пространство называют *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых не-

пересекающихся множеств, каждое из которых одновременно открыто и замкнуто. В том случае, когда топологическое пространство представляет собой объединение нескольких непустых непересекающихся подмножеств, каждое из которых открыто, замкнуто и связно, эти подмножества называют *компонентами связности* данного пространства.

*Отношением эквивалентности* на множестве  $X$  называют подмножество  $R \subset X \times X$ , обладающее следующими свойствами:

- (1)  $(x, x) \in R$  при всех  $x \in X$ ;
- (2) если  $(x, y) \in R$ , то  $(y, x) \in R$ ;
- (3) если  $(x, y) \in R$  и  $(y, z) \in R$ , то  $(x, z) \in R$ .

В том случае, когда  $R \subset X \times X$  — отношение эквивалентности, элементы  $x$  и  $y$ , для которых  $(x, y) \in R$ , называют *эквивалентными*; для эквивалентных элементов используют обозначение  $x \sim y$ .

При заданном отношении эквивалентности  $R$  множество  $X$  разбивается на попарно не пересекающиеся множества эквивалентных друг другу элементов; эти множества называют *классами эквивалентности*. Множество  $X/\sim$ , элементами которого служат классы эквивалентности, называют *фактормножеством* множества  $X$  по отношению эквивалентности  $\sim$ . Сопоставив каждому элементу  $x \in X$  содержащий его класс эквивалентности, получим отображение  $p : X \rightarrow X/\sim$ , которое называют *проекцией*. Если  $X$  — топологическое пространство, то множество  $X/\sim$  можно превратить в топологическое пространство, считая открытыми те его подмножества, прообразы которых при отображении  $p$  открыты в пространстве  $X$ . Полученное таким образом топологическое пространство называют *факторпространством* пространства  $X$  по отношению эквивалентности  $\sim$ .

Один из способов задания отношения эквивалентности на множестве  $X$  связан с действием группы на этом множестве. Будем говорить, что группа  $G$  *действует* на множестве  $X$ , если каждой паре  $(g, x) \in G \times X$  сопоставлен элемент  $gx \in X$  так, что  $g(hx) = (gh)x$  и  $1x = x$ , где  $1$  — единичный элемент группы  $G$ . *Орбитой* элемента  $x \in X$  называют множество всех элементов  $gx$ ,  $g \in G$ . Действие группы  $G$  на множестве  $X$  определяет следующее отношение эквивалентности на

множестве  $X$ : эквивалентными считаются те элементы, которые принадлежат одной и той же орбите. В том случае, когда  $X$  — топологическое пространство, соответствующее факторпространство называют *факторпространством  $X$  по действию  $G$*  или *пространством орбит* действия  $G$  на  $X$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  — топологические пространства, не имеющие общих элементов,  $A$  — подмножество в  $X$ , а  $f : A \rightarrow Y$  — непрерывное отображение. На множестве  $X \cup Y$  введем следующее отношение эквивалентности:  $a \sim f(a)$ . Факторпространство  $(X \cup Y)/\sim$  обозначают  $X \cup_f Y$ ; процедуру построения этого пространства называют *приклеиванием  $X$  к  $Y$*  по отображению  $f$ .

На прямом произведении  $X \times Y$  топологических пространств  $X$  и  $Y$  (рассматриваемых как множества) можно задать *топологию прямого произведения*. Для этого нужно считать открытыми множествами в  $X \times Y$  прямые произведения открытых множеств в  $X$  и  $Y$ , а также их всевозможные объединения.

Отображения  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  называют *гомотопными*, если существует такое непрерывное отображение  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , что  $F(x, 0) = f_0(x)$  и  $F(x, 1) = f_1(x)$  для всех  $x \in X$ . Иными словами, отображения  $f_0$  и  $f_1$  можно связать семейством непрерывных отображений  $f_t : X \rightarrow Y, t \in [0, 1]$ , непрерывно зависящих от  $t$ . Это семейство отображений называют *гомотопией*, соединяющей  $f_0$  и  $f_1$ .

Топологические пространства  $X$  и  $Y$  называют *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие непрерывные отображения  $f : X \rightarrow Y$  и  $g : Y \rightarrow X$ , что отображения  $g \circ f$  и  $f \circ g$  гомотопны отображениям пространств  $X$  и  $Y$  соответственно.

*Изотопией* подпространств  $A$  и  $B$  топологического пространства  $X$  называют такую гомотопию  $f_t : A \rightarrow X$ , что  $f_0$  — это тождественное вложение  $A \hookrightarrow X, f_1(A) = B$ , причем отображение  $f_t$  представляет собой гомеоморфизм  $A$  на  $f_t(A)$  при всех  $t \in [0, 1]$ .

## §2. Многообразия.

### Клеточные и симплициальные разбиения

Если  $X$  — топологическое пространство с топологией  $\tau$ , то базой топологии  $\tau$  называют такое подмножество  $\tau' \subset \tau$ , что любой элемент  $\tau$  можно представить в виде объединения элементов  $\tau'$ . Иными словами,  $\tau'$  — такое семейство открытых множеств, что любое открытое в  $X$  множество можно представить в виде объединения множеств из этого семейства. В том случае, когда хотя бы одна из баз топологического пространства  $X$  счетна,  $X$  называют пространством со счетной базой.

Чтобы задать топологию  $\tau$ , достаточно указать одну из баз этой топологии. Например, в пространстве  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  стандартная топология задается базой

$$U_{a,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| < \varepsilon\},$$

где  $a \in \mathbb{R}^n$  и  $\varepsilon > 0$ . Более того, можно считать, что все координаты точки  $a$  и число  $\varepsilon$  рациональны; в таком случае получим счетную базу.

Добавим к множеству  $\mathbb{R}^n$  элемент  $\infty$  и введем в полученном множестве  $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  топологию, базой которой служит база топологии пространства  $\mathbb{R}^n$ , дополненная семейством множеств

$$U_{\infty,R} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| > R\} \cup \{\infty\}.$$

Полученное таким образом топологическое пространство называют *одноточечной компактификацией* пространства  $\mathbb{R}^n$ ; можно доказать, что это пространство гомеоморфно  $n$ -мерной сфере

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}.$$

**Многообразия.** Хаусдорфово топологическое пространство  $M^n$  со счетной базой называют  *$n$ -мерным топологическим многообразием*, если любая точка  $x \in M^n$  имеет окрестность, гомеоморфную  $\mathbb{R}^n$  или  $\mathbb{R}_+^n$ , где

$$\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_1 \geq 0\}.$$

Множество тех точек  $x \in M^n$ , у которых нет окрестностей, гомеоморфных  $\mathbb{R}^n$ , называют *краем* многообразия  $M^n$  и обозначают  $\partial M^n$ . В том случае, когда  $\partial M^n = \emptyset$ , говорят, что  $M^n$  — *многообразие без края*. Можно проверить, что если край многообразия  $M^n$  не пуст, то он является  $(n-1)$ -мерным многообразием.

*Атласом* на топологическом многообразии  $M^n$  называют покрытие  $M^n$  открытыми множествами  $U_\alpha$ , гомеоморфными  $\mathbb{R}^n$ . Каждое такое множество  $U_\alpha$  вместе с гомеоморфизмом  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  называют *картой*. Топологическое многообразие  $M^n$  называют *дифференцируемым многообразием класса  $C^r$* , если на  $M^n$  существует такой атлас, что все отображения  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  дифференцируемы класса  $C^r$  на тех подмножествах, на которых они определены (т.е. на  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ ). Здесь  $r$  — натуральное число или  $\infty$ .

Пусть  $M^m$  и  $N^n$  — дифференцируемые многообразия класса  $C^r$ ,  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  и  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  — их атласы (класса  $C^r$ ). Отображение  $f : M^m \rightarrow N^n$  называют *дифференцируемым класса  $C^r$* , если все отображения  $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$  являются дифференцируемыми класса  $C^r$ .

Пусть  $f : M^m \rightarrow N^n$  — дифференцируемое отображение класса  $C^r$  дифференцируемых многообразий класса  $C^r$ , причем  $m \leq n$ . Отображение  $f$  называют *погружением* или *иммерсией*, если в каждой точке  $M^m$  ранг отображения  $f$  (точнее говоря, отображения  $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ) равен  $m$ . Погружение  $f : M^m \rightarrow N^n$ , отображающее  $M^m$  на  $f(M^m) \subset N^n$  гомеоморфно, называют *вложением*.

**Клеточные и симплициальные разбиения.** Каждому вектору  $v$  в линейном пространстве  $\mathbb{R}^n$  можно сопоставить точку (которую мы тоже будем обозначать  $v$ ) в аффинном пространстве  $\mathbb{R}^n$ , а именно, конец вектора  $v$  с началом в начале координат. Будем говорить, что точки  $v_0, v_1, \dots, v_m$  *линейно независимы*, если они не лежат в одной  $(m-1)$ -мерной аффинной плоскости, т.е. векторы  $v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0$  линейно независимы.

Если  $v_0, \dots, v_m$  — линейно независимые точки в  $\mathbb{R}^n$ , то множество концов векторов  $x = \sum t_i v_i$ , где  $t_i \geq 0$  и  $\sum t_i = 1$ , называют  *$m$ -мерным симплексом*.

Конец вектора  $(\sum v_i)/(m+1)$  называют *барицентром* сим-



плекса  $[v_0, \dots, v_m]$ . *Гранью* симплекса  $[v_0, \dots, v_m]$  называют симплекс вида  $[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}]$ , где  $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\}$  — любое подмножество множества  $\{v_0, \dots, v_m\}$ .

*Конечным симплициальным разбиением*  $K$  называют конечное множество симплексов в  $\mathbb{R}^n$ , обладающее следующими свойствами:

- (1) любая грань симплекса из  $K$  принадлежит  $K$ ;
- (2) пересечение любых двух симплексов из  $K$  служит гранью каждого из них (мы считаем, что пустое множество является симплексом размерности  $-1$ , причем оно служит гранью любого симплекса).

Объединение всех симплексов разбиения  $K$  называют *симплициальным комплексом* и обозначают  $|K|$ .

*Клеткой* в  $\mathbb{R}^n$  называют ограниченное подмножество, заданное системой линейных равенств и неравенства вида  $\sum a_i x_i \geq b$ . *Размерностью* клетки называют максимальную размерность аффинной плоскости, содержащей данную клетку. *Гранью* клетки называют подмножество клетки, полученное в результате замены одного или нескольких неравенств  $\sum a_i x_i \geq b$ , задающих клетку, равенствами  $\sum a_i x_i = b$ .

*Конечным клеточным разбиением*  $K$  в  $\mathbb{R}^n$  называют конечное множество клеток в  $\mathbb{R}^n$ , обладающее следующими свойствами:

- (1) любая грань клетки из  $K$  принадлежит  $K$ ;
- (2) пересечение любых двух клеток из  $K$  служит гранью каждой из них.

Объединение всех клеток разбиения  $K$  называют *клеточным комплексом* и обозначают  $|K|$ .

Пусть  $K$  — симплициальное разбиение,  $M$  — дифференцируемое многообразие класса  $C^r$ . отображение  $f : |K| \rightarrow M$  называют *дифференцируемым* класса  $C^r$ , если ограничение  $f$  на любой симплекс  $\Delta$  разбиения  $K$  имеет класс  $C^r$ . отображение  $f$  называют *невырожденным*, если ранг его ограничения на любой симплекс  $\Delta$  разбиения  $K$  равен размерности этого симплекса.

Невырожденное  $C^r$ -отображение  $f : K \rightarrow M$ , представляющее собой гомеоморфизм симплициального комплекса  $|K|$  на многообразие  $M$ , называют  *$C^r$ -триангуляцией* многообразия  $M$ . Можно доказать, что любое  $C^r$ -многообразие без

края обладает  $C^r$ -триангуляцией, а любую  $C^r$ -триангуляцию края можно продолжить до  $C^r$ -триангуляции всего многообразия (см. [Mun]).

Невырожденное  $C^r$ -отображение  $f : K \rightarrow M$ , представляющее собой гомеоморфизм симплициального комплекса  $|K|$  на его образ в многообразии  $M$ , называют *вложением*. Образ  $|K|$  в  $M$  называют при этом *вложенным подкомплексом*.

**Ориентация.** Атлас  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  дифференцируемого многообразия называют *ориентирующим*, если якобианы всех отображений  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ , где  $U_\beta \cap U_\alpha \neq \emptyset$ , положительны. Многообразию, обладающему ориентирующим атласом, называют *ориентируемым*.

Если выбран один из ориентирующих атласов многообразия  $M$ , то говорят, что на  $M$  задана *ориентация*. Для двух ориентирующих атласов  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  и  $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$  якобианы всех отображений  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  одновременно либо положительны, либо отрицательны. В первом случае говорят, что атласы *задают одну и ту же ориентацию*, а во втором случае говорят, что атласы *задают противоположные ориентации*.

Для многообразия  $M$  с заданной триангуляцией  $f : K \rightarrow M$  можно дать другое (эквивалентное) определение ориентированности. Будем говорить, что симплекс *ориентирован*, если его вершины упорядочены (занумерованы). При этом считается, что две нумерации задают одну и ту же ориентацию, если они получаются друг из друга четной подстановкой, а если две нумерации получаются друг из друга нечетной подстановкой, то они задают противоположные ориентации. Для граней размерности  $n - 1$  ориентированного симплекса размерности  $n$  можно определить *индуцированную ориентацию*. Для этого нужно выбросить первую вершину исходного  $n$ -мерного симплекса, а оставшиеся вершины расположить в прежнем порядке. Но в качестве первой вершины можно взять любую вершину, поэтому из нашего определения следует, что знак ориентации грани  $[x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n]$  (так мы обозначим грань, полученную при выбрасывании  $i$ -той вершины) отличается от знака индуцированной ориентации этой же грани на  $(-1)^{i-1}$ .

Будем говорить, что на триангулированном  $n$ -мерном многообразии задана *ориентация*, если все его  $n$ -мерные сим-

плексы ориентированы так, что индуцированные ориентации каждой  $(n - 1)$ -мерной грани, полученные из двух прилегающих к ней  $n$ -мерных симплексов, противоположны. Триангулированное  $n$ -мерное многообразие называют *ориентируемым*, если на нем можно задать ориентацию.

**Поверхности.** Поверхностью  $M$  мы называем компактное двумерное многообразие (возможно с краем). Если край  $\partial M$  пуст, то говорят, что поверхность  $M$  замкнута. Связной суммой двух поверхностей  $M$  и  $N$  называют поверхность  $M \# N$ , полученную в результате вырезания из  $M$  и  $N$  малых открытых дисков  $D_1$  и  $D_2$  и последующей приклейки  $M - D_1$  к  $N - D_2$  по гомеоморфизму  $h : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ . Если поверхность  $N$  представляет собой тор  $S^1 \times S^1$ , то подмножество  $N - D_2 \subset M \# N$  называют *ручкой*.

**Теорема о классификации поверхностей.** а) Замкнутая ориентируемая поверхность  $M$  полностью определяется числом своих ручек  $g$ , т.е.

$$M \in \{S^2, T^2 = S^1 \times S^1, T^2 \# T^2, \dots, \#_{i=1}^g T_i^2, \dots\}.$$

(б) Ориентируемая поверхность  $M$  с краем полностью определяется числом своих ручек  $g$  и числом дырок (т.е. компонент края)  $h$ .

(в) Неориентируемая замкнутая поверхность  $N$  представляет собой связную сумму  $g$  экземпляров проективной плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , т.е.

$$N \in \{\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2, \dots, \#_{i=1}^g \mathbb{R}P_i^2, \dots\}.$$

(г) Неориентируемая поверхность  $N$  с краем полностью определяется количеством  $g$  слагаемых  $\mathbb{R}P^2$ , входящих в связную сумму, и количеством дырок  $h$ .

**Касательные векторы.** Каждой точке  $x$  дифференцируемого многообразия  $M^n$  без края можно сопоставить  $n$ -мерное линейное пространство  $T_x M^n$  касательных векторов в точке  $x$ . Касательный вектор можно представлять себе как вектор скорости движения точки по многообразию. Аккуратное определение выглядит следующим образом. Пусть

$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M^n$  — дифференцируемое отображение, причем  $\gamma(0) = x$ , т.е.  $\gamma$  — кривая на многообразии  $M^n$ , проходящая через точку  $x$ . Каждой дифференцируемой функции  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  можно сопоставить число

$$D_\gamma(f) = \frac{d}{dt}(f(\gamma(t)))|_{t=0}.$$

Кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  будем считать эквивалентными, если  $D_{\gamma_1} = D_{\gamma_2}$ . Класс  $\xi$  эквивалентных кривых называют *касательным вектором* к многообразию  $M$  в точке  $x$ . Функционал  $D_\xi$ , соответствующий касательному вектору  $\xi$ , называют *производной по направлению вектора  $\xi$* . Касательный вектор, соответствующий функционалу  $D_\xi + D_\eta$  называют *суммой* векторов  $\xi$  и  $\eta$ .

### §3. Риманова метрика на многообразии

Пусть  $M$  — некоторое  $C^\infty$ -многообразие. Предположим, что на каждом касательном пространстве  $T_x M$  задано скалярное произведение  $(v, w)$ , причем это скалярное произведение гладко зависит от  $x$ , т.е. отображение  $v \mapsto (v, v)$  является отображением класса  $C^\infty$  многообразия  $TM$ , состоящего из всех касательных векторов к  $M$ , в  $\mathbb{R}$ . Тогда говорят, что на многообразии  $M$  задана *риманова метрика*.

Пусть  $M$  — многообразие с заданной римановой метрикой, а  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  — гладкая кривая на многообразии  $M$ . Тогда *длиной* кривой  $\gamma$  называют число

$$l = \int_a^b |\gamma'(t)| dt,$$

где  $|\gamma'(t)|$  — длина вектора скорости кривой  $\gamma$  в точке  $\gamma(t)$  (эта длина определяется с помощью заданного скалярного произведения). *Расстоянием* между точками  $x, y \in M$  называют точную нижнюю грань длин гладких кривых, соединяющих точки  $x$  и  $y$ .

Теперь можно определить  $\varepsilon$ -окрестность узла  $K$  в многообразии  $M^3$  (т.е. образа окружности при гладком вложении в  $M^3$ ) как множество точек, удаленных от  $K$  не более чем на  $\varepsilon$  (предварительно на  $M^3$  нужно задать риманову метрику).

## §4. Фундаментальная группа и накрытия

Пусть  $X$  — топологическое пространство с отмеченной точкой  $x_0 \in X$ . *Петлей* в пространстве  $X$  называют такое отображение  $f : I = [0, 1] \rightarrow X$ , что  $f(0) = f(1) = x_0$ . *Фундаментальной группой*  $\pi_1(X, x_0)$  называют множество классов гомотопных петель (при этом в процессе гомотопии должно сохраняться свойство  $f(0) = f(1) = x_0$ ). *Произведением* двух петель  $f$  и  $g$  называют петлю  $h = fg$ , заданную формулой

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t - 1) & \text{при } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Эта операция превращает множество  $\pi_1(X, x_0)$  в группу. Единичным элементом этой группы служит класс постоянной петли  $f : I \rightarrow x_0 \in X$ , а обратным элементом для класса петли  $f(t)$  служит класс петли  $g(t) = f(1 - t)$ .

Если пространство  $X$  *линейно связно* (т.е. любые две точки  $x_1, x_2 \in X$  можно соединить путем  $\alpha : I \rightarrow X$ ,  $\alpha(0) = x_1$ ,  $\alpha(1) = x_2$ ), то для любых двух точек  $x_1, x_2 \in X$  группы  $\pi_1(X, x_1)$  и  $\pi_1(X, x_2)$  изоморфны, причем изоморфизм задается формулой  $\gamma \mapsto \alpha\gamma\alpha^{-1}$ , где  $\alpha$  — путь, идущий из точки  $x_1$  в точку  $x_2$ . Поэтому фундаментальную группу линейно связного пространства  $X$  для краткости часто обозначают  $\pi_1(X)$ , опуская отмеченную точку  $x_0$ .

Непрерывное отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$  линейно связных пространств, переводящее отмеченную точку в отмеченную точку, индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп  $\varphi_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ , который переводит гомотопический класс петли  $f : [0, 1] \rightarrow X$  в гомотопический класс петли  $\varphi f : [0, 1] \rightarrow Y$ .

Фундаментальную группу часто бывает удобно задавать посредством образующих и соотношений. Для того чтобы дать формальное определение группы, заданной образующими и соотношениями, нам потребуется понятие *свободной группы*  $F_n$  с  $n$  образующими  $a_1, \dots, a_n$ ; группа  $F_n$  состоит из слов  $w = a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ , где  $\varepsilon = \pm 1$  причем в слове  $w$  нет сочетаний букв  $a_i a_i^{-1}$  и  $a_i^{-1} a_i$ . *Произведением* слов  $w_1$  и  $w_2$  называют слово  $w_1 w_2$ , полученное в результате записи слова

$w_2$  после слова  $w_1$  и последующих сокращений всех возникших сочетаний  $a_i a_i^{-1}$  и  $a_i^{-1} a_i$ . Пустое слово является единичным элементом группы  $F_n$ .

Пусть  $w_1, \dots, w_k$  — некоторые слова, составленные из букв  $a_1^{\pm 1}, \dots, a_n^{\pm 1}$ . Группой с образующими  $a_1, \dots, a_n$  и соотношениями  $w_1, \dots, w_k$  называют факторгруппу  $G = F_n/H$ , где  $F_n$  — свободная группа с образующими  $a_1, \dots, a_n$ ,  $H$  — минимальная нормальная подгруппа, содержащая элементы  $w_1, \dots, w_k$ . Группу  $G$  обычно обозначают при этом

$$\langle a_1, \dots, a_n \mid w_1, \dots, w_k \rangle.$$

Непрерывное отображение  $p : T \rightarrow X$  называют *накрытием*, если у любой точки  $x \in X$  есть окрестность  $U$ , для прообраза которой  $p^{-1}(U)$  существует гомеоморфизм  $h_U$  на  $U \times \Gamma$ , где  $\Gamma$  — дискретное множество, причем выполняется соотношение коммутативности  $\pi \circ h_U = p$ , где  $\pi : U \times \Gamma \rightarrow U$  — естественная проекция.

Предположим, что  $T$  и  $X$  линейно связны. Тогда для любого пути  $\gamma : I \rightarrow X$  и для любой точки  $\tilde{x} \in p^{-1}(\gamma(0)) \subset T$  существует единственный путь  $\tilde{\gamma}$  с началом в точке  $\tilde{x}$ , покрывающий путь  $\gamma$ , т.е.  $p(\tilde{\gamma}(s)) = \gamma(s)$  при всех  $s \in I$ . При этом, если пути  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  с общим началом  $x_0 = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$  гомотопны и гомотопия оставляет неподвижными их концы, то покрывающие их пути, выходящие из одной точки  $\tilde{x}$ , приходят в одну точку, т.е.  $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$ .

Можно доказать, что если конечная группа  $G$  действует на многообразии  $M$  без неподвижных точек, то естественная проекция  $p : M^n \rightarrow M^n/G$  на пространство орбит является накрытием. В таком случае пространство орбит  $M^n/G$  является многообразием.

# Решения задач

## Глава 1

1.1. См.рис. P1.1.



Рис. P1.1

1.2–1.4. Мы советуем сделать из одной или нескольких веревок данный узел или зацепление, расположить его на столе в виде данной диаграммы, а затем попытаться получить из него другую диаграмму.

1.5. При повороте ориентированного трилистника на  $180^\circ$  вокруг оси  $l$  (рис. P1.2) ориентация меняется на противоположную.



Рис. P1.2

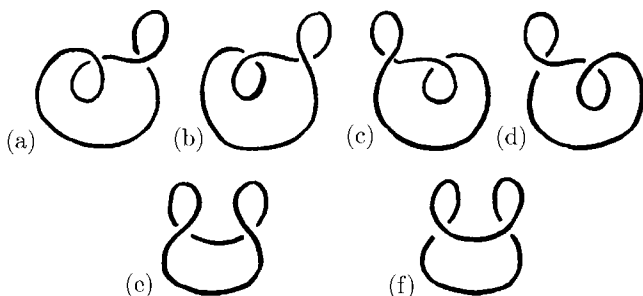


Рис. P2.1

**2.1.** Взаимоуничтожаются 6 пар последовательных петелек (из 16 возможных), а именно, те, что изображены на рис. P2.1.

Первые четыре ((a)–(d)) уничтожаются посредством трюка Уитни, а две оставшиеся пары уничтожаются посредством преобразования Рейдемейстера  $\Omega_2$ .

**2.2.** На сфере взаимоуничтожаются 8 пар. К шести парам, уничтожающимся на плоскости, добавляются еще две пары, изображенные на рис. P2.2. Они уничтожаются посредством трюка на сфере, после которого делается преобразование Рейдемейстера  $\Omega_2$ .

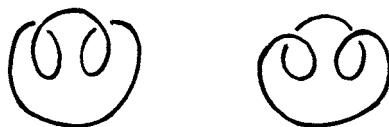


Рис. P2.2

**2.3.** Прежде всего отметим, что краем скрученной ленты служит трилистник. После первого разреза получим двустороннюю поверхность, ограниченную двумя трилистниками (которые зацеплены друг с другом). После второго разреза получим две двусторонние ленты в виде трилистника, которые будут зацеплены друг с другом. Разрезав обе эти ленты, получим 4 двусторонние ленты в виде трилистника, зацепленные друг с другом. На  $n$ -м шаге получим  $2^{n-1}$  зацепленных лент в виде трилистника.



## Глава 2

- 3.1.** (а)  $a^8 - a^4 + 1 - a^{-4} + a^{-8}$ ;  
 (б)  $-a^{11} + 2a^7 - a^3 + 2a^{-1} - a^{-5} - a^{-9}$ .

**3.3.** Объединение перекрестков диаграмм  $L_1$  и  $L_2$  совпадает с множеством перекрестков как диаграммы  $L_1 \# L_2$ , так и диаграммы  $L_1 \sqcup L_2$ . Поэтому каждой паре состояний  $s_1$  и  $s_2$  диаграмм  $L_1$  и  $L_2$  можно сопоставить состояние  $s_{\#}$  диаграммы  $L_1 \# L_2$  и состояние  $s_{\sqcup}$  диаграммы  $L_1 \sqcup L_2$ . Положим для краткости  $\alpha_1 = \alpha(s_1)$ ,  $\alpha_{\#} = \alpha(s_{\#})$  и т.д. Ясно, что  $\alpha_{\#} = \alpha_{\sqcup} = \alpha_1 + \alpha_2$  и  $\beta_{\#} = \beta_{\sqcup} = \beta_1 + \beta_2$ . Кроме того,  $\gamma_{\#} = \gamma_1 + \gamma_2 - 1$  и  $\gamma_{\sqcup} = \gamma_1 + \gamma_2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \langle L_1 \# L_2 \rangle &= \sum_{s_{\#}} s_{\#} a^{\alpha_{\#}} b^{\beta_{\#}} c^{\gamma_{\#}-1} = \sum_{s_1, s_2} a^{\alpha_1 + \alpha_2} b^{\beta_1 + \beta_2} c^{\gamma_1 + \gamma_2 - 2} = \\ &= \left( \sum_{s_1} a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1 - 1} \right) \left( \sum_{s_2} a^{\alpha_2} b^{\beta_2} c^{\gamma_2 - 1} \right) = \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\langle L_1 \sqcup L_2 \rangle = c \sum_{s_1, s_2} a^{\alpha_1 + \alpha_2} b^{\beta_1 + \beta_2} c^{\gamma_1 + \gamma_2 - 2} = c \langle L_1 \rangle \langle L_2 \rangle.$$

Ясно также, что

$$w(L_1 \# L_2) = w(L_1 \sqcup L_2) = w(L_1) + w(L_2),$$

поэтому

$$X(L_1 \# L_2) = X(L_1)X(L_2) \quad \text{и} \quad X(L_1 \sqcup L_2) = cX(L_1)X(L_2).$$

**3.4.** Зацепления, изображенные на рис. 3.16, можно представить в виде  $L_1 \# L_2$  и  $L_2 \# L_1$ , поэтому их полиномы Джонса равны  $V(L_1)V(L_2) = V(L_2)V(L_1)$ .

**3.5.** Докажем более общее утверждение, а именно, если часть  $L_1$  узла или зацепления  $L$  отражается симметрично относительно прямой  $l$  (рис. Р3.1), то полученное в результате зацепление имеет тот же самый полином Джонса, что и исходное зацепление  $L$ . При этом мы предполагаем, что диаграмма  $L_1$  заключена внутри прямоугольника, стороны которого

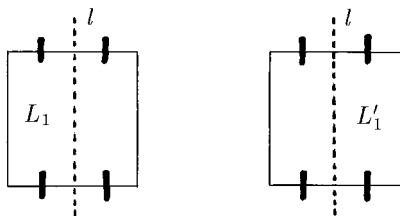


Рис. P3.1

пересекают диаграмму  $L$  ровно в четырех точках, расположенных именно так, как показано на рис. P3.1 (читатель без труда найдет такой прямоугольник на рис. 3.17).

При симметрии относительно прямой числа  $\varepsilon_i = \pm 1$ , сумма которых равна инварианту  $w$ , не изменяются, поэтому достаточно доказать, что  $\langle L \rangle = \langle L' \rangle$ . Каждому перекрестку диаграммы  $L$  соответствует перекресток диаграммы  $L'$ , поэтому любому состоянию диаграммы  $L$  можно сопоставить такое же состояние диаграммы  $L'$ . Тогда после уничтожения перекрестков диаграмм  $L_1$  и  $L'_1$  получим диаграммы, симметричные относительно прямой  $l$  (рис. P3.2).

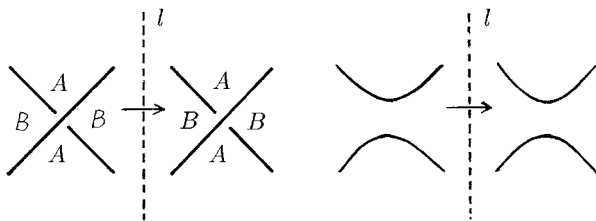


Рис. P3.2

Остается заметить, что при симметрии относительно прямой  $l$  части диаграммы, лежащий внутри прямоугольника, количество компонент связности зацепления не изменяется (рис. P3.3).

**4.1.** Из соотношения (4.1) следуют равенства, изображенные на рис. P4.1.

Диаграммы  $B_1$  и  $B_2$  получаются из диаграммы  $B$  поворотом в пространстве на  $\pm 180^\circ$ , поэтому они совпадают.

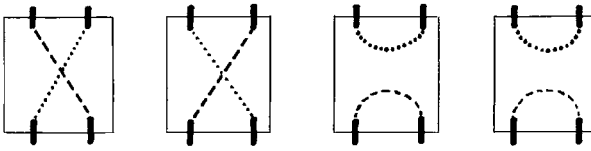


Рис. P3.3

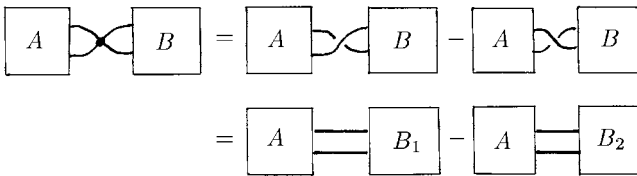


Рис. P4.1

4.2. (а) На рис. 4.4 все хордовые диаграммы порядка 3 симметричны относительно вертикального диаметра.

(б) См. рис. P4.2.

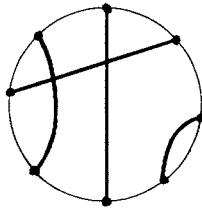


Рис. P4.2

4.3. См. рис. P4.3.

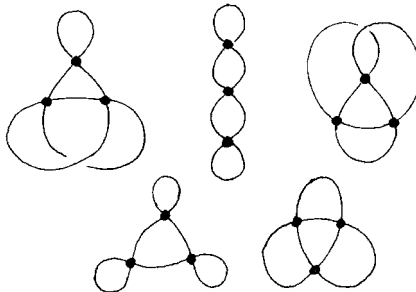


Рис. P4.3

**4.5.** (а) Чтобы доказать требуемые соотношения, нужно записать четырехчленные соотношения, первые члены которых изображены на рис. Р4.4; при этом неподвижные хорды изображены пунктиром.

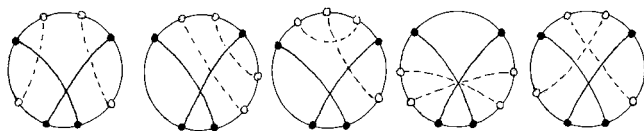


Рис. Р4.4

(б) Из задачи (а) следует, что все ненулевые диаграммы порядка 4 выражаются через указанные три диаграммы. Перероб всех возможных вариантов четырехчленного соотношения показывает, что в условии задачи (а) выписаны все нетривиальные соотношения между ненулевыми диаграммами. Поэтому  $\dim \Delta_4 = 3$ .

## Глава 3

**5.1.** (а) Пусть  $G$  — группа, заданная образующими  $a, b$  и соотношением  $a^3 = b^2$ . Легко проверить, что сопоставления  $a \mapsto xy$ ,  $b \mapsto xux$  и  $x \mapsto a^{-1}b$ ,  $y \mapsto ab^{-1}a$  можно продолжить до взаимно обратных гомоморфизмов  $G \rightarrow B_3$  и  $B_3 \rightarrow G$ . В самом деле, соотношение  $a^3 = b^2$  превращается в  $xuxuxu = xuxxux$ , т.е.  $uyu = xux$ , а соотношение  $xux = yxu$  превращается в  $a^{-1}bab^{-1}aa^{-1}b = ab^{-1}aa^{-1}bab^{-1}a$ , т.е.  $a^3 = b^2$ .

(б) Соотношения  $x(xy)^3 = (xy)^3x$  и  $y(xy)^3 = (xy)^3y$  эквивалентны соотношению  $(yx)(yx) = (yx)(yx)$ .

**5.2.** отождествим плоскость  $\mathbb{R}^2$  с множеством комплексных чисел  $\mathbb{C}$ . Упорядоченному набору из  $n$  точек  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  можно сопоставить точку  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . Точки  $z_1, \dots, z_n$  попарно различны тогда и только тогда, когда координаты точки  $(z_1, \dots, z_n)$  попарно различны. Чтобы перейти к неупорядоченным наборам из  $n$  точек, нужно отождествить все точки  $\mathbb{C}^n$ , полученные друг из друга перестановкой координат.

**5.3.** Элемент  $P(n, \mathbb{C})$  однозначно определяется набором корней, поэтому пространство  $P(n, \mathbb{C})$  гомеоморфно  $C(n, \mathbb{R}^2)$ .

**5.4.** (а) См. доказательство теоремы 8.8.

(б) Это следует из пункта (а) и задачи 5.3.

**6.1** (а) Замыкания первых двух рассматриваемых кос изотопны тривиальному узлу, а двух других — кольцам Борромео.

(б) Первые два замыкания представляют собой левый и правый трилистники, которые не изотопны (у них разные полиномы Джонса). Замыкание косы  $b_1 b_2 b_1^{-1}$  является тривиальным двукомпонентным зацеплением, а одна из компонент другого замыкания является трилистником.

**6.2.** (а) Трилистник.

(б) Кольца Борромео.

(в) Узел восьмерка.

**6.3.** Такую поверхность (известную под названием *поверхность Зейферта*) можно получить, соединив диски, ограниченные окружностями Зейферта, прямоугольными полосками. Такие скрученные прямоугольники строятся для каждого перекрестка. Две параллельные стороны прямоугольника приклеиваются к дискам, а две другие стороны служат ветвями узла на этом перекрестке. Более подробное описание этой конструкции можно найти в [Pra], с. 23–29.

**6.4.** Если указаний, приведенных в формулировке задачи, окажется недостаточно, см. оригинальную работу [Vog].

## Глава 4

**8.1.** Зададим сначала ориентацию на общем крае  $N^2$  многообразий  $M_1^3$  и  $M_2^3$  в многообразии  $M^3$ . Для этого зададим в каждой точке  $N^2$  репер  $e_1, e_2$ . Затем к каждому такому реперу добавим вектор  $e_3$ , направленный внутрь  $M_1^3$ . Ориентацию, заданную таким трехмерным репером, можно продолжить с общего края на многообразия  $M_1^3$  и  $M_2^3$ .

**8.2.** Рассмотрите инверсию пространства  $\mathbb{R}^3$  с центром в точке, расположенной вне вырезанной сферы с ручками.

**8.3.**  $S^2 \times S^1$ .

**8.4.** Примените описание разбиения Хегора пространства  $L(p, q)$  в частном случае  $L(2, 1) = \mathbb{R}P^3$ .

9.1. См. рис. P9.1.

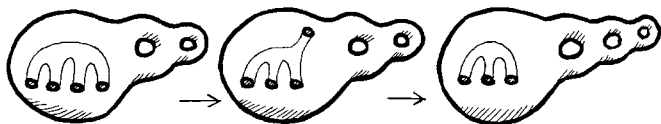


Рис. P9.1

11.1.  $\pi_1(L(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$ .

## Глава 5

12.1. Расположим тело с ручками  $M_1^3$  центрально симметрично и рассмотрим симметрию относительно центра симметрии. Пусть  $s : \partial M_1^3 \rightarrow \partial M_1^3$  — ограничение этой центральной симметрии на край многообразия  $M_1^3$ . Ясно, что  $s$  обращает ориентацию многообразия  $\partial M_1^3$ . Рассмотрим гомеоморфизмы  $f$  и  $s \circ f$ . Если мы приклеим край одного экземпляра тела  $M_1^3$  к краю другого экземпляра по любому из этих гомеоморфизмов, то получим многообразие  $M^3$ . Один из гомеоморфизмов  $f$  и  $s \circ f$  сохраняет ориентацию многообразия  $\partial M_1^3$ , а другой обращает ее.

12.2. Кривые  $\beta$  и  $\beta'$  совершают разное число оборотов в меридиональном направлении.

12.3. Пусть  $n_{i,t}$  — изотопия, связывающая гомеоморфизм  $n_i$  с тождественным гомеоморфизмом, т.е.  $n_{i,0} = n_i$  и  $n_{i,1} = \text{id}_N$ . Тогда изотопия  $n_{1,t} \circ h_1 \circ \dots \circ n_{k,t} \circ h_k$  связывает гомеоморфизмы  $n_1 \circ h_1 \circ \dots \circ n_k \circ h_k$  и  $h_1 \circ \dots \circ h_k$ .

12.4. (а) Зацепление  $L_1$  содержит одну заузленную компоненту, а у зацепления  $L_2$  обе компоненты незаузелены.

(б) Воспользуйтесь леммой 12.5.

12.5. (а) Можно считать, что полноторие  $T$  вложено в  $\mathbb{R}^3$ . При этом узел  $K_1$  в  $\mathbb{R}^3$  тривиален, а узел  $K_2$  является трилистником. Поэтому достаточно доказать, что любую изотопию  $f_t : T \rightarrow T$  можно продолжить до изотопии  $\mathbb{R}^3$ . Рассмотрим  $\varepsilon$ -окрестность  $U$  полнотория  $T$  в  $\mathbb{R}^3$ . Замыкание множества  $U \setminus T$  гомеоморфно  $\partial T \times [0, 1]$ . При этом можно считать, что точки  $\partial T$  отождествлены с точками  $\partial T \times \{1\}$ . Пусть  $g_t$  — ограничение  $f_t$  на  $\partial T$ . Рассмотрим

гомеоморфизм  $h_t : \partial T \times [0, 1] \rightarrow \partial T \times [0, 1]$ , заданный формулой  $h_t(x, s) = (g_{st}(x), s)$ . Так как

$$h_t(x, 0) = (g_0(x), 0) = (x, 0) \text{ и } h_t(x, 1) = (g_t(x), 1),$$

мы видим, что гомеоморфизм  $h_t$  можно продолжить до гомеоморфизма пространства  $\mathbb{R}^3$ , который совпадает с  $f_t$  на полнотории  $T$  и тождествен вне  $U$ . Таким образом, мы построили продолжение изотопии  $f_t : T \rightarrow T$  до изотопии всего пространства  $\mathbb{R}^3$ .

(б) Разрежем полноторию  $T$  по меридиональному диску и сделаем скручивание на  $2\pi$  (рис. P12.1). Склеив полноторию снова, получим гомеоморфизм  $f : T \rightarrow T$ , переводящий  $K_1$  в  $K_2$ . При этом ограничение  $f$  на  $T \setminus K_1$  является гомеоморфизмом, переводящим  $T \setminus K_1$  в  $T \setminus K_2$ .

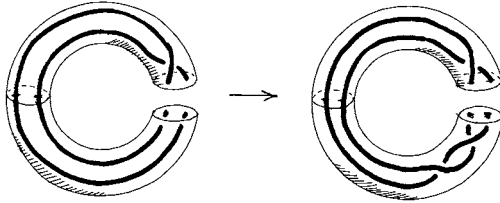


Рис. P12.1

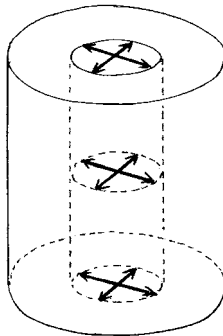


Рис. P12.2

**12.6.** Прямое произведение листа Мёбиуса на отрезок  $[0, 1]$  можно представить в виде цилиндра, из которого вырезан меньший цилиндр, причем точки боковой поверхности меньшего цилиндра склеены так, как показано на рис. P12.2. По-

сле этой склейки все точки боковой поверхности меньшего цилиндра, за исключением точек пересечения боковой поверхности с основаниями, становятся внутренними. Следовательно, край полученного трехмерного многообразия гомеоморфен сфере с двумя дырками, заклеенными двумя листами Мёбиуса, т.е. бутылке Клейна.

**12.7.** Пусть  $\sigma : M^n \rightarrow M^n$  — инволюция без неподвижных точек. Рассмотрим многообразие  $M^n \times [0, 1]$  и отождествим точки  $(x, 0)$  и  $(\sigma(x), 0)$  для всех  $x \in M^n$ . Все точки одной компоненты края  $M^n \times \{0\}$  становятся внутренними, поэтому краем полученного многообразия служит другая компонента края  $M^n \times \{1\}$ .

**12.8.** (а)  $\sigma(x_0, x_1, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) = (-x_1, x_0, \dots, -x_{2n+1}, x_{2n})$ .

(б)  $\sigma(z_0, z_1, \dots, z_{2n}, z_{2n+1}) = (-\bar{z}_1, \bar{z}_0, \dots, -\bar{z}_{2n+1}, \bar{z}_{2n})$ .

(в) Замыкание любой однопараметрической подгруппы в компактной группе Ли является тором; тор содержит окружность; окружность содержит элемент  $a$  порядка 2. Положим  $\sigma(g) = ag$ . Тогда  $\sigma(g) \neq g$  и  $\sigma^2(g) = a^2g = g$ .

**12.9.** С помощью барицентрического подразделения триангуляции  $K$  постройте такое клеточное разбиение  $K'$ , что  $a_i(K') = a_{n-i}(K)$ . Затем сравните альтернированные суммы

$$\sum_i (-1)^i a_i(K) = \sum_i (-1)^i a_i(K').$$

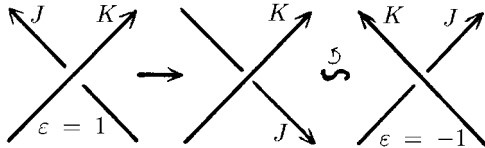
**12.10.** Склеив два экземпляра многообразия  $W^{n+1}$  по тождественному гомеоморфизму их краев, получим многообразие  $N^{n+1}$ . Проверьте, что  $\chi(M^n) \equiv \chi(N^{n+1}) \pmod{2}$ . Если  $n$  нечетно, то  $\chi(M^n) = 0$ , а если  $n$  четно, то  $\chi(N^{n+1}) = 0$ .

**12.11.** Проверьте, что  $\chi(\mathbb{R}P^{2n}) = 1$  и  $\chi(\mathbb{C}P^{2n}) = 2n + 1$ .



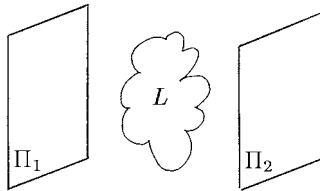
## Глава 6

**15.1.** При изменении ориентации кривой  $J$  перекресток с  $\varepsilon = 1$  преобразуется так, как показано на рис. P15.1. Для перекрестка с  $\varepsilon = -1$  преобразование аналогично.



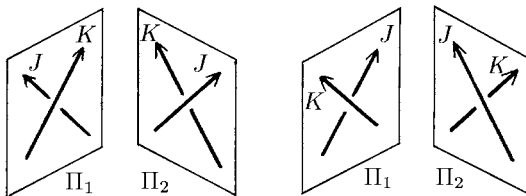
**Рис. P15.1**

**15.2.** Зацепление  $L = \{J, K\}$  можно расположить между двумя параллельными плоскостями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  (рис. P15.2).



**Рис. P15.2**

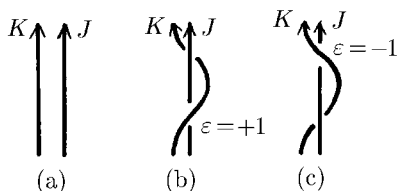
Вычислим  $\text{lk}(J, K)$  для диаграммы зацепления  $L$  на плоскости  $\Pi_1$ , а  $\text{lk}(K, J)$  вычислим для диаграммы зацепления  $L$  на плоскости  $\Pi_2$ . На рис. P15.3 показано, как выглядят интересные нас перекрестки этих диаграмм. Ясно, что оба результата вычислений совпадают.



**Рис. P15.3**

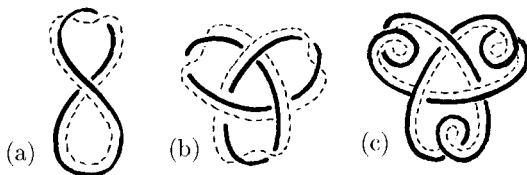
**15.3.** Ориентируем данные кривые произвольным образом. Легко проверить, что коэффициент зацепления кривых равен соответственно: (a)  $\pm 1$ ; (b)  $\pm 2$ ; (c)  $\pm 3$ ; (d)  $\pm 1$ . (Неопределенность знака связана с неопределенностью выбора ориентации кривых.) Во всех четырех случаях коэффициент зацепления не равен нулю.

**15.4.** Рассмотрим произвольную кривую  $K$ , сонаправленную с  $J$ . Часть диаграммы, где кривые  $J$  и  $K$  параллельны (рис. P15.4 (a)), можно преобразовать так, как показано на рис. P15.4 (b), или так, как показано на рис. P15.4 (c). Поэтому  $\text{lk}(J, K)$  можно заменить на  $\text{lk}(J, K) + 1$  или на  $\text{lk}(J, K) - 1$ .



**Рис. P15.4**

**15.5.** Требуемые параллели изображены пунктиром на рис. P15.5.



**Рис. P15.5**

**16.1.** Представим первое зацепление так, как показано на рис. P16.1. Сделаем скручивание на  $-1$  оборот. В результате получим новые оснащения

$$r'_1 = 1/(-1 + 1) = \infty \text{ и } r'_2 = n - 1$$

Но перестройка по незаузелненной кривой с оснащением  $\infty$  тождественна.

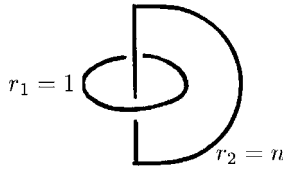


Рис. P16.1

16.2. (а) Для произвольных  $r_1 \in \mathbb{Q} \cup \infty$  и  $r_2 \in \mathbb{Z}$  можно сделать преобразование, изображенное на рис. P16.2. В самом деле, коэффициент зацепления узла и окружности равен нулю, поэтому  $r'_2 = r_2 + \text{lk}^2(K, J) = r_2$ . Положив  $r_1 = \infty$ , получим требуемое преобразование.

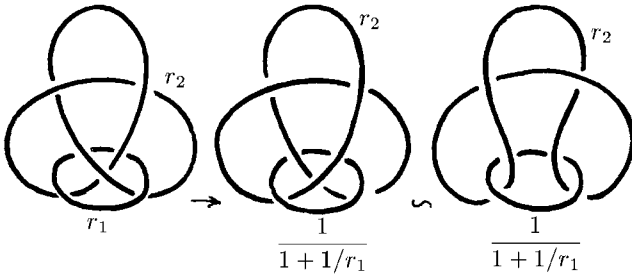


Рис. P16.2

(б) Для произвольных  $r_1 \in \mathbb{Q} \cup \infty$  и  $r_2 \in \mathbb{Z}$  можно сделать преобразование, изображенное на рис. P16.3. В самом деле, коэффициент зацепления узла и окружности равен  $\pm 2$ , поэтому  $r_2 = r_2 - \text{lk}^2(K, J) = r_2 - 4$ . Положив  $r_1 = \infty$ , получим требуемое преобразование.

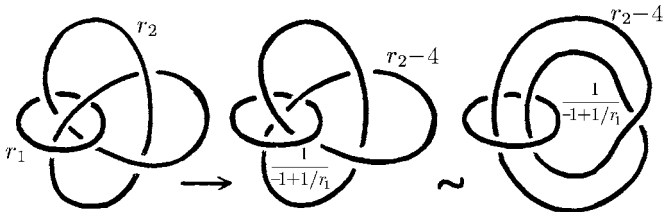


Рис. P16.3

**18.1.** Факторгруппа  $I^*/I^{*'}$  получается из группы  $I^*$  добавлением соотношения  $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ , т.е.  $xy = yx$ . Поэтому

$$\begin{aligned} I^*/I^{*'} &= \{x, y \mid xyx = yxy, yx^2y = x^3, xy = yx\} = \\ &= \{x, y \mid x = y, y^2 = x\} = \{x \mid x^2 = x\} = \{x \mid x = 1\}. \end{aligned}$$

**18.2.** Образующие  $a$  и  $b$  можно выразить через  $x$  и  $y$ , а образующие  $x$  и  $y$  можно выразить через  $a$  и  $b$ . Поэтому достаточно доказать, что соотношения  $xyx = yxy$  и  $yx^2y = x^3$  эквивалентны соотношениям  $a^5 = b^3 = (ba)^2$ .

Предположим сначала, что  $xyx = yxy$  и  $yx^2y = x^3$ . Тогда из определения  $a$  и  $b$  следует, что

$$(ba)^2 = xyx(xyx) = xyxyxy = b^3 \text{ и } (ba)^2 = x(yx^2y)x = x^5 = a^5.$$

Предположим теперь, что  $a^5 = b^3 = (ba)^2$ . Тогда  $a^4 = bab$  и  $b^2 = aba$ . Поэтому

$$xyx = ba = a^{-1}b^2 = yxy \text{ и } yx^2y = a^{-1}bab = a^{-1}a^4 = a^3 = x^3.$$

**18.3.** Кривая  $J$  для правого трилистника с оснащением  $-1$  получается из кривой  $J$  для левого трилистника с оснащением  $+1$  (см. рис. 18.5) добавлением двух витков  $x^{-1}$ . Поэтому заклеивание кривой  $J$  меридиональным диском приводит к соотношению  $yxzx^{-4} = 1$ , т.е.  $yx(xy x^{-1})x^{-4} = 1$ . Таким образом,

$$\pi_1(M_-^3) = \{x, y \mid xyx = yxy, yx^2y = x^5\}.$$

Сделаем замену  $a = x$ ,  $b = xy$ , получим

$$\pi_1(M_-^3) = \{a, b \mid a^7 = b^3 = (ba)^2\}.$$

**18.4.** Пусть  $G = \pi_1(M_-^3)$ . Тогда

$$G/G' = \{x, y \mid x = y, y^2 = x^3\} = \{x \mid x^2 = x^3\} = \{x \mid x = 1\}.$$

19.1. См. рис. P19.1.

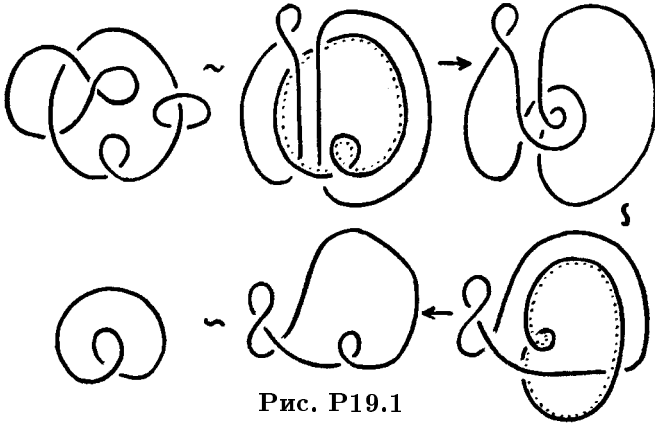


Рис. P19.1

### Глава 7

20.1. Предположим обратное. Тогда накрывающее многообразие содержит замкнутый путь  $\gamma$ , изменяющий ориентацию, т.е. такой замкнутый путь  $\gamma$ , что его нельзя покрыть координатными окрестностями с согласованными ориентациями. Малым шевелением можно добиться того, что  $\gamma$  не будет проходить через прообразы точек ветвления. Тогда кривая  $p(\gamma)$  будет замкнутой кривой в  $M^2$ , изменяющей ориентацию, что противоречит условию.

21.2. (а) Согласно теореме 21.5 имеем равенство  $\chi(M_g^2) = n\chi(M_h^2)$ , где  $n$  — число листов накрытия  $p$ . Поэтому  $2 - 2g = n(2 - 2h)$ .

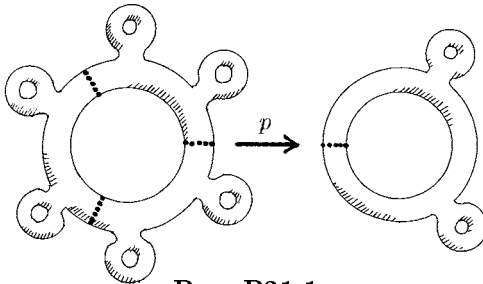


Рис. P21.1

(б) На рис. P21.1 показано, как устроено накрытие сфе-

ры с  $h = 3$  ручками сферой с  $g = 7$  ручками. (В этом случае  $g - 1 = 3(h - 1)$ .) Отображение  $p$  получается в результате отождествления точек  $M_g^2$ , которые переходят друг в друга при повороте на  $2\pi/3$ . В общем случае конструкция аналогична.

**21.3.** Пусть  $a$  — количество точек, из которых состоит прообраз точки ветвления. Согласно формуле (21.5)

$$\chi(D^2) = n(\chi(D^2) - 1) + a.$$

Учитывая, что  $\chi(D^2) = 1$ , получаем  $a = 1$ .

**22.1.** Согласно теореме 22.3 существует разветвленное накрытие  $p_1 : M^3 \rightarrow S^3$ , множеством ветвления которого служит одномерный остов тетраэдра  $T$ . Представим сферу  $S^3$  как  $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ . Можно считать, что  $T$  — правильный тетраэдр в  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $l$  — ось симметрии тетраэдра  $T$ , проходящая через его вершину и центр противоположной грани (рис. P22.1).

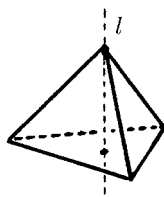


Рис. P22.1

Отождествим точки  $\mathbb{R}^3$ , которые получаются друг из друга поворотом на  $120^\circ$  вокруг оси  $l$ . В результате снова получим  $\mathbb{R}^3$ . Указанное отождествление приводит к разветвленному накрытию  $p_2 : S^3 \rightarrow S^3$ , множеством ветвления которого служит окружность  $l \cup \infty$ . Отображение  $p = p_2 \circ p_1 : M^3 \rightarrow S^3$  является разветвленным накрытием. Его множество ветвления состоит из окружности  $l \cup \infty$  и одномерного комплекса, который получается из ребер тетраэдра  $T$  при указанном отождествлении (рис. P22.2).

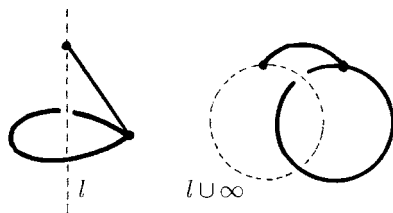


Рис. P22.2

**22.2.** Пусть  $M^3$  — многообразие, полученное из  $S^3$  перестройкой по оснащеному зацеплению, изображенному на рис. P22.3 (a). Согласно предложению 22.8 существует 2-листное разветвленное накрытие  $p : M^3 \rightarrow S^3$  с ветвлением над трилистником. Уничтожив одну окружность с оснащением  $-1$ , мы перейдем от оснащенного зацепления P22.3 (a) к оснащеному зацеплению P22.3 (b). Перестройка по последнему оснащеному зацеплению дает линзу  $L(3, 1)$ .

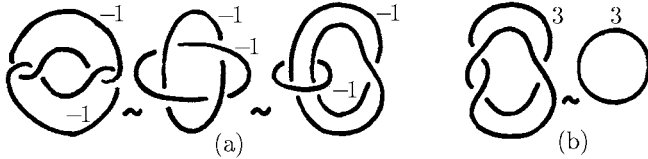


Рис. P22.3

**22.3.** Склеим два полнотория  $T_1$  и  $T_2$  по гомеоморфизму их краев, переводящему меридианы в параллели. В результате получим сферу  $S^3$ , причем существует изотопия, меняющая местами  $T_1$  и  $T_2$  (см. 8.6). Ясно, что если для полнотория  $T_1$  кривая имеет вид  $p\alpha + q\beta$ , то для полнотория  $T_2$  эта кривая имеет вид  $q\alpha + p\beta$ .

**23.1.** Накрывающие гомеоморфизмы для скручиваний базы на  $\pi$  и  $2\pi$  изображены на рис. P23.1 и P23.2. Ограничения этих гомеоморфизмов на край являются поворотами на  $2\pi/3$  и  $4\pi/3$  соответственно.

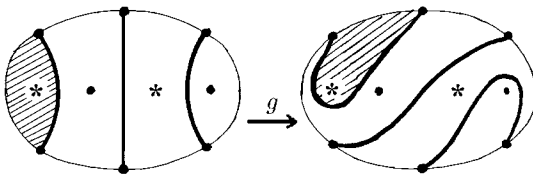


Рис. P23.1

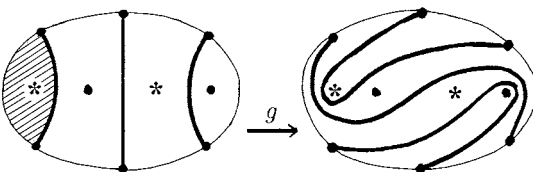


Рис. P23.2

**24.1.** Перекресток, который возникает или исчезает при первом преобразовании Рейдемейстера, обязательно одноцветный. Все существенно различные правильные раскраски перекрестков при втором и третьем преобразованиях Рейдемейстера изображены на рис. P24.1. Этот рисунок показывает, что каждая правильная раскраска исходной диаграммы индуцирует равно одну правильную раскраску полученной после преобразования диаграммы.

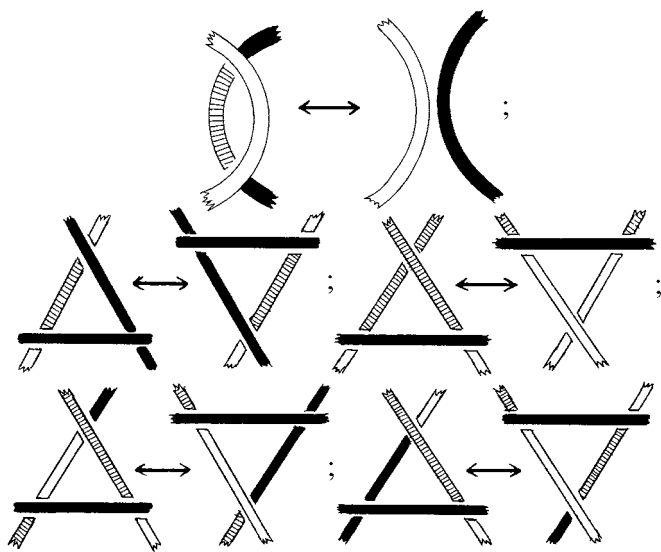
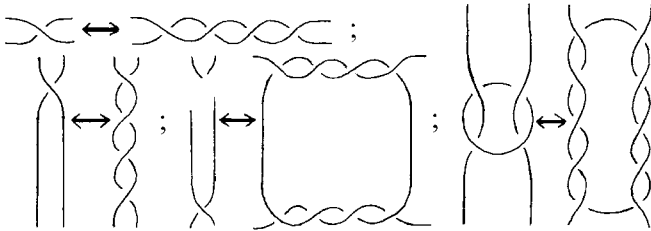


Рис. P24.1

**24.2.** Если  $p : M^3 \rightarrow S^3$  — разветвленное накрытие и  $h : S^3 \rightarrow S^3$  — некоторый гомеоморфизм, изотопный тождественному, то  $h \circ p : M^3 \rightarrow S^3$  — разветвленное накрытие, диаграмма множества ветвления которого получается из исходной диаграммы множества ветвления для  $p$  посредством плоских изотопий и преобразований Рейдемейстера.



**24.3.** Все данные преобразования сводятся к преобразованию, изображенному на рис. 24.3 (см. основной текст), и преобразованиям Рейдемейстера (см. рис. P24.2).



**Рис. P24.2**

## Глава 8

**26.1.** (а) Занумеруем отмеченные точки диска  $D^2$  по часовой стрелке. Дуги любой базисной диаграммы соединяют точки разной четности. В самом деле, пусть дуга соединяет пару точек одной четности. Тогда она разделяет остальные точки на два множества, каждое из которых состоит из нечетного числа точек. С другой стороны, точки каждого из этих множеств можно разбить на пары точек, соединенных дугами. Получено противоречие.

Рассмотрим диск  $D^2$  с  $2(n+1)$  отмеченными точками края. Из точки с номером 1 дуга базисной диаграммы может попасть в любую из точек с номерами  $2, 4, \dots, 2(n+1)$ . Дуга, соединяющая точки 1 и  $2k$ , разрезает диск  $D^2$  на два диска с  $2(k-1)$  и  $2(n-k+1)$  отмеченными точками. В этих дисках требуемые непересекающиеся дуги можно провести  $c_{k-1}$  и  $c_{n-k+1}$  различными способами соответственно. Поэтому

$$c_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} c_{k-1} c_{n-k+1} = \sum_{i=0}^n c_i c_{n-i}.$$

(б) Рассмотрим ряд

$$c(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \text{ где } c_i = \dim S(D^2, 2i).$$

Согласно задаче (а)

$$\begin{aligned} xc^2(x) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} c_i c_j x^{i+j+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} \left( \sum_{i=0}^k c_i c_{k-i} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} x^{k+1} = c(x) - c_0 = c(x) - 1. \end{aligned}$$

Решив квадратное уравнение  $c^2(x) - c(x) - 1/x = 0$ , получим

$$c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \frac{1 \pm (1 - 2x + \dots)}{2x}.$$

Решение  $c(x) = x^{-1} - 1 + \dots$  нас не устраивает, поэтому

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

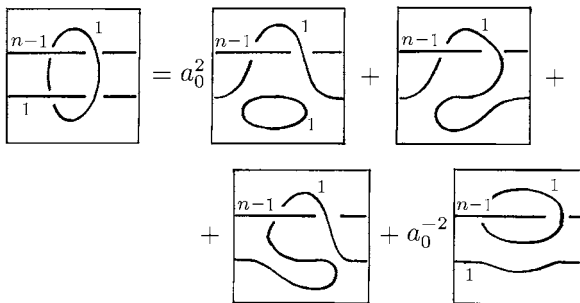
С помощью формулы бинорма Ньютона получаем

$$\begin{aligned} (1 - 4x)^{1/2} &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n + 1)} x^{n+1} = \\ &= 1 - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n + 1)!} x^n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$c_n = \frac{1}{n + 1} \binom{2n}{n}.$$

**29.1.** Уничтожив два перекрестка, можно получить равенство, изображенное на рис. P29.1.



**Рис. P29.1**

Для первой диаграммы (в правой части полученного равенства) уничтожим появившуюся окружность. Тогда первые три диаграммы станут пропорциональны одной и той же диаграмме, поэтому их можно заменить одной диаграммой с коэффициентом  $a_0^2(-a_0^2 - a_0^{-2}) + 1 + 1 = 1 - a_0^4$  (рис. P29.2).

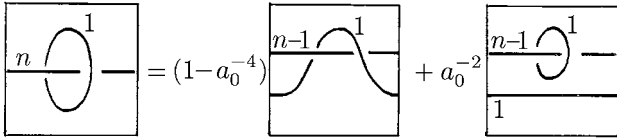


Рис. P29.2

Аналогичное уничтожение двух перекрестков для диаграммы с коэффициентом  $1 - a_0^4$  приводит к равенству, изображенному на рис. P29.3.

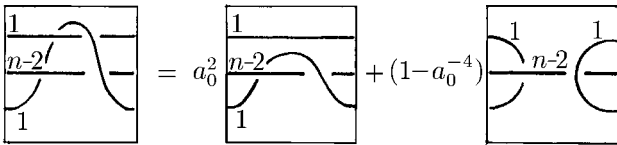


Рис. P29.3

При решении исходной задачи, т.е. в присутствии диаграммы  $f^{(n)}$ , на диаграмму с коэффициентом  $1 - a_0^{-4}$  можно не обращать внимания, так как она принадлежит подалгебре  $A_n$ , для которой  $f^{(n)}A_n = 0$ . В самом деле, при дальнейшем разложении этой диаграммы никогда не появится диаграмма  $1_n$ , состоящая из  $n$  параллельных нитей. Поэтому в результате последовательных опусканий вниз негоризонтальной нити получим равенства, изображенные на рис. P29.4.

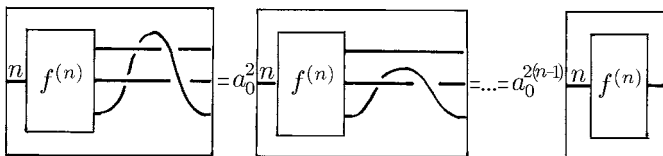


Рис. P29.4

Вместе с равенством, изображенным на рис. P29.2, они приводят к равенству, изображенному на рис. P29.5.

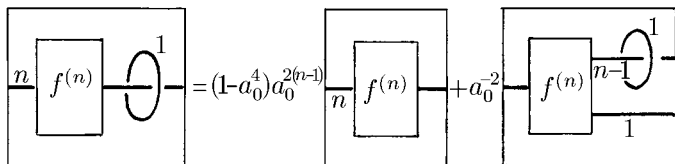


Рис. P29.5

Хотя полученное соотношение и не является рекуррентным, его можно использовать для того, чтобы получить равенство, изображенное на рис. P29.6, в котором последовательность  $\{c_n\}$  удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$c_n = (1 - a_0^4)a_0^{2(n-1)} + a_0^{-2}c_{n-1}. \quad (*)$$

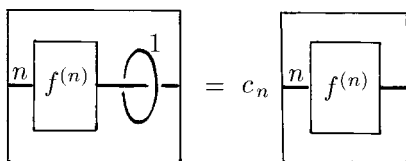


Рис. P29.6

Это вытекает из следующего очевидного замечания: в ситуации, изображенной на рис. P29.7 (a), элементы алгебры  $A_{n-1}$  тоже приводят к нулевым диаграммам, как и в ситуации, изображенной на рис. P29.7 (b).

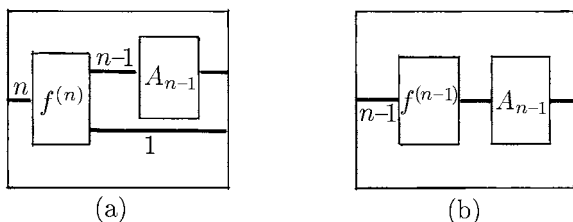


Рис. P29.7

Так как  $f^{(0)}$  соответствует пустой диаграмме, то  $c_0 = -(a_0^2 + a_0^{-2})$ . Легко проверить, что последовательность  $c_n = -(a_0^{2(n+1)} + a_0^{-2(n+1)})$  удовлетворяет как этому начальному условию, так и рекуррентному соотношению (\*).

**29.2.** Согласно определению,

$$\langle w \rangle_U = \left\langle \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n S_n(\alpha) \right\rangle_U = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n \langle S_n(\alpha) \rangle_U.$$

Элемент  $\langle S_n(\alpha) \rangle_U \in S(\mathbb{R}^n)$  получается из  $S_n(\alpha)$  заменой  $\alpha^k$  на  $k$  окружностей, поэтому  $\langle S_n(\alpha) \rangle_U = \Delta_n$ . Таким образом,

$$\langle w \rangle_U = \sum_{n=0}^{r-2} \Delta_n^2 = (a_0^2 - a_0^{-2})^{-2} \sum_{n=0}^{r-2} \left( a_0^{2(n+1)} - a_0^{-2(n+1)} \right)^2.$$

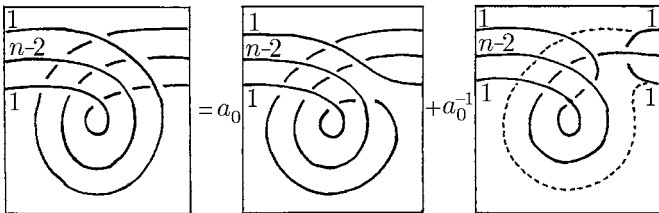
Вспомнив соотношение  $a_0^{4r} = 1$ , получим

$$\sum_{n=0}^{r-2} a_0^{4(n+1)} = \frac{a_0^{4r} - a_0^4}{a_0^4 - 1} = -1, \quad \sum_{n=0}^{r-2} a_0^{-4(n+1)} = -1.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{r-2} \left( a_0^{2(n+1)} - a_0^{-2(n+1)} \right)^2 = -2r.$$

**29.3.** Уничтожение одного перекрестка приводит к соотношению, изображенному на рис. P29.8.



**Рис. P29.8**

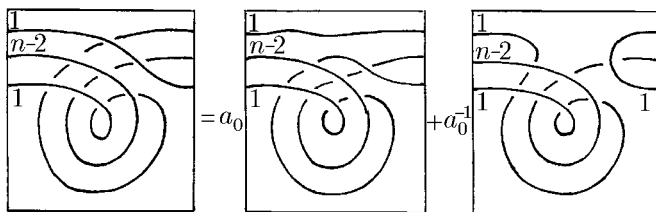


Рис. P29.9

Диаграмма с коэффициентом  $a_0^{-1}$  лежит в подалгебре  $A_n$ , поэтому в присутствии элемента  $f^{(n)}$  она обращается в нуль. Для диаграммы с коэффициентом  $a_0$  уничтожим еще один перекресток. В результате получим соотношение, изображенное на рис. P29.9.

Диаграмма с коэффициентом  $a_0^{-1}$  в присутствии элемента  $f^{(n)}$  тоже обращается в нуль. С помощью плоской изотопии и второго и третьего преобразований Рейдемейстера диаграмму с коэффициентом  $a_0$  можно преобразовать в диаграмму, изображенную на рис. P29.10 (а).

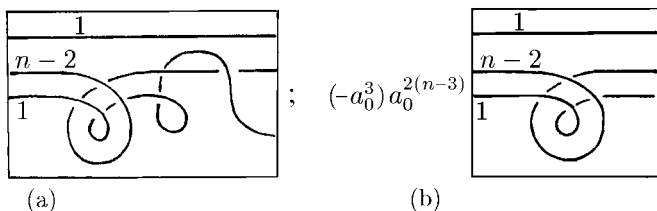


Рис. P29.10

При решении задачи 29.1 мы получили соотношение, изображенное на рис. P29.4. Применяв это соотношение и уничтожив петельку, можно заменить полученную диаграмму на диаграмму, изображенную на рис. P29.10 (б). В итоге вычи-

слений получаем, что в присутствии элемента  $f^{(n)}$  справедливо соотношение, изображенное на рис. P29.11.

$$\begin{array}{|c|} \hline n \\ \hline \text{---} \\ \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = (-a_0^3) a_0^{2(n-1)} \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \text{---} \\ \hline n-1 \\ \hline \end{array}$$

**Рис. P29.11**

Применив это рекуррентное соотношение к диаграмме, о которой идет речь в условии задачи, получим, что ее образ в  $S(\mathbb{R}^2)$  равен

$$(-a_0)^{3n} a_0^{2(1+2+\dots+(n-1))} = (-1)^n a_0^{n^2+2n}.$$

В рассматриваемом случае  $n = r - 2$ ,  $a_0^r = -1$  и  $r$  нечетно. Поэтому искомая величина равна  $-(a_0^r)^{r-2} = -(-1)^{r-2} = 1$ .

## Литература

- [AB] Y. Aharonov and D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in quantum theory*, Phys. Rev. **115** (1959), 485–491.
- [AW] Y. Akutsu and M. Wadati, *Knots, links, braids and exactly solvable models in statistical mechanics*, Comm. Math. Phys. **117** (1988), 243–259.
- [Ada] C. Adams, *The knot book*, Freeman & Co., New York, 1994.
- [Ale1] J. W. Alexander, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **9** (1923), 93–95.
- [Ale2] ———, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **20** (1923), 275–306.
- [Ale3] ———, *A matrix knot invariant*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **19** (1933), 272–275.
- [Arn1] В. И. Арнольд, *Кольцо когомологий крашенных кос*, Математические заметки **5** (1969), 227–232.
- [Arn2] ———, *Топологические инварианты алгебраических функций*, Труды ММО **21** (1971), 30–52.
- [Arn3] ———, *Топологические инварианты алгебраических функций, II*, Функциональный анализ и прил. **4** (1970), 91–98.
- [Art1] E. Artin, *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **4** (1925), 47–72.
- [Art2] ———, *Theory of braids*, Ann. of Math. (2) **48** (1947), 101–126.
- [AF] E. Artin, R. Fox, *Some wild cells and spheres in three-dimensional space*, Ann. Math. **49** (1948), 979–990.
- [Ash] C. W. Ashley, *The Ashley book of knots*, Doubleday and Co., New York, 1944.
- [Ati1] М. Атья, *Геометрия и физика узлов*, М.: Мир, 1996.



- [Ati2] M. Atiyah, *The Jones–Witten invariants of knots*, Sem. Bourbaki **715** (1989–90).
- [Ati3] ———, *On framing of 3-manifolds*, *Topology* **28** (1990), 1–7.
- [Bax] Р. Бэкстер, *Точно решаемые модели в статистической механике*, М.: Мир, 1985.
- [Bir1] J. S. Birman, *Braids, links and mapping class groups* *Annals of Math. Studies*, vol. 82, Princeton University Press, 1974.
- [Bir2] ———, *New points of view in knot and link theory*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (1993), 253–287.
- [BL] J. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev invariants*, *Invent. Math.* **111** (1993), 225–275.
- [BN] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, *Topology* **34** (1995), 423–475.
- [Bri] E. Brieskorn, *Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen*, *Manuscr. Math.* **2** (1970), 103–161.
- [BHMV] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, Preprint (1992).
- [BM] J. Baez, J. P. Munian, *Gauge Fields, knots and gravity*, WorldScientific, 1994.
- [BZ] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter, 1986.
- [Cal] G. Călugăreanu, *L'intégrale de Gauss et l'analyse des nœuds tridimensionnels*, *Revue Roumaine Math. Pures Appl.* **4** (1959), 5–20.
- [Car] P. Cartier, *Construction combinatoire des invariants de Vassiliev*, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **316** (1993), 1205–1210.
- [CP] Vyjayanthi Chari and Andrew Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Camb. Univ. Press, 1994.
- [CDL] S. V. Chmutov, S. V. Duzhin, S. K. Lando., *Vassiliev knot invariants I–III*, *Adv. Sov. Math* **21** (1994), 117–147.
- [CF] Р. Кроуэлл, Р. Фокс, *Введение в теорию узлов*, М.: Мир, 1967.
- [Con] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*, *Computational*

- Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970, pp. 329–358.
- [Cr1] L. Crane, *2-D Physics and 3-D Topology*, Commun. Math. Phys **135** (1991), 615–640.
- [Cr2] ———, *Conformal Field Theory, Spine Geometry and Quantum Gravity*, Preprint (1990).
- [CY] L. Crane and D. Yetter, *A categorical construction of 4D topological quantum field theories*, Preprint (1992).
- [De1] M. Dehn, *Über die Topologie des dreidimensionalen Raumes*, Math. Ann. **69** (1910), 137–168.
- [De2] ———, *Die beiden Kleeblattschlingen*, Math. Ann. **102** (1914), 402–413.
- [DT1] C. H. Dowker, M. B. Thistlethwaite, *On the classification of knots*, Math. Rep. Acad. Sci. Canada **4** (1982), 129–131.
- [DT2] ———, *Classification of knot projections*, Topology Appl. **16** (1983), 19–31.
- [Dri1] V. G. Drinfeld, *Quantum Group*, Proc. Intl. Congress Math., Berkeley, Calif USA, 1986, pp. 789–820.
- [Dri2] В. Г. Дринфельд, *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера*, Доклады АН СССР **32**, vol. 1, 1985.
- [Dro] Ю. В. Дроботухина, *Аналог полинома Джоунса для зацеплений в  $\mathbb{R}P^3$  и обобщение теоремы Кауффмана–Мурасуги*, Алгебра и анализ **2** (1991), 613–630.
- [DNF] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, М.: Наука, 1986.
- [Duh] P. Duhornoy, *From large cardinals to braids via distributive algebra*, J. Knot Theory Ram. **4** (1995), 33–79.
- [FRT] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, LO-MI Preprint E-14-87, Steklov Mathematical Institute, Leningrad, USSR.
- [Far] М. Ш. Фарбер, *Представления модулей узлов*, Известия Академии наук Азерб. ССР. **2** (1981), 105–111.

- [FR] R. P. Fenn and C. P. Rourke, *On Kirby's calculus of links*, *Topology* **18** (1979), 1–15.
- [FM] R. H. Fox, J. W. Milnor, *Singularities of 2-spheres in 4-space and equivalence of knots*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **63** (1957), 406.
- [FP] F. Frankl, L. Pontrjagin, *Ein Knotensatz mit Anwendung auf die Dimensionstheorie*, *Math. Ann.* **102** (1930), 785–789.
- [FH...] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. C. Millett and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), 239–246.
- [Fu] Jürgen Fuchs, *Affine Lie Algebras and Quantum Groups*, Camb. Univ. Press, 1992.
- [Gar] F. A. Garside, *The braid group and other groups*, *Quart. J. Math. Oxford* (2) **20** (1969), 235–254.
- [Gau] K. F. Gauss, *Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen*, *Werke Königl. Gesell. Wiss. Göttingen* **5** (1877), 605.
- [Gaw] K. Gawedski, *Conformal Field Theory*, *Sem. Bourbaki*. 41e année **704** (1988–89), 1–31.
- [Gor] C. McA. Gordon, *Some aspects of classical knot theory*, in *Knot Theory. Lect. Notes in Math.*, vol. 685, Springer Verlag, 1978.
- [GH] C. McA. Gordon, W. Heil, *Simply-connected branched coverings of  $S^3$* , *Proc. Amer. Math. Soc.* **35** (1972), 287–288.
- [GL] C. McA. Gordon, J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, *J. Amer. Math. Soc.* **2** No 2 (1989), 371–415.
- [Hak1] W. Haken, *Theorie der Normalflächen*, *Acta Math.* **105** (1961), 245–375.
- [Hak2] ———, *Über das Homöomorphieproblem der 3-Mannigfaltigkeiten. I*, *Math. Z.* **80** (1962), 89–120.
- [Hay] M. V. Hayes, *A Unified Field Theory*, The Stinehour Press, 1964.
- [Haz] M. Hazewinkel, *Multiparameter quantum groups and multiparameter R-matrices*, Preprint (1994).

- [Hem] G. Hemion, *The classification of Knots and 3-dimensional Spaces*, Oxford Univ. Press, 1992.
- [Hemp] J. Hempel, *Construction of orientable 3-manifolds*, in *Topology of 3-manifolds* (M. Fort, ed.), Prentice-Hall, 1962, pp. 207–212.
- [HLM] H. M. Hilden, M. T. Lozano, J. M. Montesinos, *Universal knots*, Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1983), 449–450.
- [HLMW] H. M. Hilden, M. T. Lozano, J. M. Montesinos, W. C. Witten, *On universal groups and 3-manifolds*, Invent. Math. **87** (1987), 441–456.
- [HMT] H. M. Hilden, J. M. Montesinos, T. Thickstun, *Closed oriented 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$  of special type*, Pacific J. Math. **65** (1976), 65–76.
- [Jim1] M. Jimbo, *A  $q$ -difference analogue of  $U(q)$  and the Yang-Baxter Equation*, Lect. in Math. Physics **10** (1985), 63–69.
- [Jim2] ———, *Quantum  $R$ -matrix for the generalized Toda system*, Comm. Math. Physics **102** (1986), 537–547.
- [Jon1] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for links via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **129** (1985), 103–112.
- [Jon2] ———, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. of Math. **126** (1987), 335–388.
- [Jon3] ———, *On knot invariants related to some statistical mechanics models*, Pacific J. Math. **137** **2** (1989), 311–334.
- [Kau1] L. H. Kauffman, *On Knots*, Annals of Math Studies, Princeton Univ. Press, 1987.
- [Kau2] ———, *State Models and the Jones Polynomial*, Topology **26** (1987), 395–407.
- [Kau3] ———, *From knots to quantum groups (and back)*, Proceedings of the CRM Workshop on Hamiltonian Systems, Transformation Groups and Spectral Transform Methods (J. Harnad and J. E. Marsden, eds.), Publications CRM, 1990, pp. 161–176.
- [Kau4] ———, *Knots and Physics*, World Scientific, 1991.
- [Kas] Christian Kassel, *Quantum Groups*, Springer Verlag, 1995.

- [Kaw] A. Kawauchi, *A survey of knot theory*, Birkhäuser, 1996.
- [Kel] W. Thomson (Lord Kelvin), *Hydrodynamics*, Proc. Roy.Soc. Edin. **41** (1867), 94–105.
- [Kea] C. Kearton, *Factorization is not unique for 3-knots*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 451–452.
- [KB] J.Kania-Bartoszyńska, *Examples of different manifolds with the same invariants of Witten and Reshetikhin–Turaev*, Topology **32** (1993), 47–54.
- [Kin] S. Kinoshita, *On the Alexander polynomials of 2-spheres in a 4-sphere*, Ann. of Math. **74** (1961), 518–531.
- [Kir] R. Kirby, *A calculus for framed links in  $S^3$* , Invent. Math. **45** (1978), 35–56.
- [KS] R. Kirby and M. G. Scharlemann, *Eight faces of the Poincaré homology 3-sphere*, in: Geometric topology, Academic Press, 1979, pp. 113–146.
- [Kne] H. Kneser, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahrb. Deutsch. Math.-Vereinig **38** (1929), 248–260.
- [KN] Ш. Кобаяси, К. Номидзу, *Основы дифференциальной геометрии*, М.: Наука, 1981.
- [Kon1] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, Preprint (1992).
- [Kon2] ———, *Vassiliev’s knot invariants*, Adv. in Sov. Math. **16(2)** (1993), 137–150.
- [KS] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Solutions of the Yang–Baxter Equation*, Yang–Baxter Equation in Integrable Systems (M. Jimbo, ed.), vol. **19**, World Scientific Pub., 1990, pp. 1596–1620.
- [Lic1] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. Math. **76** (1962), 531–540.
- [Lic2] ———, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **60** (1964), 769–778.
- [Lic3] ———, *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold (corrigendum)*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **62** (1966), 679–681.

- [Lic4] ———, *The skein method for three-manifold invariants*, J. Knot Theory Ram **2** No 2 (1993), 171–194.
- [Lic5] ———, *Distinct 3-manifolds with all  $SU(2)_q$  invariants the same*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 285–292.
- [Lu] Ning Lu, *A simple proof of the fundamental theorem of Kirby calculus on links*, Trans. Amer. Math. Soc. **331** (1992), 143–156.
- [Lus] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Birkhauser, 1993.
- [Mak1] Г. С. Маканин, *Проблема сопряженности в группе кос*, Доклады АН СССР **9** (1968), 1156–1157.
- [Mak2] ———, *О нормализаторах группы кос*, Матем. сб. **15** (1971), 167–175.
- [Mar1] А. А. Маркофф, *Über die freie Äquivalenz der geschlossenen Zöpfe*, Матем. сб. **1** (1936), 73–78.
- [Mar2] А. А. Марков, *Основы алгебраической теории кос*, Труды МИАН **16** (1945), 1–54.
- [Mar3] ———, *Неразрешимость проблемы гомеоморфии*, Доклады АН СССР **121** (1958), 218–220.
- [Mat1] С. В. Матвеев, *Преобразования специальных спайнов и гипотеза Зимана*, Известия АН СССР **31:2** (1988), 423–434.
- [Mat2] ———, *Construction of a complete algebraic knot invariant*, Chelyabinsk Univ. (1981), 14.
- [Mat3] ———, *Дистрибутивные группоиды в теории узлов*, Матем. сб. **47** (1984), 73–83.
- [MF] С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, Издательство Московского университета, 1991.
- [MT] W. M. Menasco, M. Thistlethwaite, *The Tait flying conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. **25** (1991), 403–412.
- [Mie] E. W. Mielke, *Knot wormhole in geometrodynamics*, General Relativity and Gravitation **8** (1977), 175–196.
- [Mil1] J. W. Milnor, *On the total curvature of knots*, Ann. of Math. **52** (1950), 248–257.

- [Mil2] ———, *On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $M(p, q, r)$* , Ann. Math. Studies (L. P. Neuwirth, ed.), vol. 84, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1975, pp. 175–225.
- [Moi1] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung*, Ann. of Math. **57** (1952), 547–560.
- [Moi2] ———, *Affine structures in 3-manifolds. VII. Invariance of the knot-types; local tame imbedding*, Ann. of Math **59** (1954), 159–170.
- [Mon1] J. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$* , Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 845–846.
- [Mon2] ———, *Surgery on links and double branched covers of  $S^3$* , Ann. Math. Studies (L. Neuwirth, ed.), vol. 84, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1975, pp. 227–259.
- [Mon3] ———, *Three-manifolds as 3-fold branched coverings of  $S^3$* , Quart. J. Math. Oxford (2) **27** (1976), 85–94.
- [Mont] Susan Montgomery, *Hopf algebras and their action on rings*, AMS Publications, 1993.
- [Mun] Дж. Манкрес, *Элементарная дифференциальная топология*, в книге Дж. Милнор, Дж. Сташеф, Характеристические классы, М.: Мир, 1979.
- [Mor1] H. R. Morton, *Problems*, in Braids (J. Birman and A. Libgober, eds.), vol. 78, Contemporary Math., 1988, pp. 557–574.
- [Mor2] ———, *Threading knot diagrams*, Math. Proc. Camb. Soc. **99** (1986), 247–260.
- [Mur1] K. Murasugi, *The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory*, Topology **26** (1987), 187–194.
- [Mur2] ———, *Jones polynomials and classical conjectures in knot theory II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **102** (1987), 317–318.
- [Ni1] J. Nielsen, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, Acta Math. **50** (1927), 189–358.

- [Ni2] ———, *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*, Det. Kgl. Dansk Vidensk. Selskab. Mat. fys Meddelelser **15** (1937), 1–77.
- [Pap] C. D. Papakyriakopoulos, *On Dehn's lemma and the asphericity of knots*, Ann. of Math. **66** (1957), 1–26.
- [Pra] В. В. Прасолов, *Наглядная топология*, М.: МЦНМО, 1995.
- [PS] В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский, *Узлы и маломерная топология*, М.: МК НМУ, 1993.
- [Prz] J. H. Przytycki, *Elementary conjectures in knot theory*, Odense Univ. Preprint **23** (1993).
- [PT] J. H. Przytycki and P. Traczyk, *Invariants of Conway type*, Kobe J. Math. **4** (1987), 115–139.
- [Rei] K. Reidemeister, *Knot Theory*, Chelsea Publ. Co., N. Y., 1948.
- [RT1] N. Y. Reshetikhin and V. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. **127** (1990), 1–26.
- [RT2] ———, *Invariants of three-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.
- [Roh] В. А. Рохлин, *Трёхмерное многообразие — граница четырёхмерного*, Доклады АН СССР **81**, 355–357.
- [RF] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс, *Начальный курс топологии. Геометрические главы*, М.: Наука, 1977.
- [Rol] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish Press, 1976.
- [Rou] C. Rourke, *A new proof that  $\Omega_3$  is zero*, J. London Math. Soc. **31** (1985), 373–376.
- [Rub] J. H. Rubinstein, *The solution to the recognition problem for  $S^3$* , Lectures, Haifa, Israel, May 1992.
- [Sch] H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg. math.-nat. Kl. **3 Abh.** (1949), 57–104.
- [Sco] J. Scott downing, *Decomposing compact 3-manifolds into homeomorphic handlebodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **24** (1970), 241–144.
- [Seg] G. Segal, *Two-dimensional conformal field theories and modular functors*, IXth International Congress



- on Mathematical Physics, 17–27 July-1988, Swansea, Wales (Simon, Truman, Davies, eds.), Adam Hilger Publ., 1989, pp. 22–37.
- [ST] Г. Зейферт, В. Трельфалль, *Топология*, М.; Л.: ГОНТИ, 1938.
- [SW] A. Shapiro, J. H. C. Whitehead, *A proof and extension of Dehn's lemma*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1058), 174–178.
- [Sos] A. B. Sossinsky, *Feynman diagrams and Vassiliev invariants*, IHES Preprint **13/92** (1992).
- [Sum] D. Sumner, *Lifting the curtain: using topology to prove the hidden action of enzymes*, AMS Notices **42** (1995), 528–537.
- [Tai] P. G. Tait, *On Knots I,II,III*, Scientific Papers, vol. 1, Cambridge University Press, London, 1898, pp. 273–347.
- [Thi] M. B. Thistlethwaite, *Knot tabulations and related topics*, in Aspects of Topology (I. M. James and E. H. Kronheimer, eds.), Cambridge University Press, 1985, p. 1–76.
- [Tho] A. Thompson, *Thin position and the recognition problem for  $S^3$*  (1994), Preprint.
- [Tur1] V. G. Turaev, *The Yang–Baxter equation and invariants of links*, Inventiones Math. (1992), 527–553, Fasc. 3.
- [Tur2] ———, *Algebras of loops on surfaces, algebras of knots, and quantization*, Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics (C. N. Yang and M. L. Ge., eds.), vol. 9, Word Sci. Pub., 1989, p. 59–96, Advanced Series in Mathematical Physics.
- [Tur3] ———, *Quantum Invariants of Knots and 3-manifolds*, Walter de Gruyter, 1994.
- [TV] V. G. Turaev and O. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols* (1990), Preprint.
- [Vas1] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, in Theory of singularities and its applications. Advances in Soviet Mathematics, vol. 1, 1990, p. 23–70.

- [Vas2] ———, *Complements of Discriminants of Smooth maps: Topology and Applications*, Revised Edition, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1994.
- [Vog] P. Vogel, *Representations of links by braids: A new algorithm*, Comment. Math. Helvetici **65** (1990), 104–113.
- [Wald] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. **87** (1968), 56–88.
- [Wall] A. H. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds*, Canad. J. Math. **12** (1960), 503–528.
- [Wei] N. M. Weinberg, *Sur l'équivalence libre des tresses fermées*, C.R. (Doklady) Acad. Sci. USSR **23** (1939), 215–216.
- [Whi] H. Whitney, *On regular closed curves in the plane*, Comp. Math. **4** (1037), 276–284.
- [Wit1] E. Witten, *Physics and geometry*, Proc. Intl. Congress Math., Berkley, Calif. USA, 1986, pp. 267–303.
- [Wit2] ———, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.
- [Wit3] ———, *Gauge theory, vertex models, and quantum groups*, Nucl. Puhys. B. **330** (1990), 225–246.
- [Wu] F. Y. Wu, *The Potts Model*, Rev. Mod. Phys. **54** (1982), 235–268, no. 1, Jan..
- [Zee] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1965), 471–495.
- [Zi] H. Zieschang, *Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam*, Invent. math. **10** (1970), 4–37.
- [ZVC] X. Цишанг, Э. Фогт, X.-Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*, М.: Наука, 1988.

# Предметный указатель

- алгебра Темперли–Либа 251
  - Хопфа 294
- алгебраическая кривая 199
- алгоритм Вожеля 84
  - Дюорнуа 79–80
- альтернированный узел 50
- атлас 304
  
- база накрытия 189
  - топологии 303
- барицентр 304
- барицентрическое
  - подразделение 103
  
- взаимодействие 290
- вложение 304
  - окружности 15
- восходящая ломаная 71
- второе преобразование
  - Кирби 177
  
- гипотеза Васильева 69
  - Пуанкаре 164
- гладкий узел 15
- гнездо окружностей
  - Зейферта 86
- гомеоморфизм 300
- гомологическая сфера 163
- гомотопическая
  - эквивалентность 302
  
- гомотопия 302
- грань клетки 305
  - симплекса 305
- группа, заданная
  - образующими и соотношениями 310
  - кос 73
  - крашенных кос 91
  - утолщенных кос 96
  
- дальняя коммутативность 75, 288
- действие группы 301
- диаграмма Гаусса 58
  - оснащенного зацепления 182
  - Хегора 114, 115
- дикий узел 16
- дифференцируемое многообразие 304
- дифференцируемое отображение 304
- добавление тривиального листа 230
- допустимое преобразование крашенных диаграмм 227
  
- замена бесконечности 85
- замыкание косы 81
  - элемента алгебры Темперли–Либа 254
- замкнутая поверхность 307

- замкнутое множество 300
- зацепление 11
  - Хопфа 12
  - зацепление Уайтхеда 12
- зацепленные кривые 151
- зеркальный узел 22
- знак перекрестка 41
  
- идемпотент
  - Джонса–Венцля 253
- изотопия 15, 302
- изотопия узлов 15
- икосаэдральная группа 166
- иммерсия 304
- импульс 293
- инвариант 35
  - Васильева 54
  - Васильева порядка не более  $n$  56
  - конечного типа 68
- инволюция 130
- индекс ветвления 190
- индуцированная
  - ориентация 306
- индуцированная
  - топология 300
- исчисление Кирби 174
  
- карта 304
- касательный вектор 308
- квазитреугольная квантовая
  - группа 294
- квантовая группа 292
- квантовое уравнение
  - Янга–Бакстера 291
- клетка 305
- клеточное разбиение 305
  
- кольца Борромео 12
- композиция узлов 17
- коса из  $n$  нитей 71
- коединица 294
- компактное топологическое
  - пространство 300
- компонента связности 301
- коэффициент зацепления 151
- край многообразия 101, 304
- крашенная коса 91
  
- лагранжиан 292
  - Черна–Саймонса 295
- линейная связность 309
- линза, линзовое
  - пространство 117
- линии Вилсона 295
- лист Мёбиуса 30
  
- матрица коэффициентов
  - зацепления 268
- меридиан полнотория 106
- многомерный узел 24
- многообразие 303
- множество ветвления
  - накрытия 202
- модель Поттса 291
  
- наблюдаемые 292–294
- накрывающее
  - многообразие 189
- накрывающий
  - гомеоморфизм 212
- накрытие 189
- неособая алгебраическая
  - кривая 199

- непрерывное  
     отображение 300  
 неприводимая алгебраическая  
     кривая 200  
 незацепленные кривые 152  
  
 обобщенное одночленное  
     соотношение 55  
 образующие группы кос 74  
 обратимый узел 23  
 одноточечная  
     компактификация 303  
 одночленное соотношение 54  
 окрестность 300  
 окружность Зейферта 85  
 оператор Янга–Бакстера  
     ( $R$ -матрица) 288  
 орбита 301  
 ориентация  
     триангулированного  
     многообразия 306  
 ориентированное  
     зацепление 40  
 — многообразия 102  
 ориентируемое  
     многообразия 306  
 ориентируемый атлас 306  
 оснащение узла 146  
 отделимое пространство 300  
 открытое множество 300  
 открытое покрытие 300  
 отношение  
     эквивалентности 301  
  
 параллель полнотория 106  
 параллель (на краю  
     полнотория) 153  
  
 первое преобразование  
     Кирби 175  
 перекресток 13  
 перестройки по ленте 155  
 переход 13  
 плоская алгебраическая  
     кривая 199  
 плоско изотопные диаграммы  
     зацеплений 18  
 поверхность 307  
 погружение 304  
 подразделение  
     триангуляции 195  
 полигональное зацепление 14  
 полигональный узел 14  
 полином Александра 52  
 — Джонса 44  
 — Джонса от двух  
     переменных 53  
 — Дроботухиной 283  
 — HOMFLY 53  
 — Кауфмана 40  
 — Конвея 52  
 полная энергия 290  
 положительное звено  
     диаграммы  
     зацепления 83  
 порядок диаграммы Гаусса 58  
 — хордовой диаграммы 58  
 правильная раскраска  
     зацепления 227  
 преобразование Кирби 174,  
     176  
 — нити элемента из  
      $S(I \times S^1)$  262  
 — Маркова 89  
 — Рейдемейстера 20, 281  
 — Фенна–Рурка 179  
 приклеивание по

- отображению 302  
 проблема тождества для  
 группы кос 78–79  
 произведение кос 72  
 производная по  
 направлению 308  
 простой узел 23  
 пространство-время 295  
 пространство орбит 302  
 — skein (skein-  
 пространство) 244  
 проход 13  
  
 разбиение Хегора 103  
 — — многообразия с  
 краем 111  
 разветвленное накрытие 189,  
 202  
 рациональная  
 перестройка 146  
 редуцированная коса 79  
 риманова метрика 308  
 род алгебраической  
 кривой 200  
 ручка поверхности 307  
 ручной узел 16  
  
 свободная группа 309  
 связанная сумма  
 поверхностей 307  
 — — узлов 17  
 связанное множество 300  
 символ инварианта  
 Васильева 58  
 симплекс 304  
 симплициальный  
 комплекс 305  
  
 симплициальное  
 разбиение 305  
 сингулярный узел 53  
 скин-инвариант  
 (skein-инвариант) 242  
 скобка Кауфмана 35  
 — Пуассона 292  
 скручивание вдоль кривой 95  
 — Дена 124–125  
 сонаправленные кривые в  
 полнотории 153  
 соотношение типа Конвея 44  
 соотношения Артина 76  
 составной узел 23  
 состояние диаграммы 39  
 специальная система  
 оснащенных кривых 220  
 спин 290  
 статистическая сумма 290  
 сфера Пуанкаре 164  
  
 таблицы узлов 48  
 температура 290  
 теорема Александра о  
 гомеоморфизме 93  
 — — — косах 83  
 — — — накрытиях 202  
 — Артина 76  
 — Дена–Ликориша 125  
 — Кирби 177  
 — Концевича 63  
 — Ликориша о  $3g - 1$   
 кривых 224  
 — Маркова 90  
 — Рейдемейстера 20  
 — Рохлина 130  
 — Фенна–Рурка 179  
 — Хилдена–Монтесиноса 210  
 тело с ручками 102

- тень узла 46
- топологическое
  - многообразие 303
- топологическое
  - пространство 300
- топология 300
- торический узел 207
  - — типа (2, 5) 66
- точки ветвления
  - накрытия 189
- трансверсальные
  - триангуляции 195
- треугольное соотношение 294
- трехмерное многообразие 101
  - — с краем 101
- триангулированное
  - многообразие 101
- триангуляция
  - многообразия 192, 305
- тривиальный узел 11
- трилистник 11
- трюк Александра 83
  - Уитни 28
  
- узел 11, 12
  - восьмерка 11
- универсальное зацепление 232
- уничтожение перекрестка 85
- уравнение Гамильтона 293
  - Шрёдингера 293
  - Эйлера–Лагранжа 293
  - Янга–Бакстера 288
- утолщенная коса 94
  
- фазовый переход 290
- фазовое пространство 292
- фактормножество 301
- факторпространство 301
- фейнмановский интеграл 296
- формула Римана–
  - Гуревича 196
- фундаментальная группа 119, 309
  
- хаусдорфово
  - пространство 298–300
- хордовая диаграмма 58
  
- циклическое разветвленное
  - накрытие 204
- целочисленные
  - перестройки 155
  
- частица 290
- четырёхчленное
  - соотношение 55
  
- эйлерова характеристика 130, 195
- элементарная редукция
  - косы 79
- элементарное преобразование
  - узла 14
- эквивалентность гладких
  - узлов 15
  - зацеплений 14
  - кос 71
  - перестроек 156