БИБЛИОТЕКА ПРИКЛАДНОГО АНАЛИЗА И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

И. М. СОБОЛЬ

Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара

518
С 54
УДК 517.5

Библиотека выпускается под общим руководством кафедры вычислительной математики Московского государственного университета
Заведующий кафедрой академик А. Н. ТИХОНОВ

Илья Меерович Соболь

МНОГОМЕРНЫЕ КВАДРАТНЫЕ ФОРМУЛЫ И ФУНКЦИИ ХААРА

М., 1969 г., 288 стр. с илл.

Редактор *В. М. Гринберг*
Техн. редактор *В. Н. Кондакова*
Корректоры *Т. С. Плетнева* и *Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 11/XII 1968 г. Подписано к печати 15/VIII 1969 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 9. Условн. печ. л. 15,12 Уч.-изд. л.14,03
Тираж 7000 экз. Т-10868. Цена книги 88 коп. Заказ № 1547.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
Москва, Шубинский пер., 10

$\frac{2-2-4}{93-69}$

Оглавление

Предисловие

Книга состоит из двух весьма различных частей. Часть I посвящена функциям Хаара и их применениям. Рассматриваются функции от одной переменной. Изложение весьма подробное и (за исключением мелкого шрифта) доступно читателю, знакомому с обычным курсом математического анализа.

Часть II посвящена многомерным квадратурным формулам. Здесь изучаются функции от многих переменных. Изложение более сжатое и рассчитано на более высокий математический уровень читателя.

Несмотря на такие различия, я убежден, что эти части следует излагать вместе. С одной стороны, нельзя предполагать, что специалист, интересующийся многомерными квадратурами, знаком с функциями Хаара. С другой стороны, вряд ли разумно (хотя и возможно) убеждать читателя в том, что функции Хаара могут быть полезными для прикладной математики, не указав при этом важнейшие (пока) приложения — исследование многомерных квадратур.

В книге затронуты вопросы, которые могут заинтересовать математиков весьма различных специальностей. Учитывая это, я старался уменьшить зависимость между некоторыми разделами книги (но не ценою повторений) и даже снабдил главы 1, 2 и 3 отдельными указателями литературы. Таблица на странице 6 поможет читателям выделить эти вопросы.

Лица, интересующиеся только «рецептом» для вычисления многомерных интегралов, могут обратиться прямо к § 4 гл. 6.

Впервые я узнал о функциях Хаара из курса лекций Д. Е. Меньшова «Ряды по ортогональным функциям»,

Вопрос	Разделы, имеющие к нему отношение
Квадратурные формулы	гл. 2; гл. 4—8
Равномерное распределение	гл. 3; гл. 4—6
Ортогональные ряды	гл. 1; § 2 гл. 2
Метод Монте-Карло	§ 4 гл. 6; гл. 7
Геометрия n-мерного куба	§ 1 гл. 6; § 3 гл. 6
Разностные уравнения в конечном поле	§ 2 гл. 6
Таблица для вычисления многомерных интегралов	§ 4 гл. 6

который я слушал на механико-математическом факультете МГУ в 1947 году (долгое время основным пособием по функциям Хаара служили мне записки этих лекций). Вряд ли кто-нибудь мог предположить тогда, что эти функции пригодятся мне много лет спустя в исследованиях по вычислительной математике! (Это — лишний пример, показывающий пользу широкого математического образования.)

Разработка вопросов, изложенных в этой книге, была начата мною в 1955 году и велась (с перерывами) более десяти лет. Пользуюсь случаем, чтобы выразить свою глубокую благодарность коллективу, в котором я все это время работаю, за постоянную дружескую поддержку. Я глубоко благодарен А. Н. Тихонову и А. А. Самарскому, уделившим моей работе много внимания, и Л. А. Люстернику, подавшему мне мысль написать эту книгу.

И. Соболь

Москва, 25.I.1968

Введение

Введением к I части книги может служить начало гл. 1, так что настоящее введение есть, по существу, введение ко II части.

Задача о вычислении многомерных (или многократных) интегралов — это одна из важнейших проблем вычислительной математики. В данной книге рассматриваются только интегралы по единичному n-мерному кубу K^n. Это, конечно, ограничение задачи, хотя подавляющее большинство связных областей интегрирования, встречающихся на практике, могут быть надлежащим преобразованием координат переведены в куб *).

Появление и развитие быстродействующих электронных вычислительных машин (ЭВМ), оказавшее огромное влияние на всю вычислительную математику, заставило по-новому подойти и к этой, казалось бы, классической задаче. Во-первых, необыкновенно расширился круг решаемых вычислительной математикой задач и потребовалось научиться вычислять интегралы от гораздо более сложных функций. Во-вторых, резко выросли вычислительные возможности: во времена ручного счета использовались квадратурные (или кубатурные) формулы с количеством узлов N, не превосходящим нескольких десятков; сейчас можно использовать N порядка сотен, тысяч, десятков тысяч.

Как правило, «классические» формулы для вычисления n-мерных интегралов получаются одним из следующих двух способов.

---

*) Это особенно ясно в случаях, когда интегралы вычисляются методом Монте-Карло (ср. стр. 243).

1) Интеграл рассматривается как повторный:

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 dx_n \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1,$$

и по каждой переменной используется своя одномерная квадратурная формула

$$\int_0^1 g(x_k)\,dx_k \approx \sum_{i=0}^{M_k-1} C_{ki}\, g(\xi_{ki}).$$

Получается n-мерная квадратурная формула

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n \approx$$

$$\approx \sum_{i_1=0}^{M_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{M_n-1} C_{1i_1} \cdots C_{ni_n} f(\xi_{1i_1}, \ldots, \xi_{ni_n}), \qquad (1)$$

где число узлов $N = M_1 \ldots M_n$.

2) Узлы и веса в формуле

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n \approx \sum_{i=0}^{N-1} C_i f(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in}) \qquad (2)$$

выбираются так, чтобы эта формула была точной для некоторого (по возможности широкого) множества функций, например для многочленов какой-то степени.

Квадратурные формулы типа (1) и (2) и сейчас не потеряли своей ценности. Однако они плохо удовлетворяют упомянутым выше новым требованиям: формулы типа (1) при $n > 2$ имеют плохую точность *), а в формулах типа (2) при больших N очень сложно вычисляются узлы и веса.

Интересно, что отчетливое представление об этом у математиков появилось только после того, как возник метод Монте-Карло. Простейший вариант этого метода дает нам

---

*) Более точный смысл этого утверждения см. в § 1 гл. 5.

квадратурную формулу

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(\Gamma_i), \qquad (3)$$

где Γ_i — независимые случайные точки, равномерно распределенные в K^n. В формуле (3) можно использовать очень большие N, так как все точки Γ_i вычисляются одинаково. А порядок ее сходимости (по вероятности) не зависит от n и равен $1/\sqrt{N}$.

Во многих новых работах квадратурные формулы изучаются на конкретных классах функций. Можно пытаться построить наилучшую квадратурную формулу на данном классе (это так называемая экстремальная задача) или хотя бы найти квадратурные формулы, обеспечивающие наилучший возможный порядок сходимости *). Правда, в большинстве случаев удается достичь лишь «почти наилучшего» порядка сходимости, который отличается от наилучшего меньше чем на N^ε со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$. В книге не раз подчеркивается, что на весьма близких классах функций, состоящих практически из одних и тех же функций, но по-разному нормированных, могут получаться совсем различные экстремальные задачи.

Естественно, что работа с различными классами функций потребовала применения различных методов исследования. Настоящая книга отличается от всех других книг по многомерным квадратурам тем, что в ней рассматриваются иные классы функций — классы S_p, содержащие функции с быстро сходящимися рядами Фурье — Хаара. Это очень широкие классы функций. Образно выражаясь, можно сказать, что в книге рассмотрены максимально широкие классы функций, на которых еще имеет смысл изучать квадратурные формулы.

Метод исследования, основанный на применении рядов Хаара, изложен в гл. 4. В гл. 5 с помощью этого метода получены оценки погрешности для ряда известных квадратурных формул. А в гл. 6 построены формулы, реализую-

*) Точные формулировки этих задач приведены в начале гл. 2 и гл. 4.

щие наилучший возможный порядок сходимости квадратур на классах S_p. Пожалуй, это наиболее сложная глава в книге.

В гл. 7 тем же методом оценивается погрешность квадратур в бесконечномерном кубе. И только небольшая гл. 8 не использует метода рядов Хаара: здесь указаны точные оценки погрешности на некоторых других классах функций, близких к рассмотренным в гл. 4—7.

Книга эта (как, впрочем, и любая другая) не претендует на исчерпывающее решение проблемы. Даже на классах S_p не все задачи решены: построены формулы с наилучшими порядками сходимости, но не найдены наилучшие константы в оценках при $n \geqslant 3$ (см. ниже $B(n)$ в формуле (4)); построены последовательности точек $\{Q_i\}$, которые можно использовать в формуле (3) вместо случайных $\{\Gamma_i\}$ (и при этом на очень широких классах функций порядок сходимости будет $1/N^{1-\varepsilon}$), однако не рассмотрен вопрос о выборе наилучших среди этих последовательностей.

По нашему мнению, теория многомерных квадратурных формул еще очень далека от завершения. На это указывает, в частности, следующий факт (или парадокс?). Оценки погрешности (на различных классах функций) обычно имеют вид

$$\left|\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n - \sum_{i=0}^{N-1} C_i f(\xi_{i1}, \ldots, \xi_{in})\right| \leqslant \leqslant B(n)\, \rho(N)\, \|f\|, \qquad (4)$$

где $\rho(N) \to 0$ при $N \to \infty$. И, как правило, константы $B(n)$ так быстро увеличиваются с ростом n, что если отнестись к этим оценкам очень серьезно, то можно потерять всякую надежду вычислить, скажем, 12-мерный интеграл с приличной точностью. Однако такие интегралы на практике вычисляются (см., например, § 4 гл. 6).

В связи с этим хочется привести одно несколько еретическое соображение: может быть, сложность теории связана не только с существом дела, а еще с тем, что мы неразумно определяем классы функций? Может быть, классы функций, которые приходится интегрировать при расчете практических задач, плохо описываются традиционными нормами (в которые входят ограничения на производные от f или на ее коэффициенты Фурье)?

Впервые подобные соображения автор услышал от И. М. Гельфанда.

Несмотря на эти «сомнения», автор убежден, что исследования квадратур на различных классах функций нужны вычислительной математике. Полученные в ходе таких исследований методы вычисления интегралов могут быть весьма полезными, даже если решающим критерием применимости их окажется не теоретическая оценка, а вычислительная практика.

Конечно, может оказаться интересной и сама теория, независимо от практических приложений.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава 1

Функции Хаара

Последовательность функций $\{\chi_k(x)\}$, называемых обычно функциями Хаара, была построена в диссертации знаменитого венгерского математика А. Хаара (Alfred Haar, 1885—1933 *)) в 1909 году (см. [32, 33]). Это была первая ортогональная система со следующим замечательным свойством: *любая непрерывная на отрезке* [0, 1] *функция* $f(x)$ *разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям системы:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x). \qquad (*)$$

В дальнейшем функции Хаара исследовались во многих работах. Большинство этих работ связано с теорией функций действительного переменного и с теорией ортогональных рядов. Например, изучается характер сходимости ряда (*) в зависимости от свойств $f(x)$ или от свойств коэффициентов c_k. С этими вопросами можно познакомиться по монографиям [9, 1] и по обзорной статье [6].

До недавнего времени область применений функций Хаара ограничивалась теорией функций и функциональным анализом, где использовался тот факт, что система $\{\chi_k(x)\}$ образует базис в некоторых функциональных пространствах (например, [11]). С функциями Хаара связаны все работы [1—48], за исключением [3, 16, 22, 41]. Список этот не претендует на полноту, но составитель старался не пропускать фамилий.

---

*) О жизни и деятельности А. Хаара см. [32].

В последнее десятилетие функции Хаара находят применение в прикладной математике. Помимо работ автора по многомерным квадратурам, составляющим основное содержание настоящей книги, функции Хаара используются для построения интерполяционных формул [8], в теории вероятностей [34, 28], при изучении изотропной турбулентности [26], в теории равномерного распределения (см. гл. 3).

В настоящей главе рассмотрены только такие свойства функций Хаара, которые могут быть более или менее непосредственно использованы в вычислительной математике. Некоторые из свойств, играющих большую роль в теории ортогональных рядов, кратко перечислены в конце § 2. Там же приведены формулы, связывающие функции Хаара с другими замечательными ортогональными функциями — Радемахера, Уолша, Шаудера,— хотя сами эти функции в книге не рассматриваются *).

К первой главе мог бы быть отнесен также § 2 главы 2, в котором изучаются некоторые классы функций с достаточно быстро сходящимися разложениями (∗).

§ 1. Определение функций Хаара

Двоичные отрезки. *Двоичными* мы будем называть такие отрезки, которые могут быть получены путем деления отрезка [0, 1] на 2^m равных частей. Мы будем считать все эти отрезки замкнутыми слева и открытыми справа, если их правый конец отличен от 1. Если правый конец отрезка равен 1, то будем считать отрезок замкнутым также справа. Таким образом, двоичные отрезки — это отрезки [0, 1]; [0, 1/2), [1/2, 1]; [0, 1/4), [1/4, 1/2), [1/2, 3/4), [3/4, 1]; [0, 1/8), ... Отрезки [1/4, 3/4) или [5/8, 7/8) двоичными не считаются.

Для двоичных отрезков введем следующее обозначение:

$$l_{mj} = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right),$$

*) Упомянем статью [16], посвященную применению в прикладной математике функций Уолша, которые представляют собой линейные комбинации функций Хаара.

где j меняется от 1 до 2^{m-1}, а $m = 1, 2, \ldots$ (Конечно, в случае $j = 2^{m-1}$ надо считать l_{mj} замкнутым также справа.)

Легко видеть, что при каждом m

$$l_{m1} + l_{m2} + \ldots + l_{m2^{m-1}} = [0, 1].$$

Наряду с двойной нумерацией мы будем использовать также простую нумерацию, полагая $l_{mj} = l_k$, где

$$k = 2^{m-1} + j. \tag{1.1}$$

Правда, при такой нумерации $k = 2, 3, \ldots$ (отрезок с $k = 1$ отсутствует), но в дальнейшем это будет удобно.

Левую и правую половины l_{mj} условимся обозначать $\overset{-}{l}_{mj}$ и $\overset{+}{l}_{mj}$, так что $\overset{-}{l}_{mj} + \overset{+}{l}_{mj} = l_{mj}$. Нетрудно проверить, что

$$\overset{-}{l}_{mj} = l_{m+1,\, 2j-1}, \quad \overset{+}{l}_{mj} = l_{m+1,\, 2j}.$$

В некоторых случаях длину отрезка l мы будем обозначать $|l|$, так что $|l_{mj}| = 1/2^{m-1}$.

Определение функций Хаара. Систему функций Хаара $\{\chi_k(x)\}$ удобно строить группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\{\chi_{mj}(x)\}$, $j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$; $m = 1, 2, \ldots$ Связь между двойной нумерацией (m, j) и обычной (k) выражается соотношением (1.1), причем первая функция $\chi_1(x) \equiv 1$ остается вне групп.

Определение:

$$\chi_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in \overset{-}{l}_{mj}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in \overset{+}{l}_{mj}, \\ 0 & \text{при } x \notin l_{mj}. \end{cases} \tag{1.2}$$

На рис. 1.1 изображены первые 8 функций этой системы.

В литературе можно встретить различные определения функций $\chi_k(x)$, отличающиеся значениями этих функций в точках разрыва. В оригинальной работе А. Хаара [33] предполагалось, что

$$\chi_{mj}(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \chi_{mj}(x), \qquad \chi_{mj}(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \chi_{mj}(x), \tag{1.3}$$

а во всех внутренних точках разрыва

$$\chi_{mj}(x) = \frac{1}{2}\left[\chi_{mj}(x-0) + \chi_{mj}(x+0)\right]. \qquad (1.4)$$

В [9] приведено несколько иное определение:

$$\chi_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j-1/2}{2^{m-1}}\right), \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in \left(\frac{j-1/2}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right], \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases} \qquad (1.5)$$

Условие (1.3) при таком определении справедливо, однако условие (1.4) выполняется не во всех точках разрыва.

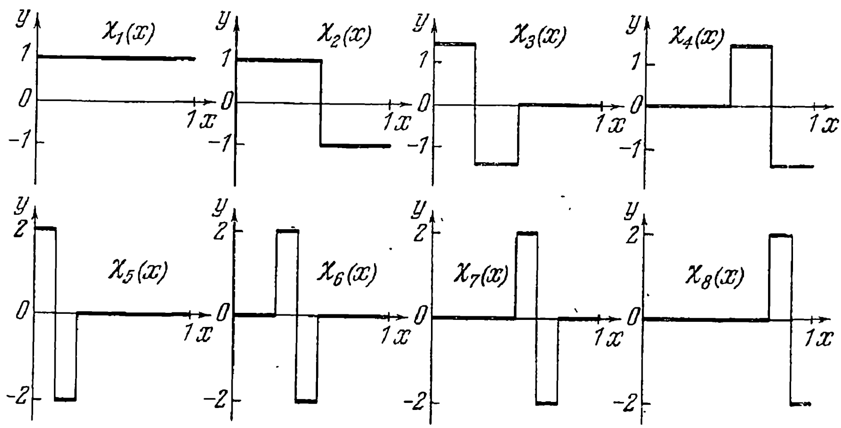

Рис. 1.1.

Определение (1.2), используемое в этой книге, также влечет за собой выполнение условия (1.3). А вместо (1.4) во всех внутренних точках разрыва функции Хаара будут непрерывны справа:

$$\chi_{mj}(x) = \chi_{mj}(x+0).$$

П. Л. Ульянов [23] и Ж. Дельпорт [28] доказали, что важнейшее свойство системы Хаара, выделенное курсивом на стр. 12, не имеет места в случае определения (1.5) (см. ниже пример 1). Поэтому это определение следует считать ошибочным *). К сожалению, определение (1.5) было перенесено в ряд других книг (например, [7, 11, 21]).

В дальнейшем всюду (если не оговорено противное) используется определение (1.2). При таком определении $\operatorname{sgn} |\chi_{mj}(x)|$ равен характеристической функции отрезка l_{mj}:

$$\operatorname{sgn} |\chi_{mj}(x)| = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in l_{mj}, \\ 0, & \text{если } x \notin l_{mj}. \end{cases}$$

Отметим еще следующее очевидное тождество: при любом $q > 0$

$$\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\chi_{mj}(x)|^q = 2^{\frac{1}{2}(m-1)q}. \tag{1.6}$$

Ортонормированность системы Хаара. Докажем, что две различные функции Хаара *ортогональны*: если $k \neq k'$, то

$$\int_0^1 \chi_k(x)\, \chi_{k'}(x)\, dx = 0. \tag{1.7}$$

а) Если $k' = 1$, $k > 1$, то

$$\int_0^1 \chi_1(x)\, \chi_k(x)\, dx = \int_0^1 \chi_k(x)\, dx = \int_{l_{mj}} \chi_{mj}(x)\, dx = 0.$$

б) Если обе функции принадлежат одной группе (рис. 1.2), то легко видеть, что произведение $\chi_k(x)\chi_{k'}(x) \equiv 0$.

в) Пусть теперь обе функции принадлежат разным группам: $k = (m, j)$, $k' = (m', j')$, $m > m'$. Если l_{mj} не содержится в $l_{m'j'}$, то снова $\chi_k(x)\,\chi_{k'}(x) \equiv 0$ (рис. 1.3). Если же $l_{mj} \subset l_{m'j'}$, то либо $l_{mj} \subseteq \bar{l}_{m'j'}$, либо $l_{mj} \subseteq \overset{+}{l}_{m'j'}$.

---

*) Более слабое утверждение о том, что доказательство упомянутого свойства, приведённое в [9], не проходит в случае определения (1.5), содержалось в [18].

И тогда (рис. 1.4)

$$\int_0^1 \chi_k(x)\,\chi_{k'}(x)\,dx = \int_{l_{mj}} \chi_{mj}(x)\,\chi_{m'j'}(x)\,dx =$$
$$= \pm 2^{\frac{m'-1}{2}} \int_{l_{mj}} \chi_{mj}(x)\,dx = 0.$$

Докажем теперь, что функции Хаара *нормированы*:

$$\int_0^1 \chi_k^2(x)\,dx = 1. \tag{1.8}$$

При $k = 1$ это очевидно. Если же $k > 1$, то из (1.2) следует

$$\int_0^1 \chi_{mj}^2(x)\,dx = \int_{l_{mj}} \chi_{mj}^2(x)\,dx = 2^{m-1}\,|\,l_{mj}\,| = 1.$$

Итак, функции $\{\chi_k(x)\}$ ортогональны (1.7) и нормированы (1.8) или, как часто говорят, *ортонормированы*.

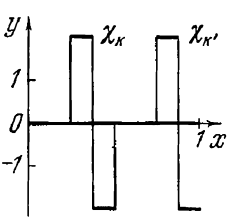

Рис. 1.2.

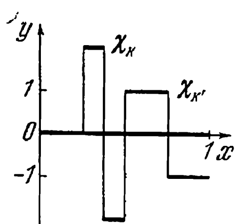

Рис. 1.3

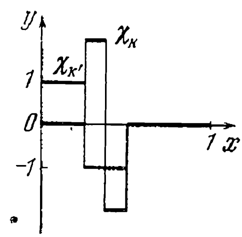

Рис. 1.4.

Отрезки постоянства семейства функций Хаара. Рассмотрим семейство функций $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, ..., $\chi_n(x)$. Предположим сперва, что $n = 2^{m-1}$. Тогда очевидно, что все функции семейства постоянны на двоичных отрезках l_{m1}, l_{m2}, ..., $l_{m2^{m-1}}$, количество которых равно n.

Если $n = 2^{m-1} + j$, то для нахождения отрезков постоянства придется первые j из перечисленных отрезков поделить пополам. Общее число отрезков постоянства снова окажется равным n:

$$l_{m1}^-,\ l_{m1}^+,\ldots,\ l_{mj}^-,\ l_{mj}^+,\ l_{m,\,j+1},\ \ldots,\ l_{m,\,2^{m-1}}$$

Условимся обозначать все отрезки постоянства семейства функций $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, ..., $\chi_n(x)$ через λ_{n1}, λ_{n2}, ..., λ_{nn} (нумерация слева направо, подряд).

Если $n = 2^{m-1} + j$, то длины этих отрезков

$$|\lambda_{ns}| = \begin{cases} 1/2^m & \text{при } 1 \leqslant s \leqslant 2j, \\ 1/2^{m-1} & \text{при } 2j+1 \leqslant s \leqslant n. \end{cases} \tag{1.9}$$

Очевидно также, что при любом n

$$\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots + \lambda_{nn} = [0,\ 1].$$

Лемма Хаара. Рассмотрим функцию от двух переменных x и y, определенную в единичном квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$:

$$K_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x)\,\chi_k(y). \tag{1.10}$$

В лемме утверждается, что эта функция отлична от нуля только в квадратах типа $\lambda_{nk} \times \lambda_{nk}$, расположенных вдоль диагонали единичного квадрата.

Лемма ([33]). *Каково бы ни было натуральное число* $n > 1$,

$$K_n(x, y) = \begin{cases} 1/|\lambda_{ns}|, & \text{если } x \in \lambda_{ns},\ y \in \lambda_{ns}, \\ 0 & \text{вне } \bigcup\limits_{s=1}^{n} (\lambda_{ns} \times \lambda_{ns}). \end{cases}$$

Доказательство. а) Рассмотрим сперва случай, когда n есть степень двойки. Во-первых, при $n = 2$

$$K_2(x, y) = 1 + \chi_2(x)\,\chi_2(y) = \begin{cases} 2 & \text{в } (\lambda_{21} \times \lambda_{21}) \cup (\lambda_{22} \times \lambda_{22}), \\ 0 & \text{в } (\lambda_{21} \times \lambda_{22}) \cup (\lambda_{22} \times \lambda_{21}), \end{cases}$$

и утверждение леммы справедливо.

Допустим теперь, что утверждение леммы верно при $n = 2^{m-1}$:

$$K_{2^{m-1}}(x, y) = \begin{cases} 2^{m-1} & \text{в диагон. квадратах,} \\ 0 & \text{вне диагон. квадратов;} \end{cases}$$

квадраты эти $(\lambda_{2^{m-1},s} \times \lambda_{2^{m-1},s})$ для случая $m = 3$ изображены на рис. 1.5. Вычислим

$$K_{2^m}(x, y) = K_{2^{m-1}}(x, y) + \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \chi_{mj}(x)\, \chi_{mj}(y).$$

Сумма, стоящая справа, отлична от нуля только в тех же

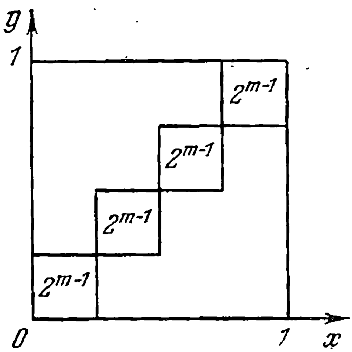

Рис. 1.5.

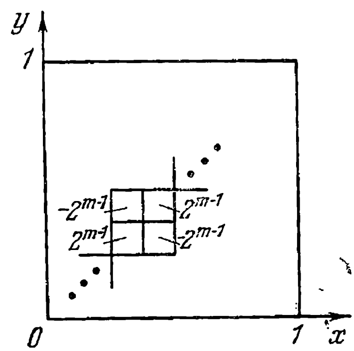

Рис. 1.6.

диагональных квадратах, причем значения ее в каждом таком квадрате равны либо 2^{m-1}, либо -2^{m-1} (рис. 1.6). Поэтому $K_{2^m}(x, y) = 2^m$ в 2^m новых диагональных квадратах $(\lambda_{2^m,s} \times \lambda_{2^m,s})$ и $K_{2^m}(x, y) = 0$ вне этих квадратов. Таким образом, по индукции для случая, когда n есть степень двойки, лемма доказана.

б) Пусть теперь $n = 2^{m-1} + j$. Тогда

$$K_n(x, y) = K_{2^{m-1}}(x, y) + \sum_{p=1}^{j} \chi_{mp}(x)\, \chi_{mp}(y).$$

В этом случае значения суммы, стоящей справа, отличны от нуля только в первых j диагональных квадратах (из числа квадратов, изображенных на рис. 1.5), а значения ее в каждом из этих квадратов по-прежнему изображаются схемой рис. 1.6. Легко видеть, что значения $K_n(x, y)$ будут равны 2^m в $2j$ новых диагональных квадратах и останутся равными 2^{m-1} в $2^{m-1} - j$ старых диагональных квадратах (случай $m = 3$, $j = 2$ изображен на рис. 1.7). Так как все эти квадраты имеют вид $\lambda_{ns} \times \lambda_{ns}$, то, принимая во внимание (1.9), получим утверждение леммы.

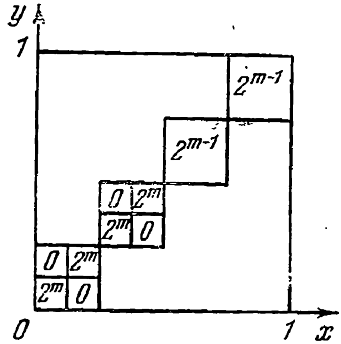

Рис. 1.7.

Замечание. Как указано в [33], можно строить системы функций, аналогичные $\{\chi_k(x)\}$, деля отрезок [0,1] (а затем и каждый из получающихся отрезков) на две неравные части, лишь бы множество всех точек деления было всюду плотным на [0,1]. Более того, можно осуществлять деление на три (или более) частей и строить всевозможные кусочно постоянные функции, ортогональные ко всем предыдущим функциям.

Многие из результатов, изложенных в книге, легко переносятся на такие «обобщенные системы Хаара». Однако мы этого нигде касаться не будем.

§ 2. Ряды Хаара

Ряды Фурье — Хаара. Пусть $f(x)$ — произвольная интегрируемая *) функция, определенная на отрезке [0, 1]. Коэффициентами Фурье относительно системы Хаара или сокращенно *коэффициентами Фурье — Хаара* этой функции называются числа

$$c_k = \int_0^1 f(x)\, \chi_k(x)\, dx. \tag{1.11}$$

*) В этой главе под словом «интегрируемость» подразумевается интегрируемость в смысле Лебега. Однако читатель, незнакомый с понятием интеграла Лебега, может считать, что интегрируемость подразумевается в смысле Римана. В нужных местах сделаны соответствующие разъяснения.

Некоторые свойства коэффициентов Фурье приведены на стр. 39.

Для любой интегрируемой функции $f(x)$ можно вычислить коэффициенты Фурье — Хаара $\{c_k\}$ и составить *ряд Фурье — Хаара*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_k(x) . \tag{1.12}$$

Прежде чем перейти к теоремам о сходимости этого ряда, рассмотрим его частичную сумму

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_k(x) .$$

С помощью (1.11) и (1.10) отсюда легко получить, что

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x) \int_0^1 \chi_k(y) f(y)\, dy = \int_0^1 K_n(x, y) f(y)\, dy.$$

Пусть $\lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nn}$ — отрезки постоянства семейства функций $\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)$. Из леммы Хаара вытекает, что если $x \in \lambda_{ns}$, то

$$S_n(x) = \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int_{\lambda_{ns}} f(y)\, dy . \tag{1.13}$$

Это интересное соотношение будет неоднократно использовано в дальнейшем.

Сходимость рядов Фурье — Хаара. Основные утверждения следующих двух теорем принадлежат А. Хаару [33].

Теорема 1. *Предположим, что функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* [0, 1]. *Тогда ряд* (1.12) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на* [0, 1].

Утверждение теоремы остается в силе, если $f(x)$ *имеет лишь конечное число двоично рациональных точек разрыва* $r_1 < r_2 < \ldots < r_p$, *в каждой из которых существуют* $f(r_i + 0) = f(r_i)$ *и* $f(r_i - 0) \neq f(r_i)$ *).

---

*) Иначе говоря, все разрывы первого рода и в точках разрыва функция $f(x)$ непрерывна справа.

Теорема 2. *Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на отрезке* $[0, 1]$. *Тогда*: 1°. *Ряд* (1.12) *сходится к $f(x)$ почти во всех точках* *) *отрезка* $[0, 1]$. 2°. *Если в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ непрерывна, то в этой точке ряд* (1.12) *сходится к $f(x_0)$*. 3°. *Если в двоично рациональной точке $x = r$ функция $f(x)$ непрерывна справа, то в этой точке ряд* (1.12) *сходится к $f(r)$*. 4°. *Если $f(x)$ равномерно непрерывна при $r_1 \leqslant x < r_2$, где r_1, r_2 — двоично рациональные точки, то ряд* (1.12) *сходится равномерно при $r_1 \leqslant x < r_2$*.

Доказательство теоремы 1. Из формулы (1.13) вытекает, что если $x \in \lambda_{ns}$, то

$$f(x) - S_n(x) = \frac{1}{|\lambda_{ns}|} \int\limits_{\lambda_{ns}} [f(x) - f(y)]\, dy. \qquad (1.14)$$

А так как каждая точка x из $[0, 1]$ принадлежит одному из λ_{ns}, то (1.14) справедливо для всех x (со своими λ_{ns}).

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0, 1]$, то можно указать такое $\delta > 0$, что из $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Выберем n_0 столь большим, чтобы $\max\limits_s |\lambda_{ns}| < \delta$ при всех $n \geqslant n_0$. Из (1.14) получим, что при таких n

$$|f(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \qquad (1.15)$$

и это неравенство справедливо во всех точках x.

Замечание. Если вместо (1.2) использовать определение (1.5) или исходное определение Хаара (с условием (1.4)), то формула (1.13) будет справедлива только для точек x, лежащих внутри λ_{ns}. Повторяя те же рассуждения, докажем справедливость неравенства

---

*) Читателю, незнакомому с теорией интегрирования Лебега, необходимо разъяснить смысл слов «сходится почти во всех точках». Это значит, что остальные точки можно покрыть системой интервалов сколь угодно малой длины.

Более точно: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно указать последовательность интервалов (α_1, β_1), $(\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_s, \beta_s), \ldots$ такую, что $\sum\limits_{s=1}^{\infty} |\beta_s - \alpha_s| < \varepsilon$ и каждая точка, в которой ряд (1.12) не сходится к $f(x)$, принадлежит хотя бы одному из этих интервалов.

(1.15) для всех точек x, отличных от двоично рациональных. Двоично рациональные точки требуют особого рассмотрения.

Предположим, что выполнено условие (1.4). Тогда во всех точках $S_n(x) = \frac{1}{2}\left[S_n(x+0) + S_n(x-0)\right]$. К любой двоично рациональной точке $x = r$ подберем иррациональные точки x_1 и x_2 так, что $x_1 < r < x_2$. Из (1.15) легко получить, что

$$\left|\frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{1}{2}\left[S_n(x_1) + S_n(x_2)\right]\right| < \varepsilon.$$

Устремляя x_1 и x_2 к r, найдем, что при $x = r$

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, последнее неравенство справедливо во всех точках отрезка $[0,1]$.

Если использовать определение (1.5), то, вообще говоря,

$$S_n(x) \neq \frac{1}{2}\left[S_n(x+0) + S_n(x-0)\right],$$

и последние рассуждения теряют силу.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. В этом случае $[0, 1]$ можно разбить на сумму $p+1$ отрезков:

$$[0, 1] = [0, r_1) + [r_1, r_2) + \ldots + [r_{p-1}, r_p) + [r_p, 1],$$

на каждом из которых $f(x)$ непрерывна. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и для каждого из этих отрезков выберем свое $\delta_i > 0$ так, чтобы из неравенства $|x - y| < \delta_i$ (где x и y принадлежат одному и тому же $[r_i, r_{i+1})$) следовало $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Выберем n_0 столь большим, чтобы при всех $n \geqslant n_0$ выполнялись неравенства $\max\limits_s |\lambda_{ns}| < \min\limits_i \delta_i$ и в то же время $\max\limits_s |\lambda_{ns}| < \min\limits_i |r_{i+1} - r_i|$. Тогда можно снова воспользоваться соотношением (1.14) и доказать, что (1.15) имеет место во всех точках отрезка $[0, 1]$, включая точки разрыва (каждая из которых будет левым концом одного из λ_{ns}).

Доказательство теоремы 2. Во-первых, докажем утверждение 2°. Для этого рассмотрим неопределенный интеграл

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt. \tag{1.16}$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то в этой точке существует производная $F'(x_0) = f(x_0)$. Выделим последовательность λ_{ns}, содержащих точку x_0. Концы λ_{ns} обозначим α_{ns} и β_{ns}. Тогда формулу (1.13) с учетом (1.16) можно переписать так:

$$S_n(x_0) = \frac{F(\beta_{ns}) - F(\alpha_{ns})}{\beta_{ns} - \alpha_{ns}}. \tag{1.17}$$

Так как при $n \to \infty$ длины $|\lambda_{ns}| = |\beta_{ns} - \alpha_{ns}| \to 0$, то отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = F'(x_0) = f(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Доказательство утверждения 1° *). Так как интеграл $F(x)$ есть абсолютно непрерывная функция и имеет почти во всех точках производную $F'(x) = f(x)$, то предыдущее рассуждение можно повторить во всех этих точках.

Доказательство утверждения 3°. В этом случае функция $F(x)$ имеет в точке $x = r$ правую производную, равную $f(r)$. Выделим последовательность λ_{ns}, имеющих точку r своим левым концом. Правые концы λ_{ns} обозначим β_{ns}. И вместо (1.17) запишем

$$S_n(r) = \frac{F(\beta_{ns}) - F(r)}{\beta_{ns} - r}.$$

При $n \to \infty$ это отношение стремится к правой производной, так что $S_n(r) \to f(r)$.

Доказательство утверждения 4°. Легко видеть, что при всех достаточно больших n отрезок $[r_1, r_2)$ равен сумме некоторых интервалов вида λ_{ns}:

$$[r_1, r_2) = \lambda_{n, s_1} + \lambda_{n, s_1+1} + \ldots + \lambda_{n, s_2}.$$

Остается повторить рассуждения, использованные при доказательстве первого утверждения теоремы 1.

---

*) Для читателя, понимающего интегрируемость в смысле Римана, утверждение 1° следует из утверждения 2°, ибо функция интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда она ограничена и почти во всех точках непрерывна (ср. сноску на стр. 22).

Итак, теорема 2 полностью доказана.

Пример 1. Разложим в ряд Фурье — Хаара функцию $f(x)=x^2$. Для этого вычислим коэффициенты Фурье — Хаара:

$$c_{mj}=\int_0^1 x^2\chi_{mj}(x)\,dx=2^{\frac{m-1}{2}}\left[\int_{l_{mj}^-} x^2dx-\int_{l_{mj}^+} x^2dx\right]=$$

$$=\frac{2^{\frac{m-1}{2}}}{3}\left[2\left(\frac{j-1/2}{2^{m-1}}\right)^3-\left(\frac{j-1}{2^{m-1}}\right)^3-\left(\frac{j}{2^{m-1}}\right)^3\right]=-2^{\frac{3-5m}{2}}(j-1/2).$$

Первый коэффициент $c_1=\int_0^1 x^2dx={}^1/_3$. Таким образом,

$$x^2=1/3-\sum_{m=1}^{\infty}2^{\frac{3-5m}{2}}\sum_{j=1}^{2^{m-1}}(j-1/2)\,\chi_{mj}(x). \tag{1.18}$$

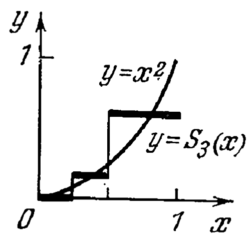

Рис. 1.8.

На рис. 1.8 построена частичная сумма $S_3(x)$ и сама функция x^2.

Вычислим значение правой части равенства (1.18) при $x=1/2$. Легко видеть, что $\chi_{11}(1/2)=-1$, а при $m\geqslant 2$ лишь одна из функций Хаара m-й группы отлична от нуля в точке $x=1/2$ (рис. 1.9, *а*):

$$\chi_{mj}(1/2)=2^{\frac{m-1}{2}}\quad\text{при}\quad j=2^{m-2}+1.$$

Поэтому правая часть (1.18) при $x=1/2$ равна

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\sum_{m=2}^{\infty}2^{\frac{3-5m}{2}}\left(2^{m-2}+\frac{1}{2}\right)2^{\frac{m-1}{2}}=\frac{1}{4}.$$

Если в качестве определения функций Хаара выбрать (1.5), то мы также придем к разложению (1.18). Однако в этом случае значение правой части (1.18) при $x=1/2$ окажется другим. Действительно, из (1.5) видно, что $\chi_{11}(1/2)=0$, а при $m\geqslant 2$ в каждой группе найдутся две функции $\chi_{mj}(x)$, отличные от нуля в точке $x=1/2$

(рис. 1.9, *б*):

$$\chi_{mj}(1/2) = -2^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при} \quad j = 2^{m-2}$$

и

$$\chi_{mj}(1/2) = 2^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{при} \quad j = 2^{m-2} + 1.$$

Поэтому правая часть (1.18) при $x = 1/2$ равна

$$\frac{1}{3} - \sum_{m=2}^{\infty} 2^{\frac{3-5m}{2}} \left[\left(2^{m-2} + \frac{1}{2}\right) - \left(2^{m-2} - \frac{1}{2}\right)\right] 2^{\frac{m-1}{2}} = \frac{1}{6}$$

и не совпадает со значением левой части при $x = 1/2$.

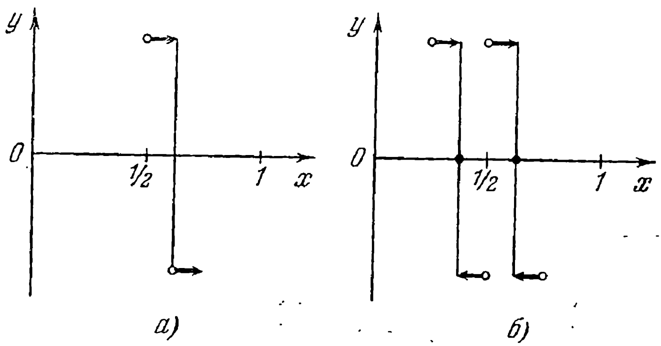

Рис. 1.9.

Этот пример, взятый из статьи [28], показывает, что определение (1.5) не обеспечивает справедливости первого утверждения теоремы 1.

Свойство локализации. В теории тригонометрических рядов известен так называемый «принцип локализации» Римана: если разложить функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье, то сходимость этого ряда в точке x_0 зависит только от поведения $f(x)$ в окрестности точки $x = x_0$. Как показал А. Хаар [33], аналогичным свойством обладают также ряды Фурье — Хаара.

Докажем, что если изменить значения функции $f(x)$ на каком-либо отрезке $[x_1, x_2]$, то это не отразится на сходимости ряда (1.12) в точке x_0, не принадлежащей $[x_1, x_2]$. В самом деле, при всех достаточно больших n отрезки λ_{ns}, содержащие точку x_0, не будут пересекаться с $[x_1, x_2]$. Тогда из (1.13) следует, что значения $S_n(x_0)$ не будут зависеть от измененных значений $f(x)$, и поэтому сходимость $\{S_n(x_0)\}$ и значение предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ (если он существует) останутся прежними.

Ряды Хаара. *Рядом Хаара* называется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x) \tag{1.19}$$

с произвольными действительными коэффициентами a_k.

Теорема 3. *Если ряд* (1.19) *сходится равномерно на отрезке* [0, 1], *то его сумма* $f(x)$ *непрерывна во всех точках этого отрезка, кроме, быть может, двоично рациональных точек, в которых она непрерывна справа и может иметь разрывы первого рода.*

Доказательство*). Для любых двух точек x и x' из [0, 1] и для любого n можем записать, что

$$|f(x)-f(x')| \leqslant |f(x)-S_n(x)|+|f(x')-S_n(x')|+ \\ +|S_n(x)-S_n(x')|,$$

где $S_n(x)$ — n-я частичная сумма ряда (1.19). Выберем n_0 столь большим, чтобы $|f(x)-S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant n_0$. Получим неравенство

$$|f(x)-f(x')| < \varepsilon + |S_n(x)-S_n(x')|, \tag{1.20}$$

в котором значение n (большее, чем n_0) будем считать фиксированным.

Рассмотрим теперь произвольную точку x, и пусть $x \in \lambda_{ns}$. Если x не двоично рациональная точка, то можно указать такое $\delta > 0$, что $(x-\delta, x+\delta) \subset \lambda_{ns}$. И если $x' \in (x-\delta, x+\delta)$, то $S_n(x') = S_n(x)$. Из (1.20) вытекает, что $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$.

---

*) Эта теорема сразу вытекает из следующего общего утверждения: если $\{g_n(x)\}$ сходится к $g(x)$ равномерно на отрезке и во внутренней точке x_0 существуют пределы $g_n(x_0 \pm 0)$, то существуют также $g(x_0 \pm 0) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_0 \pm 0)$.

Если x — двоично рациональная точка, то она может оказаться левым концом λ_{ns}. Тогда выберем $\delta > 0$ так, чтобы $[x, x+\delta) \subset \lambda_{ns}$, и при $x' \in [x, x+\delta)$ из (1.20) снова получим, что $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Осталось доказать, что в последнем случае существует предел $f(x-0)$. Для этого рассмотрим последовательность точек $\{x_k\} \to x - 0$. Очевидно, при всех $k \geqslant k_0$ точки $x_k \in \lambda_{n,s-1}$ и $S_n(x_k) \equiv \text{const}$. В этом случае из (1.20) следует, что $|f(x_{k+m}) - f(x_k)| < \varepsilon$. По критерию Коши существует $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)$. Легко показать, что предел этот не зависит от выбора $\{x_k\}$, стремящейся слева к x, и поэтому представляет собой значение $f(x-0)$. Теорема доказана.

Конечно, не каждый ряд Хаара есть в то же время ряд Фурье — Хаара. Важнейшее (хотя в некотором смысле и тривиальное) условие этого дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Если ряд Хаара* (1.19) *сходится равномерно на отрезке* [0, 1], *то он есть ряд Фурье — Хаара для своей суммы.*

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что сумма этого ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$$

представляет собой интегрируемую функцию. Умножив последнее равенство на $\chi_k(x)$, проинтегрируем его по x от 0 до 1. Принимая во внимание (1.7), (1.8) и (1.11), получим, что $a_k = c_k$.

Следующий пример, использующий конструкцию работы [30], показывает, что в теореме 4 нельзя отказаться от равномерной сходимости, заменив ее сходимостью во всех точках отрезка [0, 1] (если не накладывать дополнительных ограничений на a_k или на $S_n(x)$; ср. стр. 33).

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$g(x) = \sum_{m=2}^{\infty} 2^{\frac{m-3}{2}} \chi_{m,\, 2^{m-2}}(x).$$

Нетрудно вычислить частичные суммы этого ряда:

$$\sum_{m=2}^{p} 2^{m-2}\operatorname{sgn}\chi_{m,\,2^{m-2}}(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant x<2^{-1}-2^{-p},\\ 1-2^{p-1} & \text{при } 2^{-1}-2^{-p}\leqslant x<2^{-1},\\ 0 & \text{при } 2^{-1}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

(Случай $p=3$ изображен на рис 1.10.) Из этих формул видно, что ряд сходится при любом x и сумма его $g(x)=1$ при $0\leqslant x<1/2$ и $g(x)=0$ при $1/2\leqslant x\leqslant 1$.

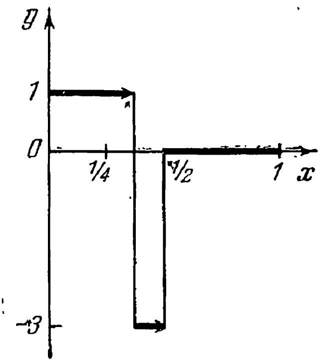

Рис. 1.10.

Однако этот ряд не есть ряд Фурье — Хаара для $g(x)$. Если разложить $g(x)$ в ряд Фурье — Хаара, то получим конечную сумму

$$g(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_{11}(x).$$

О единственности рядов Хаара. Проблема единственности рядов Хаара в теории ортогональных рядов формулируется так: при каких условиях из равенства рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\chi_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k'\chi_k(x)$$

вытекает равенство всех коэффициентов ($b_k=b_k'$)? Или, что то же самое: при каких условиях из равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\chi_k(x)=0 \tag{1.21}$$

следует, что все $a_k=0$? Условия могут налагаться на a_k, на частичные суммы ряда, на множество значений x, в которых выполняется равенство (1.21).

Из теоремы 4 следует, что если ряд (1.21) сходится к нулю равномерно на $[0, 1]$, то все $a_k=0$: они являются коэффициентами Фурье — Хаара для суммы ряда $f(x)\equiv 0$. А из примера 2 видно, что сходимости ряда (1.21) во всех точках отрезка $[0, 1]$ недостаточно для того, чтобы все a_k равнялись нулю:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\chi_{11}(x)-\sum_{m=2}^{\infty}2^{\frac{m-3}{2}}\chi_{m,\,2^{m-2}}(x)\equiv 0. \qquad (1.22)$$

Исследованию более общих условий единственности посвящено несколько работ, например [2, 15, 17]. Необходимо иметь в виду, что большинство авторов используют определение функций Хаара (1.4).

Мы изложим одну из простейших теорем единственности, доказанную самим Хааром в 1914 году, которая не имеет места в случае нашего определения (1.2) функций Хаара.

Теорема 5 ([32], стр. 625-631). *Предположим, что функции $\{\chi_k(x)\}$ определены в точках разрыва согласно* (1.4). *Если ряд* (1.21) *сходится к нулю во всех точках x отрезка* $[0, 1]$, *то все* $a_k = 0$.

Доказательство теоремы поведем от противного: допустим, что (1.21) справедливо во всех точках отрезка $[0, 1]$ и в то же время имеются ненулевые коэффициенты a_k. Обозначим A_1 множество индексов k таких, что $a_k \neq 0$. Пусть $k_1 = \min\limits_{A_1} k$. Если $a_{k_1} > 0$, то через λ_1 обозначим открытый двоичный отрезок $l_{k_1}^-$, а если $a_{k_1} < 0$, то через λ_1 обозначим открытый двоичный отрезок $l_{k_1}^+$. В любом случае при $x \in \lambda_1$

$$a_{k_1}\chi_{k_1}(x) > 0.$$

Множество индексов k таких, что $a_k \neq 0$ и в то же время $l_k \subset \bar{\lambda}_1$, обозначим A_2 (как обычно, $\bar{\lambda}$ означает замкнутый отрезок λ). Очевидно, $A_2 \subset A_1$. Если множество A_2 пусто, то легко видеть, что при всех $n \geqslant k_1$ частичные суммы ряда (1.21) в точках $x \in \lambda_1$ равны

$$S_n(x) = a_{k_1}\chi_{k_1}(x) > 0,$$

и это противоречит условию теоремы, согласно которому $S_n(x) \to 0$ при любом x.

Рассмотрим теперь случай, когда множество A_2 не пусто, и пусть $k_2 = \min\limits_{A_2} k$. Если $a_{k_2} > 0$, то через λ_2 обозначим открытый отрезок $l_{k_2}^-$, а если $a_{k_2} < 0$, то через λ_2 обозначим открытый отрезок $l_{k_2}^+$. В любом случае $\lambda_2 \subset \lambda_1$ и в точках $x \in \lambda_2$.

$$a_{k_2}\chi_{k_2}(x) > 0.$$

Множество индексов k таких, что $a_k \neq 0$ и в то же время $l_k \subset \bar{\lambda}_2$, обозначим A_3. И так далее...

Если на каком-то этапе получится пустое множество A_s, то при всех $n \geqslant k_{s-1}$ для $x \in \lambda_{s-1}$

$$S_n(x) = a_{k_1}\chi_{k_1}(x) + \ldots + a_{k_{s-1}}\chi_{k_{s-1}}(x) > 0,$$

и это противоречит условию теоремы.

Если все множества $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_s \supset \ldots$ не пустые, то мы получим стягивающуюся последовательность двоичных отрезков $\lambda_1 \supset \lambda_2 \supset \ldots \supset \lambda_s \supset \ldots$, длины которых стремятся к нулю (так как каждый отрезок по крайней мере вдвое меньше предыдущего). Рассмотрим замкнутые отрезки $\bar{\lambda}_1 \supset \bar{\lambda}_2 \supset \ldots \supset \bar{\lambda}_s \supset \ldots$ По известной теореме существует единственная точка x_0, принадлежащая всем $\bar{\lambda}_s$. Если точка x_0 не двоично рациональная, то она принадлежит также всем λ_s. Поэтому в этой точке частичные суммы

$$S_n(x_0) = \sum_{1 \leqslant k_s \leqslant n} a_{k_s} \chi_{k_s}(x_0)$$

положительны при $n \geqslant k_1$ и не убывают. Снова получаем противоречие.

Осталось рассмотреть самый сложный случай, когда точка x_0 двоично рациональная. Тогда она должна быть концевой точкой

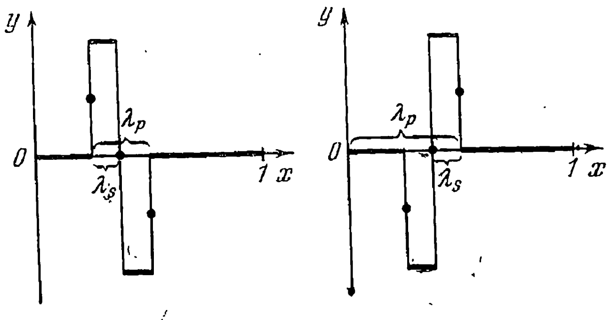

Рис. 1.11.

всех λ_s, начиная с некоторого $s = s_0$; более того, она для всех этих λ_s будет одноименным концом (либо левым, либо правым). Если функции $\chi_k(x)$ определены в соответствии с (1.4), то легко видеть, что на концах λ_s величина $a_{k_s}\chi_{k_s}(x)$ неотрицательна; точнее, на одном из концов $a_{k_s}\chi_{k_s} > 0$, а на другом конце, который является серединой l_{k_s}, значение $a_{k_s}\chi_{k_s} = 0$.

Если два отрезка $\lambda_s \subset \lambda_p$ имеют общий одноименный конец, то на этом конце $a_{k_s}\chi_{k_s} + a_{k_p}\chi_{k_p} > 0$, ибо середина l_{k_s} лежит внутри λ_p (рис. 1.11). Значит, в случае двоично рациональной точки x_0 частичные суммы $S_n(x_0)$ положительны при $n \geqslant k_2$ и не убывают. Опять мы приходим к тому же противоречию. Но теперь уже теорема полностью доказана.

Замечание. Можно попытаться повторить это же доказательство, используя определение (1.2). До случая двоично рациональной точки x_0 все получится. А в этом последнем случае доказательство пройдет для левой концевой точки x_0, но не пройдет для правой.

Замечание. Пример 2 не противоречит теореме 5, так как если в точках разрыва определить $\chi_k(x)$ согласно (1.4), то тождество (1.22) будет верным лишь для $x \neq 1/2$. В точке $x = 1/2$ ряд будет расходиться:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-2^{p-1}\right)\right]=\infty.$$

Более того, этот пример показывает, что в теореме 5 нельзя (без дополнительных ограничений) ослабить требование сходимости во всех точках, заменив ее сходимостью во всех точках, кроме одной.

Сводка некоторых свойств системы Хаара [33, 9].

1°. *Система Хаара полна в L_p при любом $p \in [1, \infty]$* *).

Это значит, что в L_p нет такой функции, которая была бы ортогональна ко всем $\chi_k(x)$ и не равнялась бы почти во всех точках нулю. (У такой функции все коэффициенты $c_k = 0$ и по теореме 2 ряд Фурье — Хаара сходится к нулю почти во всех точках.)

2°. *Система Хаара образует базис в L_p при любом $p \in [1, \infty]$.*

Это значит, что для каждой функции $f(x)$ из L_p ряд Фурье — Хаара сходится к ней по норме:

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k(x)\right\|_{L_p}=0 .$$

3°. *Для каждой функции $f(x)$ из L_2 справедливо равенство Парсеваля*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2=\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

(Ср. ниже стр. 39.)

---

*) Линейное нормированное пространство L_p состоит из функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0,1]$, у которых p-я степень абсолютно интегрируема. Функции, совпадающие почти во всех точках, идентифицируются (то есть считаются одной функцией). В этом пространстве определена норма

$$\|f\|_{L_p}=\left\{\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \qquad (1\leqslant p<\infty).$$

Через L_∞ иногда обозначают пространство C непрерывных функций с той же нормой: $\|f\|_{L_\infty}=\|f\|_C=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$.

4°. *Система Хаара является системой сходимости.* Это значит, что если числа $\{a_k\}$ удовлетворяют условию $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ сходится почти во всех точках отрезка $[0, 1]$.

5°. *Функции Лебега системы Хаара равны тождественно* 1:

$$L_n(x) = \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{n} \chi_k(x) \chi_k(y) \right| dy \equiv 1.$$

Это следует из леммы Хаара о неотрицательности $K_n(x, y)$.

6°. *Для того чтобы ряд* (1.19) *был рядом Фурье — Хаара функции* $f(x)$ *из* L_p $(1 < p < \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы были равномерно ограничены по норме:*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(x) \right\|_{L_p} \leqslant \text{const}.$$

7°. *Система Шаудера* состоит из функции $e_0(x) \equiv 1$ и «треугольных» функций $e_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$ Эти функции выражаются через функции Хаара:

$$e_k(x) = 2^{\frac{m+1}{2}} \int_0^x \chi_k(t)\, dt.$$

8°. *Система Радемахера* $\{r_m(x)\}$ состоит из функций

$$r_m(x) = \operatorname{sgn} \sin 2^m \pi x,$$

$0 \leqslant x \leqslant 1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ При $m \geqslant 1$ во всех точках непрерывности

$$r_m(x) = 2^{-\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \chi_{mj}(x). \qquad \text{(a)}$$

9°. *Система Уолша* $\{w_n(x)\}$ состоит из всевозможных произведений различных функций Радемахера: $w_0(x) \equiv 1$,

$$w_n(x) = r_{\nu_1+1}(x)\, r_{\nu_2+1}(x) \dots r_{\nu_p+1}(x), \qquad (б)$$

где $\nu_p > \nu_{p-1} > \dots > \nu_1 \geqslant 0$ — показатели степеней в двоичном разложении номера $n = 2^{\nu_p} + 2^{\nu_{p-1}} + \dots + 2^{\nu_1}$.

Для функций Уолша с номерами вида $n = 2^{m-1} + s - 1$, где $1 \leqslant s \leqslant 2^{m-1}$, во всех точках непрерывности справедлива формула

$$w_n(x) = 2^{-\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \alpha_{sj}^{(m)} \chi_{mj}(x), \qquad (в)$$

в которой $\|\alpha_{sj}^{(m)}\|$ — некоторая ортогональная матрица с элементами ± 1.

Замечание. Можно в качестве определения $r_m(x)$ и $w_n(x)$ во всех точках отрезка $[0; 1]$ выбрать формулы (а) и (б). Если функции Хаара определены согласно (1.2), то формула (в) будет также справедлива во всех точках.

Если же функции Хаара в точках разрыва определены согласно (1.4), то формула (в) в точках разрыва неверна. Например, по формулам (а) и (б)

$$r_1(1/2) = \chi_{11}(1/2) = 0, \quad w_3(1/2) = r_2(1/2)\, r_1(1/2) = 0,$$

а по формуле (в)

$$w_3(^1/_2) = 2^{-1/2}\,[\chi_{21}(^1/_2) - \chi_{22}(^1/_2)] = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

§ 3. Суммы Хаара

Суммой Хаара степени $n-1$ мы будем называть сумму вида

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_k(x) \qquad (1.23)$$

с произвольными действительными коэффициентами a_k.

Единственность суммы Хаара. Функция $P_n(x)$ принимает постоянные значения на каждом из отрезков постоянства семейства функций $\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)$. Обозначим эти значения $b_1, \ldots, b_n$, так что

$$P_n(x) \equiv b_s \quad \text{при } x \in \lambda_{ns}; \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.24}$$

Справедливо также обратное утверждение [9]:

Теорема 6. *Каковы бы ни были числа $b_1, \ldots, b_n$, существует единственная сумма Хаара $P_n(x)$ степени $n - 1$, удовлетворяющая условиям* (1.24).

Доказательство. Разложим кусочно постоянную функцию $g(x)$, определенную условиями

$$g(x) \equiv b_s \text{ при } x \in \lambda_{ns}; \; s = 1, 2, \ldots, n,$$

в ряд Фурье — Хаара. По теореме 1 этот ряд сходится равномерно. Легко видеть, что все коэффициенты разложения при $k > n$ обратятся в нули, так как $g(x) \equiv \text{const}$ при $x \in l_k$ (когда $k > n$). В самом деле,

$$c_k = \int_0^1 g(x)\chi_k(x)\,dx = \text{const} \cdot \int_{l_k} \chi_k(x)\,dx = 0.$$

И ряд Фурье — Хаара для $g(x)$ обратится в сумму Хаара степени $n - 1$.

Допустим теперь, что существуют две совпадающие суммы Хаара с различными коэффициентами:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k'\chi_k(x).$$

Умножив это тождество на $\chi_s(x)$ и проинтегрировав по x от 0 до 1, получим, что $a_s = a'_s$.

Замечание. Единственность суммы Хаара вытекает также из теорем 4 и 1.

Приведем еще одно доказательство теоремы 6, не опирающееся на теорему 1. Обозначим $\chi_k(\lambda_{ns})$ значение функции $\chi_k(x)$ на отрезке λ_{ns} (предполагая, что оно постоянно). Нам надо доказать, что система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(\lambda_{ns}) = b_s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n,$$

имеет единственное решение $a_1, \ldots, a_n$ при любых правых частях $b_1, \ldots, b_n$. Или, что то же, надо доказать, что определитель

$$\Delta_n \equiv \det \| \chi_k(\lambda_{ns}) \|_{1 \leqslant s,\, k \leqslant n} \neq 0. \tag{1.25}$$

Воспользуемся методом индукции. При $n = 2$, когда $\lambda_{21} = [0, 1/2)$, а $\lambda_{22} = [1/2, 1]$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \chi_1(\lambda_{21}) & \chi_2(\lambda_{21}) \\ \chi_1(\lambda_{22}) & \chi_2(\lambda_{22}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Допустим, что $\Delta_n \neq 0$. При переходе от n функций к $n+1$ функции один из отрезков постоянства придется разделить пополам. Пусть этим отрезком, совпадающим с l_{n+1}, будет отрезок λ_{np}. Тогда

$$\lambda_{n+1,s} = \lambda_{n,s} \text{ при } 1 \leqslant s \leqslant p-1;$$
$$\lambda_{n+1,p} = \lambda_{n,p}^-;$$
$$\lambda_{n+1,p+1} = \lambda_{n,p}^+;$$
$$\lambda_{n+1,s} = \lambda_{n,s-1} \text{ при } p+2 \leqslant s \leqslant n+1.$$

(На рис. 1.12 изображены $\lambda_{n,s}$ и $\lambda_{n+1,s}$ при $n = 6$, когда $p = 5$.)

С учетом этих равенств можем записать:

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} \chi_1(\lambda_{n1}) & \chi_2(\lambda_{n1}) & \ldots & \chi_n(\lambda_{n1}) & \chi_{n+1}(\lambda_{n1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_1(\lambda_{n,p-1}) & \chi_2(\lambda_{n,p-1}) & \ldots & \chi_n(\lambda_{n,p-1}) & \chi_{n+1}(\lambda_{n,p-1}) \\ \chi_1(\lambda_{np}^-) & \chi_2(\lambda_{np}^-) & \ldots & \chi_n(\lambda_{np}^-) & \chi_{n+1}(\lambda_{np}^-) \\ \chi_1(\lambda_{np}^+) & \chi_2(\lambda_{np}^+) & \ldots & \chi_n(\lambda_{np}^+) & \chi_{n+1}(\lambda_{np}^+) \\ \chi_1(\lambda_{n,p+1}) & \chi_2(\lambda_{n,p+1}) & \ldots & \chi_n(\lambda_{n,p+1}) & \chi_{n+1}(\lambda_{n,p+1}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_1(\lambda_{nn}) & \chi_2(\lambda_{nn}) & \ldots & \chi_n(\lambda_{nn}) & \chi_{n+1}(\lambda_{nn}) \end{vmatrix}.$$

Так как $\lambda_{np} = l_{n+1}$ — отрезок постоянства первых n функций Хаара, то $\chi_s(\lambda_{np}^-) = \chi_s(\lambda_{np}^+) = \chi_s(\lambda_{np})$ при всех $1 \leqslant s \leqslant n$, а $\chi_{n+1}(\lambda_{np}^-) = -\chi_{n+1}(\lambda_{np}^+)$. Поэтому, вычитая из элементов $(p+1)$-й строки элементы p-ой строки, получим в $(p+1)$-й строке числа

$$0\ 0\ .\ .\ .\ 0\ 2\chi_{n+1}(\lambda_{np}^{+}).$$

Разложив определитель по элементам новой $(p+1)$-й строки, найдем, что

$$|\Delta_{n+1}|=|\Delta_n|\,|2\chi_{n+1}(l_{n+1})|\neq 0.$$

Таким образом, утверждение (1.25) доказано. Более того, из наших рассуждений следует, что

$$|\Delta_n| = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}|\chi_k(l_k)|.$$

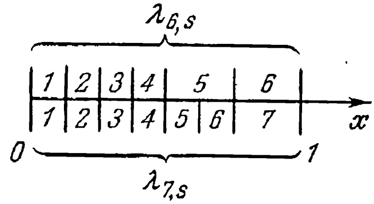

Рис. 1.12.

Рассмотрим теперь более общую задачу: как представить в виде суммы Хаара кусочно постоянную функцию с произвольными двоично рациональными точками разрыва.

Пусть заданы точки $0<r_1<r_2<\ldots<r_p<1$ и значения $b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}$. Рассмотрим функцию $g(x)$, определенную условиями

$$g(x)\equiv b_s \text{ при } r_{s-1}\leqslant x<r_s,$$

$s=1, 2, \ldots, p+1$; $r_0=0$, $r_{p+1}=1$. Можно выбрать столь большое значение m, чтобы все точки $r_1, \ldots, r_p$ содержались среди точек вида $j/2^{m-1}$, $1\leqslant j\leqslant 2^{m-1}$. Тогда $g(x)$ можно будет представить в виде суммы Хаара $g(x)=P_n(x)$, причем $n\leqslant 2^{m-1}$.

Чтобы точно определить степень $P_n(x)$, нужно найти наименьшее семейство отрезков постоянства $\lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nn}$, обладающее тем свойством, что все точки $r_1, \ldots, r_p$ содержатся в множестве концевых точек этих отрезков. Однако из теоремы 6 следует, что более грубый способ построения $P_n(x)$, изложенный в предыдущем абзаце, даст нам ту же сумму Хаара.

Два свойства сумм Фурье — Хаара. *Суммами Фурье — Хаара*, соответствующими функции $f(x)$, называются частичные суммы ряда Фурье — Хаара (1.12) или, что то же, суммы Хаара (1.23) с коэффициентами a_k, равными коэффициентам Фурье — Хаара c_k:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_k(x). \tag{1.26}$$

Предположим, что функция $f(x)$ интегрируема на $[0, 1]$.

Свойство А. *Значение $S_n(x)$ на каждом из отрезков λ_{ns}, $1 \leqslant s \leqslant n$, равно среднему значению $f(x)$ на этом отрезке.*

Это свойство есть следствие формулы (1.13).

Свойство В. *Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то при всех n*

$$m \leqslant S_n(x) \leqslant M.$$

Доказательство. В начале § 2 была получена формула

$$S_n(x) = \int_0^1 K_n(x, y) f(y)\, dy,$$

где согласно лемме Хаара $K_n(x, y) \geqslant 0$. Поэтому

$$S_n(x) \leqslant M \int_0^1 K_n(x, y)\, dy = M.$$

Оценка снизу доказывается точно так же.

Оба эти свойства были доказаны в [33].

Экстремальное свойство сумм Фурье — Хаара. В предыдущем пункте указаны свойства, присущие только системе функций Хаара (вернее, не каждой ортонормированной системе). Результаты настоящего пункта справедливы для любых ортонормированных систем [9, 1].

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ имеет интегрируемый квадрат* *), *то среди всех сумм Хаара* (1.23) (*заданной степени*) *наилучшим средним квадратическим приближением для $f(x)$ будет сумма Фурье — Хаара* (1.26):

$$\min_{a_1, \ldots, a_n} \int_0^1 [f(x) - P_n(x)]^2\, dx = \int_0^1 [f(x) - S_n(x)]^2\, dx.$$

*) Иначе говоря, $f(x) \in L_2$.

Доказательство. Используя формулы (1.23) и (1.11), а также условия ортонормированности (1.7), (1.8), получим

$$\int_0^1 [f(x)-P_n(x)]^2\,dx =$$

$$=\int_0^1 f^2(x)\,dx-2\int_0^1 f(x)P_n(x)\,dx+\int_0^1 P_n^2(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1 f^2(x)\,dx-2\sum_{k=1}^{n} a_k c_k+\sum_{k=1}^{n} a_k^2=$$

$$=\int_0^1 f^2(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n} c_k^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2.$$

Очевидно, правая часть будет наименьшей в случае, когда все $a_k = c_k$, то есть когда $P_n(x) = S_n(x)$.

Замечание. Полагая в последнем равенстве $a_k = c_k$, легко доказать, что $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx$. Отсюда вытекает, что для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,dx$ и $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Более точное утверждение приведено на стр. 32 (свойство 3°).

Вычисление сумм Хаара. Предположим, что коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ суммы (1.23) заданы. Для простоты положим $n = 2^{m_0}$, так что

$$P_n(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k(x)=a_1+\sum_{m=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{2^{m-1}} a_{mj}\chi_{mj}(x).$$

Мы оценим количество операций, которые нужно затратить для вычисления $P_n(x)$ на ЭВМ, и докажем, что хотя число слагаемых в этой сумме равно n, но для вычисления ее при каждом x достаточно $O(\log_2 n)$ элементарных операций *).

Во-первых, вместо коэффициентов a_{mj} удобнее хранить числа $b_{mj} = 2^{\frac{m-1}{2}} a_{mj}$. Тогда

$$P_n(x) = a_1 + \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} b_{mj} \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x).$$

Во-вторых, легко заметить, что для каждого фиксированного x в этой сумме найдется не более чем m_0 отличных от нуля слагаемых. В самом деле, среди отрезков l_{mj} с $1 \leqslant j \leqslant 2^{m-1}$ лишь один содержит точку x; пусть это будет отрезок $l_{m,\, j_m(x)}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{2^{m-1}} b_{mj} \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x) = b_{m, j_m(x)} \operatorname{sgn} \chi_{m, j_m(x)}$$

и, следовательно,

$$P_n(x) = a_1 + \sum_{m=1}^{m_0} b_{m, j_m(x)} \operatorname{sgn} \chi_{m, j_m(x)}. \tag{1.27}$$

Теорема 8. *Если в двоичной системе счисления* $x = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_s \ldots$, *то*

$$P_n(x) = a_1 + \sum_{m=1}^{m_0} (-1)^{\varepsilon_m} b_{m, j_m}, \tag{1.28}$$

где опять-таки в двоичной системе

$$j_m - 1 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{m-1} \tag{1.29}$$

(*при* $m = 1$ *правую часть* (1.29) *надо полагать равной нулю*).

Здесь все ε_s — двоичные цифры, то есть либо нули, либо единицы. В десятичной системе значение x и формула

*) Пусть $f = f(n)$, $g = g(n)$ и $n \to \infty$. Как обычно, запись $f = O(g)$ означает, что $|f/g| \leqslant \text{const}$; $f = o(g)$ означает, что $(f/g) \to 0$; $f \sim g$ означает, что $(f/g) \to 1$.

(1.29) выглядят так:

$$x = \varepsilon_1 2^{-1} + \varepsilon_2 2^{-2} + \ldots + \varepsilon_s 2^{-s} + \ldots,$$
$$j_m - 1 = \varepsilon_1 2^{m-2} + \varepsilon_2 2^{m-3} + \ldots + \varepsilon_{m-2}\, 2 + \varepsilon_{m-1}.$$

Доказательство теоремы 8. Число x принадлежит отрезку l_{m,j_m} тогда и только тогда, когда

$$j_m - 1 \leqslant x2^{m-1} < j_m.$$

Отсюда следует, что $j_m - 1 = Ц\,(x \cdot 2^{m-1})$, где $Ц\,(z)$ — целая часть z (см. стр. 102). В двоичной системе это равносильно (1.29).

Если $\varepsilon_m = 0$, то точка x принадлежит $l^-_{m,\,j_m}$ и $\operatorname{sgn} \chi_{m,\,j_m}(x) = 1 = (-1)^{\varepsilon_m}$. Если же $\varepsilon_m = 1$, то точка x принадлежит l^+_{m,j_m} и $\operatorname{sgn} \chi_{m,j_m}(x) = -1 = (-1)^{\varepsilon_m}$. В обоих случаях (1.28) вытекает из (1.27) и теорема доказана.

Из теоремы 8 следует весьма простой способ вычисления $P_n(x)$ на ЭВМ, использующих двоичную систему. Так как аргумент x задается своим двоичным представлением $x = 0, \varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$, то при каждом m легко выделить цифры $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_{m-1}$. Для этого нужны только простейшие логические операции. По значениям m и j_m можно сформировать адрес ячейки, содержащей $b_{m,\,j_m}$. Если следующая цифра в двоичной записи числа x (то есть ε_m) равна нулю, то $b_{m,\,j_m}$ прибавляется к накапливаемой сумме, а если следующая цифра равна 1, то $b_{m,\,j_m}$ вычитается:

$$z_m = z_{m-1} + (-1)^{\varepsilon_m} b_{m,j_m}, \quad m = 1, 2, \ldots, m_0.$$

Начав с $z_0 = a_1$, получим $z_{m_0} = P_n(x)$.

В каждом цикле такого алгоритма производится одно сложение и несколько логических операций. Поэтому общее число элементарных операций, затрачиваемых на вычисление $P_n(x)$, равно $O(m_0)$ или $O(\log_2 n)$.

О применении сумм Хаара для аппроксимации функций. Доказанные свойства наводят на мысль о целесообразности использования сумм Фурье — Хаара для приближения функций. Равномерная аппроксимация гарантирована для очень широкого класса функций. Одновременно получается и квадратическая аппроксимация. Точно передаются средние значения на некоторых более мелких отрезках (λ_{ns}). И, как показывает свойство В, мы застрахованы от неприятных пиков на аппроксимирующей функции, тех самых пиков, которые доставляют немало неприятностей вычислителям при использовании аппроксимирующих многочленов высоких степеней. Единственное неудобство такой аппроксимации — это разрывность сумм Хаара.

Если функция $f(x)$ обладает большой гладкостью (несколько раз дифференцируема и т. п.), то вряд ли кусочно постоянная аппроксимация этой функции будет достаточной для практических целей. Однако если про $f(x)$ известно мало (например, только то, что она кусочно непрерывна), то приближение суммами $S_n(x)$ может оказаться очень целесообразным.

Такой пример рассмотрен в следующем параграфе: если про $f(x)$ известно только то, что она удовлетворяет условию Липшица, то кусочно постоянная аппроксимация такой функции весьма практична.

§ 4. Аппроксимация функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Хаара

Мы рассмотрим только наиболее простой случай, когда $n = 2^m$. В этом случае все отрезки постоянства $\lambda_{n1}, \ldots, \lambda_{nn}$ имеют одинаковую длину, которую мы обозначим $h = 1/n$.

Из свойства А сумм Фурье — Хаара следует, что при $x \in \lambda_{ns}$ значение $S_n(x) \equiv \bar{f}_s$, где

$$\bar{f}_s = \frac{1}{h} \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(x)\,dx. \tag{1.30}$$

Таким образом, мы фактически имеем дело с равномерной сеткой $x_s = sh$ и аппроксимацией функции $f(x)$ средними значениями. Такая аппроксимация часто используется в вычислительной математике при построении алгоритмов численного интегрирования дифференциальных уравнений методом разностных схем [22] или методом интегральных соотношений [3]. Для реализации такого приближения нет необходимости считать коэффициенты Фурье — Хаара: достаточно составить таблицу средних значений (1.30). А для того, чтобы вычислить $S_n(x)$ при заданном конкретном x, достаточно определить, какому из λ_{ns} принадлежит этот x.

В этом параграфе мы сравним с точки зрения вычислительной практики возможности употребления таблицы средних $[\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n]$ вместо чаще употребляемой таблицы значений $[f_0, f_1, \ldots, f_n]$, где $f_s = f(sh)$. Объемы этих таблиц будем считать равными (одно лишнее значение — не в счет).

Нижеследующие теоремы 9—12 весьма просты по идее, и можно предположить, что они где-нибудь уже были доказаны ранее. Например, теорема 9 при $\alpha = 1$ легко может быть выведена из результата [41]. Однако никаких конкретных ссылок автор, к сожалению, привести не может.

Некоторые оценки разности $|f(x) - S_n(x)|$ в случае произвольного n имеются в [1]. Более общие задачи об аппроксимации функций, удовлетворяющих условию Липшица, рассмотрены в [21].

Классы функций H_α. Фиксируем значение параметра $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение. Мы будем говорить, что функция $f(x)$, определенная на отрезке $[0, 1]$, принадлежит классу $H_\alpha(L)$, если для любых двух точек x и y этого отрезка справедливо неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\,|x - y|^\alpha, \tag{1.31}$$

где $L > 0$ — постоянная.

Класс функций $H_\alpha(L)$ часто называют классом функций, удовлетворяющих *условию Липшица порядка α с определяющей постоянной L*. Объединение всех классов $H_\alpha(L)$ со всевозможными L будем называть H_α. В теории функций класс H_α чаще обозначают Lip_α.

Примером функции из $H_\alpha(L)$ может служить функция $f(x) = Lx^\alpha$.

Легко видеть, что если $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0, 1]$, и $|f'(x)| \leqslant L$, то $f(x)$ принадлежит $H_1(L)$. Это сразу вытекает из теоремы о среднем: $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$.

Очевидно, также, что если $\alpha < \alpha' < 1$, то

$$H_1(L) \subset H_{\alpha'}(L) \subset H_\alpha(L),$$

ибо $|x-y| \leqslant |x-y|^{\alpha'} \leqslant |x-y|^{\alpha}$.

Аппроксимация функции.

Теорема 9. *Если* $f(x) \in H_\alpha(L)$ *и* $n = 2^m$, *то*

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\alpha+1} Lh^\alpha. \tag{1.32}$$

Оценка (1.32) *точная* *).

Доказательство. Из (1.13) вытекает, что если $x \in \lambda_{ns} = [(s-1)h, sh)$, то

$$f(x) - S_n(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{(s-1)h}^{sh} [f(x) - f(y)]\, dy.$$

Используя (1.31), получим, что

$$|f(x) - S_n(x)| \leqslant (L/h) \int\limits_{(s-1)h}^{sh} |x-y|^\alpha dy.$$

Последний интеграл оценивается с помощью вспомогательного неравенства (9.1) (см. стр. 279), после чего получается оценка (1.32).

Чтобы доказать точность этой оценки, рассмотрим функцию $f = Lx^\alpha$. Для этой функции значение $S_n(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant h$ равно

$$S_n(x) = h^{-1} \int\limits_0^h Lx^\alpha dx = (\alpha+1)^{-1} Lh^\alpha.$$

Поэтому $S_n(0) - f(0) = (\alpha+1)^{-1} Lh^\alpha$. Теорема доказана.

Обозначим через $g_n(x)$ кусочно линейную функцию, получающуюся линейной интерполяцией по значениям

*) Утверждение «оценка (1.32) точная» означает, что постоянную, стоящую в (1.32) справа, нельзя заменить никакой меньшей постоянной.

$f_0, f_1, \ldots, f_n$: при $(s-1)h \leqslant x < sh$

$$g_n(x) = \left(s - \frac{x}{h}\right) f_{s-1} + \left(\frac{x}{h} - s + 1\right) f_s. \qquad (1.33)$$

Теорема 10. *Если* $f(x) \in H_\alpha(L)$, *то*

$$|f(x) - g_n(x)| \leqslant 2^{-\alpha} Lh^\alpha. \qquad (1.34)$$

Оценка (1.34) *точная.*

Доказательство Если $(s-1)h \leqslant x < sh$, то $f(x) - g_n(x) =$

$$= \left(s - \frac{x}{h}\right)[f(x) - f_{s-1}] + \left(\frac{x}{h} - s + 1\right)[f(x) - f_s].$$

Используя определение (1.31), получим неравенство

$$|f(x) - g_n(x)| \leqslant Lh^\alpha \psi(x), \qquad (1.35)$$

где

$$\psi(x) = \left(s - \frac{x}{h}\right)\left(\frac{x}{h} - s + 1\right)^\alpha + \left(\frac{x}{h} - s + 1\right)\left(s - \frac{x}{h}\right)^\alpha.$$

Сделаем замену переменной $u = (x/h) - s + 1$. Тогда $0 \leqslant u < 1$ и

$$\psi(x) = \Psi(u) = (1-u)u^\alpha + u(1-u)^\alpha.$$

Легко видеть, что $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$, $\Psi(u) > 0$ при $0 < u < 1$. Производная

$$\Psi'(u) = u^{\alpha-1}[\alpha - (\alpha+1)u] + (1-u)^{\alpha-1}[1 - (\alpha+1)u]$$

обращается в нуль при $u = 1/2$. Вторая производная может быть записана в виде

$$\Psi''(u) = -\alpha u^{\alpha-2}[2 - (\alpha+1)(1-u)] - \alpha(1-u)^{\alpha-2}[2 - (\alpha+1)u],$$

откуда ясно, что при $0 < u < 1$ всюду $\Psi''(u) < 0$. Следовательно, $u = 1/2$ — единственная точка максимума $\Psi(u)$:

$$\max \psi(x) = \max \Psi(u) = \Psi(1/2) = 2^{-\alpha}.$$

Подставив это значение в (1.35), получим требуемое неравенство (1.34).

Чтобы доказать точность этой оценки, рассмотрим функцию $f(x) = L\,|x - h/2|^{\alpha}$. Так как (рис. 1.13) $f(0) = f(h) = L\,(h/2)^{\alpha}$, то $g_n(x) \equiv f(0)$ при $0 \leqslant x < h$. Значит, $g_n(h/2) - f(h/2) = 2^{-\alpha} L h^{\alpha}$, что и требовалось доказать.

Сравним теперь оценки (1.32) и (1.34). При $\alpha = 1$ они совпадают, а при всех $0 < \alpha < 1$ оценка (1.32) лучше: $2^{\alpha} < 1 + \alpha$. Таким образом, точность приближения $f(x) \approx S_n(x)$ на классах $H_{\alpha}(L)$ при $\alpha < 1$ лучше, чем точность обычно используемого приближения $f(x) \approx g_n(x)$. Если к тому же учесть, что для вычисления $S_n(x)$ достаточно определить, какому из отрезков $[(s-1)h,\ sh)$ принадлежит значение x, а затем выбрать из таблицы соответствующее значение $\bar{f}_s$, а для вычисления $g_n(x)$, надо найти отрезок $[(s-1)h,\ sh)$ и, кроме того, осуществить линейную интерполяцию по формуле (1.33), то станет ясно, что с точки зрения количества вычислений использование таблицы $[\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_n]$ заметно выгоднее.

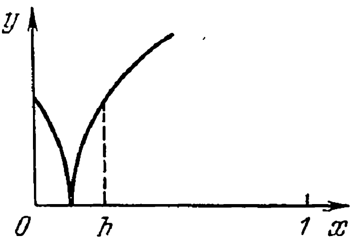

Рис. 1.13.

Впрочем, на классе функций $H_{\alpha}(L)$ линейная интерполяция не улучшает приближения по сравнению с кусочно постоянной аппроксимацией. Если задать таблицу значений $f_{s-1/2} = f\left[\left(s - \frac{1}{2}\right)h\right]$, $1 \leqslant s \leqslant n$, и положить $\tilde{g}_n(x) \equiv f_{s-1/2}$ при $(s-1)h \leqslant x < sh$, то для разности $|f(x) - \tilde{g}_n(x)|$ будет справедлива та же оценка (1.34).

Интегрирование аппроксимации. Особенно заметны преимущества аппроксимации средними в тех задачах, в которых наряду с $f(x)$ нужно вычислять неопределенный интеграл от $f(x)$.

Теорема 11. *Если $f(x) \in H_{\alpha}(L)$ и $n = 2^m$, то*

$$\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x S_n(t)\,dt\right| \leqslant (\alpha+1)^{-1} L\,(h/2)^{\alpha+1}. \qquad (1.36)$$

Для класса $H_1(L)$ оценка эта точная.

Доказательство. Обозначим через $r(x)$ разность, абсолютную величину которой надо оценить:

$$r(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x S_n(t)\,dt.$$

Так как во всех точках $x = sh$ разность $r(sh) = 0$, то для $x \in \lambda_{ns}$ можем записать $r(x)$ в виде

$$r(x)=\int_{(s-1)h}^{x} f(t)\,dt-[x-(s-1)h]\bar{f}_s. \tag{1.37}$$

Точки максимумов и минимумов $r(x)$ удовлетворяют уравнению

$$r'(x)=f(x)-\bar{f}_s=0.$$

В каждой такой точке, в том числе в точке максимума модуля $r(x)$, которую мы обозначим $x = \theta$,

$$f(\theta)=\bar{f}_s. \tag{1.38}$$

Полагая в (1.37) $x = \theta$ и используя (1.38), запишем

$$r(\theta)=\int_{(s-1)h}^{\theta}[f(t)-f(\theta)]\,dt. \tag{1.39}$$

Предположим пока, что $\theta < (s - 1/2)h$. Тогда

$$|r(\theta)|\leqslant\int_{(s-1)h}^{\theta}L(\theta-t)^{\alpha}\,dt=\frac{L}{\alpha+1}[\theta-(s-1)h]^{\alpha+1}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{L}{\alpha+1}\left(\frac{h}{2}\right)^{\alpha+1}.$$

Если $\theta \geqslant (s - 1/2)h$, то вместо (1.39) можно использовать эквивалентную формулу

$$r(\theta)=-\int_{\theta}^{sh}[f(t)-f(\theta)]\,dt,$$

из которой вытекает та же оценка (1.36).

Чтобы доказать точность этой оценки на классе $H_1(L)$, рассмотрим функцию $f = L(x - h/2)$. Очевидно, при $x \in \lambda_{n1}$ значение $S_n(x) = 0$ и

$$\left| \int_0^{h/2} f(x)\,dx - \int_0^{h/2} S_n(x)\,dx \right| = L \int_0^{h/2} \left(\frac{h}{2} - x\right) dx = \frac{L}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Итак, теорема 11 доказана.

Если используется кусочно линейная аппроксимация (1.33), то величина

$$\left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g_n(t)\,dt \right|$$

может оказаться значительно большей, чем правая часть (1.36). В самом деле, пусть (рис. 1.14) при $(s - 1/2)h \leqslant x < (s + 1/2)h$

$$f_*(x) = L\,|\,x - sh\,|^\alpha.$$

Очевидно, соответствующая функция $g_{*n}(x) \equiv 0$. Поэтому

$$\int_0^1 f_*(x)\,dx - \int_0^1 g_{*n}(x)\,dx = 2nL \int_0^{h/2} x^\alpha dx = (\alpha + 1)^{-1} L (h/2)^\alpha.$$

Следовательно,

$$\sup_{f(x) \in H_\alpha(L)} \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| \int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x g_n(t)\,dt \right| \geqslant (\alpha + 1)^{-1} L (h/2)^\alpha,$$

что на порядок хуже, чем (1.36).

Конечно, такого результата для интегралов можно было ожидать: приближение $g_n(x) \approx f(x)$, в отличие от приближения $S_n(x) \approx f(x)$, не является, как говорят вычислители, консервативным (то есть не сохраняет значений интегралов).

Дифференцирование аппроксимации. Недостатком кусочно постоянной аппроксимации часто считают то, что она не позволяет оценить производные от аппроксимируемой функции (там, где они существуют). Следующая теорема показывает, что когда функция $f(x)$ достаточно гладкая, то по $S_n(x)$ можно обычным способом приближенно вычислить производную $f'(x)$, если только принять одну меру предосторожности: шаг численного дифференцирования Δx должен быть кратным $h = 1/n$.

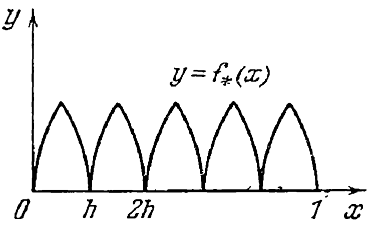

Рис. 1.14.

Теорема 12. *Предположим, что функция $f(x)$ имеет на отрезке $[0, 1]$ производную $f'(x) \in H_\alpha(M)$, и пусть, $n = 2^m$. Выберем шаг $\Delta x = ph$ с целым $p \geqslant 1$. Тогда для любого $x \in (\Delta x, 1 - \Delta x)$*

$$\left| f'(x) - \frac{S_n(x+\Delta x) - S_n(x-\Delta x)}{2\Delta x} \right| \leqslant \frac{M}{\alpha+1} (\Delta x)^\alpha \varkappa_{\alpha p}, \quad (1.40)$$

где постоянная $\varkappa_{\alpha p}$ определена ниже формулой (1.45). *Оценка* (1.40) *точная.*

Доказательство оценки (1.40). Фиксируем произвольную точку $x_0 \in (\Delta x, 1 - \Delta x)$ и обозначим $\lambda_{ns'}$ и $\lambda_{ns''}$ отрезки постоянства, содержащие точки $x_0 - \Delta x$ и $x_0 + \Delta x$:

$$x_0 - \Delta x \in \lambda_{ns'} = \left[\frac{s'-1}{n}, \frac{s'}{n}\right),$$

$$x_0 + \Delta x \in \lambda_{ns''} = \left[\frac{s''-1}{n}, \frac{s''}{n}\right).$$

Согласно (1.13)

$$S_n(x_0+\Delta x) - S_n(x_0-\Delta x) = \frac{1}{h}\left[\int\limits_{\lambda_{ns''}} f(x)\,dx - \int\limits_{\lambda_{ns'}} f(x)\,dx\right]. \quad (1.41)$$

Преобразуем входящие сюда интегралы с помощью тождества

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{s-1/2}{n} - x_0\right) + \left[\int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\,dt - f'(x_0)\left(\frac{s-1/2}{n} - x_0\right)\right],$$

интегрируя которое нетрудно получить равенство

$$\int_{\lambda_{ns}} f(x)\,dx = h\left[f(x_0) + f'(x_0)\left(\frac{s-{}^1/_2}{n} - x_0\right)\right] + \\ + \int_{\lambda_{ns}} dx \int_{x_0}^{x} dt\,[f'(t) - f'(x_0)].$$

Подставив это выражение (для $s = s'$ и $s = s''$) в (1.41), найдем, что

$$S_n(x_0+\Delta x) - S_n(x_0 - \Delta x) = f'(x_0)\frac{s''-s'}{n} + \\ + \frac{1}{h}\left\{\int_{\lambda_{ns''}} - \int_{\lambda_{ns'}}\right\} dx \int_{x_0}^{x} [f'(t) - f'(x_0)]\,dt. \qquad (1.42)$$

По условию теоремы

$$\left|\int_{\lambda_{rs}} dx \int_{x_0}^{x} [f'(t) - f'(x_0)]\,dt\right| \leqslant M \int_{\lambda_{ns}} dx \int_{x_1}^{x} |t - x_0|^{\alpha}\,dt = \\ = \frac{M}{\alpha+1} \int_{(s-1)h}^{sh} |x - x_0|^{\alpha+1}\,dx. \qquad (1.43)$$

Рассмотрим последний интеграл при $s = s''$. Легко видеть (рис. 1.15), что $x_0 < (s''-1)h$ и поэтому

$$\int_{(s''-1)h}^{s''h} |x - x_0|^{\alpha+1}\,dx = \frac{1}{\alpha+2}\left[\left(\frac{s''}{n} - x_0\right)^{\alpha+2} - \left(\frac{s''-1}{n} - x_0\right)^{\alpha+2}\right].$$

Точно так же легко видеть, что в случае $s = s'$ значение $x_0 > s'h$ и

$$\int_{(s'-1)h}^{s'h} |x - x_0|^{\alpha+1}\,dx = \frac{1}{\alpha+2}\left[\left(x_0 - \frac{s'-1}{n}\right)^{\alpha+2} - \left(x_0 - \frac{s'}{n}\right)^{\alpha+2}\right].$$

Подставим оба эти выражения поочередно в (1.43) и полученные неравенства используем для оценки второго члена справа в (1.42). Получим неравенство

$$\left|\frac{S_n(x_0+\Delta x)-S_n(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}-f'(x_0)\frac{s''-s'}{2n\Delta x}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M}{2h\Delta x(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[\left(\frac{s''}{n}-x_0\right)^{\alpha+2}-\left(\frac{s''-1}{n}-x_0\right)^{\alpha+2}+\right.$$
$$\left.+\left(x_0-\frac{s'-1}{n}\right)^{\alpha+2}-\left(x_0-\frac{s'}{n}\right)^{\alpha+2}\right].$$

Нетрудно заметить, что $s''-s'=2n\Delta x=2p$ (здесь

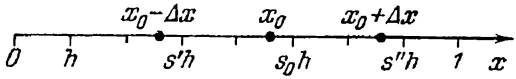

Рис. 1.15.

как раз существенно, что p — целое). Поэтому можем переписать последнее неравенство:

$$\left|\frac{S_n(x_0+\Delta x)-S_n(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}-f'(x_0)\right|\leqslant\frac{Mh^\alpha R}{2p(\alpha+1)(\alpha+2)},\tag{1.44}$$

где

$$R=\left(s''-\frac{x_0}{h}\right)^{\alpha+2}-\left(s''-1-\frac{x_0}{h}\right)^{\alpha+2}+$$
$$+\left(\frac{x_0}{h}-s'+1\right)^{\alpha+2}-\left(\frac{x_0}{h}-s'\right)^{\alpha+2}.$$

Вычислим теперь максимум R. Пусть $x_0=h(s_0-1+\xi)$, где s_0 — целое число, $0\leqslant\xi<1$. Тогда $s'=s_0-p$, $s''=s_0+p$, и R можно переписать в виде

$$R=R(\xi)=(p+1-\xi)^{\alpha+2}-(p-\xi)^{\alpha+2}+$$
$$+(p+\xi)^{\alpha+2}-(p-1+\xi)^{\alpha+2}.$$

Очевидно, $R(\xi)>0$ и внутри интервала $0<\xi<1$ эта функция максимума иметь не может, ибо

$$R''(\xi)=(\alpha+2)(\alpha+1)[(p+1-\xi)^\alpha-(p-\xi)^\alpha+$$
$$+(p+\xi)^\alpha-(p-1+\xi)^\alpha]>0.$$

На концах интервала

$$R(0)=R(1)=(p+1)^{\alpha+2}-(p-1)^{\alpha+2}.$$

Следовательно, $\max R=(p+1)^{\alpha+2}-(p-1)^{\alpha+2}$.

Подставив в (1.44) $\max R$ вместо R, получим неравенство (1.40) с постоянной

$$\varkappa_{\alpha p} = \frac{(p+1)^{\alpha+2} - (p-1)^{\alpha+2}}{2(\alpha+2)\,p^{\alpha+1}}. \tag{1.45}$$

Доказательство точности оценки (1.40). Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{M}{\alpha+1}\left|x - \frac{1}{2}\right|^{\alpha+1} \operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right),$$

для которой $f'(x) = M\,|x - 1/2|^{\alpha} \in H_{\alpha}(M)$ (см. рис. 1.16, где $M = 3$, $\alpha = 1/2$). Фиксируем шаг $h = 2^{-m}$. Нас будут интересовать значения $x_0 \in [1/2,\ 1/2 + h)$, так что $s_0 - 1 = 1/2h$, или $1/2 = h(s_0 - 1)$.

Если $1/2 \leqslant (s-1)h \leqslant x < sh$, то

$$S_n(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{(s-1)h}^{sh} \frac{M}{\alpha+1}\left(x - \frac{1}{2}\right)^{\alpha+1} dx =$$

$$= \frac{Mh^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[(s - s_0 + 1)^{\alpha+2} - (s - s_0)^{\alpha+2}\right]$$

Так как $s'' = s_0 + p$, то

$$S_n(x_0 + ph) = \frac{Mh^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[(p+1)^{\alpha+2} - p^{\alpha+2}\right].$$

Можно проверить (впрочем, это легко усмотреть из симметрии рис. 1.16), что

$$S_n(x_0 - ph) = -\frac{Mh^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\left[p^{\alpha+2} - (p-1)^{\alpha+2}\right].$$

Поэтому

$$\frac{S_n(x_0 + ph) - S_n(x_0 - ph)}{2ph} - f'(x_0) =$$

$$= \frac{Mh^{\alpha}\left[(p+1)^{\alpha+2} - (p-1)^{\alpha+2}\right]}{(\alpha+1)(\alpha+2)\,2p} - M\left|x_0 - \frac{1}{2}\right|^{\alpha}.$$

Когда $x_0 \to 1/2$, последнее соотношение обращается в (1.40) со знаком равенства.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Сопоставление с обычным численным дифференцированием. Если функция $f(x)$ задана в точках сетки $x = sh$,

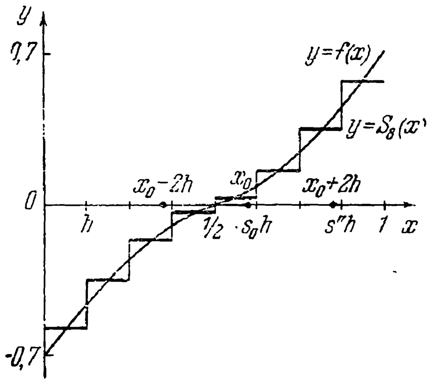

Рис. 1.16.

то на практике применяют приближение

$$f'(sh) \approx \frac{1}{2\Delta x}\left[f(sh + \Delta x) - f(sh - \Delta x)\right].$$

Так как

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f'(t)\,dt,$$

то

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - f'(x) = \frac{1}{2\Delta x}\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} [f'(t) - f'(x)]\,dt$$

Используя условие $f'(x) \in H_\alpha(M)$, получим неравенство

$$\left|\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} - f'(x)\right| \leqslant \frac{M}{2\Delta x}\int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} |t - x|^\alpha dt =$$

$$= \frac{M}{\alpha + 1}(\Delta x)^\alpha. \quad (1.46)$$

В том, что эта оценка точная, можно убедиться на примере функции

$$f(x) = (\alpha + 1)^{-1} M\, |x - x_0|^{\alpha+1} \operatorname{sgn}(x - x_0),$$

для которой

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}-f'(x_0)=\frac{M}{\alpha+1}(\Delta x)^{\alpha}.$$

Оценка (1.46) отличается от оценки (1.40) только множи-

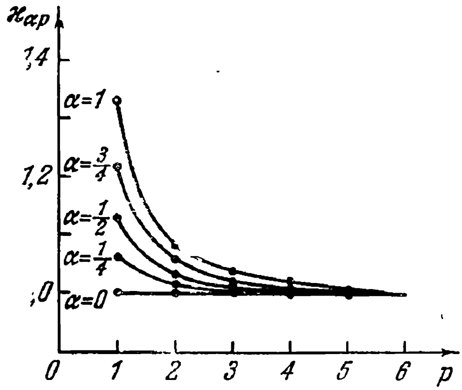

Рис. 1.17.

телем $\varkappa_{\alpha p}$, который невелик: из (1.45) видно, что

$$\varkappa_{\alpha p}=\frac{1}{2p^{1+\alpha}}\int\limits_{p-1}^{p+1}t^{1+\alpha}\,dt<\left(1+\frac{1}{p}\right)^{1+\alpha}.$$

Значения $\varkappa_{\alpha p}$ приведены на рис. 1.17.

Глава 2

Метод рядов Хаара в теории квадратурных формул

Рассмотрим пока произвольное множество H интегрируемых функций $f(x)$, определенных на отрезке $[0, 1]$. Для приближенного вычисления интеграла от $f(x)$ можно использовать квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{N-1} C_i f(x_i), \tag{2.1}$$

где $x_0, \ldots, x_{N-1}$ — *узлы* формулы, а $C_0, \ldots, C_{N-1}$ — *веса*. В качестве узлов мы будем выбирать произвольные точки x_i из $[0, 1]$, а относительно весов, как обычно [52], будем предполагать, что все $C_i > 0$ и $C_0 + C_1 + \ldots + C_{N-1} = 1$. Число N пока считаем фиксированным.

Погрешностью квадратурной формулы (2.1) *на классе функций* H называется верхняя грань ошибки

$$R = \sup_{f \in H} \left| \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{N-1} C_i f(x_i) \right|.$$

Если рассматривать квадратурные формулы вида (2.1) с различными узлами и весами, то R окажется функцией от $x_0, \ldots, x_{N-1}, C_0, \ldots, C_{N-1}$:

$$R = R(x_0, \ldots, x_{N-1};\ C_0, \ldots, C_{N-1}).$$

Наилучшей квадратурной формулой вида (2.1) *на классе функций* H называется такая формула, для которой

$$R(x_0, \ldots, x_{N-1};\ C_0, \ldots, C_{N-1}) = \min.$$

Задачу о нахождении наилучших (в этом смысле) квадратурных формул часто называют *экстремальной задачей* теории квадратурных формул. Обзор экстремальных задач (на различных классах функций) сделан в книге С. М. Никольского [54], где указано, что такая постановка вопроса принадлежит А. Н. Колмогорову.

Для нахождения наилучшей формулы не обязательно вычислять явно функцию $R(x_0, \ldots, x_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1})$ и затем искать ее минимум. Иногда удается выбрать «самую плохую» функцию $f_*(x)$ класса H и получить оценку снизу

$$R \geqslant \left| \int_0^1 f_*(x)\,dx - \sum_{i=0}^{N-1} C_i f_*(x_i) \right| \geqslant {}_*,$$

а затем построить формулу, для которой $R = R_*$. Оба эти подхода к экстремальным задачам представлены в § 1.

Экстремальные задачи относятся к наиболее трудным задачам теории квадратурных формул. В [52] сказано, что формулы, «при которых R достигает минимума, были найдены лишь в небольшом числе простых случаев». И эта фраза относится к интегрированию функций от одной переменной. Ясно, что отыскание наилучших формул в случае, когда подынтегральная функция зависит от многих переменных,— задача гораздо более сложная. И до сих пор исследований в этом направлении немного. Среди них в первую очередь необходимо отметить работы С. Л. Соболева, изложенные в [56].

Заметно больше работ, в которых R не вычисляется явно, а только оценивается снизу. В ряде случаев такие оценки позволили найти формулы, близкие к наилучшим. Наиболее последовательно этот прием осуществлен в [49], хотя оценки снизу используются также в других работах.

Предположим теперь, что множество функций H есть линейное нормированное пространство [53] с нормой $\|f\|_H$. Тогда разность

$$\delta(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{N-1} C_i f(x_i) \tag{2.2}$$

представляет собой линейный функционал, определенный на H.

По определению норма линейного функционала — это верхняя грань абсолютной величины его значений на единичной сфере пространства:

$$\|\delta\| = \sup_{\|f\|_H = 1} |\delta(f)|.$$

Ввиду линейности H имеет место неравенство

$$|\delta(f)| \leqslant \|\delta\| \, \|f\|_H,$$

точное в том смысле, что $\|\delta\|$ нельзя заменить никакой меньшей постоянной.

Погрешность формулы (2.1) на сфере $\|f\|_H = L$ равна $R = L\|\delta\|$. Поэтому задачу о выборе наилучшей квадратурной формулы можно поставить так: среди всех функционалов вида (2.2) найти функционал с наименьшей нормой.

Основная цель настоящей главы — на простом материале разъяснить методы, которые дальше используются для изучения многомерного случая. Впрочем, результаты § 4 представляют и самостоятельный интерес.

Все результаты § 1 в той или иной форме были известны. Напротив, все результаты §§ 2—4 принадлежат автору книги (кроме теоремы 11).

§ 1. Некоторые экстремальные задачи

В качестве примеров решения экстремальных задач мы рассмотрим квадратурную формулу (2.1) на классах функций малой гладкости $W_p^{(1)}$ и H_α. Необходимо отметить, что для практики эти задачи представляют незначительный интерес, так как хотя погрешности на разных классах оказываются разными, но наилучшая формула на всех этих классах одна и та же — формула прямоугольников.

Однако на аналогичных классах функций в многомерном случае найти наилучшие сетки очень трудно. И разные выражения для R позволяют по-разному подойти к этой проблеме.

Классы функций $W_p^{(1)}$. Мы будем рассматривать функции $f(x)$, непрерывные на отрезке $[0, 1]$, производные которых $f'(x)$ кусочно непрерывны. Множество этих функций можно нормировать по-разному.

Определение. Функция $f(x)$ принадлежит $W_p^{(1)}(L)$, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, а ее производная удовлетворяет условию

$$\left\{\int_0^1 |f'(x)|^p dx\right\}^{1/p} \leqslant L. \tag{2.3}$$

Допустимые значения параметра $1 \leqslant p \leqslant \infty$, причем для $p = \infty$ необходимо соотношение (2.3) заменить предельным соотношением

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f'(x)| \leqslant L. \tag{2.3'}$$

Объединение всех $W_p^{(1)}(L)$ со всевозможными L будем называть $W_p^{(1)}$. С помощью вспомогательного неравенства (9.2) (см. стр. 279) нетрудно доказать, что если $1 < p < p' < \infty$, то

$$W_\infty^{(1)}(L) \subset W_{p'}^{(1)}(L) \subset W_p^{(1)}(L) \subset W_1^{(1)}(L).$$

Класс функций $W_\infty^{(1)}(L)$ иногда называют $W_1(L)$.

Вывод формулы для $\delta(f)$. Квадратурной формуле (2.1) поставим в соответствие ступенчатую функцию

$$F_N(x) = \sum_{\{i \mid x_i < x\}} C_i,$$

где суммирование осуществляется по всем i таким, что $x_i < x$. Очевидно, $F_N(x)$ — кусочно постоянная неубывающая функция, $F_N(0) = 0$, $F_N(1) = 1$ (рис. 2.1). Такие функции часто встречаются в теории вероятностей, где их называют функциями распределения [50].

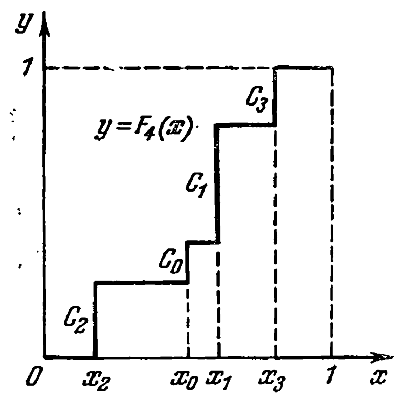

Рис. 2.1.

Пусть

$$K(u) = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } u > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) = f(1) - \int_x^1 f'(t)\,dt = f(1) - \int_0^1 K(t-x) f'(t)\,dt$$

и

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_i f(x_i) = f(1) - \int_0^1 f'(t) \sum_{i=0}^{N-1} C_i K(t-x_i)\,dt.$$

Нетрудно заметить, что $\sum\limits_{i=0}^{N-1} C_i K(t-x_i) = F_N(t)$. Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_i f(x_i) = f(1) - \int_0^1 f'(t) F_N(t)\,dt.$$

С другой стороны, интегрируя по частям, получим, что

$$\int_0^1 f(t)\,dt = f(1) - \int_0^1 t f'(t)\,dt.$$

Вычитая из последнего выражения предпоследнее, получим формулу

$$\delta(f) = \int_0^1 [F_N(x) - x]\, f'(x)\,dx. \tag{2.4}$$

Некоторые свойства величины $d = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |F_N(x) - x|$.

Лемма 1. *Верхняя грань разности* $|F_N(x) - x|$ *не может достигаться в точке непрерывности* $F_N(x)$.

Доказательство. Допустим противное: пусть x^* — точка непрерывности $F_N(x)$ и в этой точке $|F_N(x^*) - x^*| = d$. Тогда x^* принадлежит одному из интервалов постоянства функции $F_N(x)$ и можно указать отрезок $[x', x'']$, содержащий точку x^*, на котором $F_N(x) \equiv F_N(x^*)$ (рис. 2.2).

Если $F_N(x^*) > x^*$, то в точке x'

$$F_N(x') - x' = F_N(x^*) - x' > F_N(x^*) - x^* = d;$$

а если $F_N(x^*) < x^*$, то в точке x''

$$x'' - F_N(x'') = x'' - F_N(x^*) > x^* - F_N(x^*) = d.$$

В обоих случаях получаем противоречие, так как $d = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |F_N(x) - x|$.

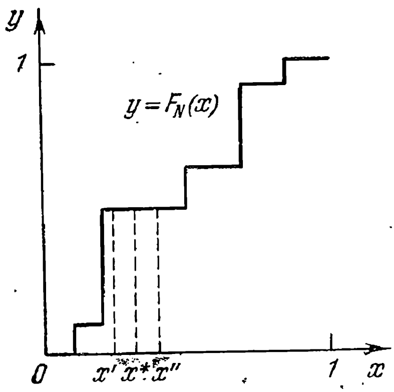

Рис. 2.2

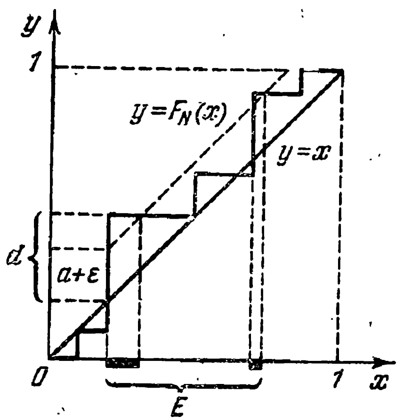

Рис. 2.3.

Лемма 2. *Для любой функции* $F_N(x)$

$$\lim_{q \to \infty} \left\{ \int_0^1 |F_N(x) - x|^q \, dx \right\}^{1/q} = d.$$

Доказательство. Из вспомогательного неравенства (9.2) (стр. 279) следует, что при росте q величины $y(q) = \left\{ \int_0^1 |F_N(x) - x|^q \, dx \right\}^{1/q}$ монотонно возрастают. Очевидно также, что $y(q) \leqslant d$. Поэтому существует $\lim\limits_{q \to \infty} y(q) = a$.

Допустим, что $a < d$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $a + \varepsilon < d$, и обозначим через E множество точек отрезка $[0, 1]$, в которых $|F_N(x) - x| \geqslant a + \varepsilon$ (рис. 2.3). Это множество состоит из одного или нескольких отрезков, сумму длин которых обозначим через μ. Тогда

$$\int_0^1 |F_N(x) - x|^q\,dx \geqslant \int_E |F_N(x) - x|^q\,dx \geqslant (a+\varepsilon)^q \mu$$

и $y(q) \geqslant (a+\varepsilon)\mu^{1/q}$. При $q \to \infty$ отсюда следует, что $a \geqslant a + \varepsilon$. Противоречие.

Квадратурные формулы на классах $W_p^{(1)}$.

Теорема 1. *Погрешность квадратурной формулы* (2.1) *на классе функций* $W_p^{(1)}(L)$ *равна*

$$R = L\left\{\int_0^1 |F_N(x) - x|^q\,dx\right\}^{1/q}, \tag{2.5}$$

где $(1/p) + (1/q) = 1$, $1 < p \leqslant \infty$.

Доказательство. Из (2.4) с помощью неравенства Гельдера получим, что

$$|\delta(f)| \leqslant \left\{\int_0^1 |f'(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \left\{\int_0^1 |F_N(x) - x|^q\,dx\right\}^{1/q},$$

откуда видно, что R не превосходит правой части (2.5).

Остается доказать, что оценка эта точная. Для этого достаточно выбрать функцию $g(x) = \int_0^x g'(t)\,dt$, где

$$g'(x) = L\left\{\int_0^1 |F_N(x) - x|^q\,dx\right\}^{1/p} |F_N(x) - x|^{q-1}\operatorname{sgn}(F_N - x).$$

Для этой функции

$$\left\{\int_0^1 |g'(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} = L, \qquad \delta(g) = L\left\{\int_0^1 |F_N(x) - x|^q\,dx\right\}^{1/q}.$$

Теорема 1′. *Погрешность квадратурной формулы* (2.1) *на классе функций* $W_1^{(1)}(L)$ *равна*

$$R = L \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |F_N(x) - x|. \tag{2.5′}$$

Доказательство. Из (2.3') и (2.4) видно, что если $f(x) \in W_1^{(1)}(L)$, то $|\delta(f)| \leqslant Ld$. Чтобы доказать, что эта оценка точная, фиксируем какую-нибудь точку x_i, в которой верхняя грань $|F_N(x) - x|$ достигается: $|F_N(x_i + 0) - x_i| = d$ или $|F_N(x_i - 0) - x_i| = d$.

Пусть для определенности $F_N(x_i + 0) - x_i = d$ (случай, когда $x_i - F_N(x_i - 0) = d$, рассматривается аналогично). Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $F_N(x) - x > 0$ при $x_i < x \leqslant x_i + \varepsilon$ и чтобы $x_i + \varepsilon < x_{i+1}$. Пусть

$$g_\varepsilon'(x) = \begin{cases} L/\varepsilon & \text{при} \quad x \in (x_i, x_i + \varepsilon), \\ 0 & \text{при} \quad x \notin (x_i, x_i + \varepsilon), \end{cases}$$

а

$$g_\varepsilon(x) = \int_0^x g_\varepsilon'(t)\,dt.$$ Легко вычислить, что

$$\int_0^1 |g_\varepsilon'(x)|\,dx = \int_{x_i}^{x_i+\varepsilon} (L/\varepsilon)\,dx = L$$

и в то же время

$$\delta(g_\varepsilon) = (L/\varepsilon) \int_{x_i}^{x_i+\varepsilon} (F_N - x)\,dx = L\,[F_N(x_i + 0) - x_\varepsilon],$$

где x_ε — некоторое среднее значение, заключенное между x_i и $x_i + \varepsilon$. При $\varepsilon \to 0$ точка $x_\varepsilon \to x_i$ и $\delta(g_\varepsilon) \to Ld$.

Теорема 2. *Для любой квадратурной формулы вида* (2.1) *при* $1 \leqslant q < \infty$

$$\left\{\int_0^1 |F_N(x) - x|^q\,dx\right\}^{1/q} \geqslant \frac{1}{(q+1)^{1/q} 2N}, \tag{2.6}$$

причем равенство в (2.6) *имеет место только в случае формулы прямоугольников, когда* $x_i = (i + 1/2)/N$, $C_i = 1/N$ $(i = 0, 1, \ldots, N - 1)$.

Доказательство. Перенумеруем все узлы в порядке возрастания и введем формально $x_{-1} = 0$, $x_N = 1$:

$$x_{-1} \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{N-1} \leqslant x_N.$$

Можем записать, что

$$\int_0^1 |F_N(x)-x|^q\,dx=\sum_{i=-1}^{N-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |F_N(x_i+0)-x|^q\,dx.$$

Интегралы, стоящие в последнем выражении, вычисляются (см. доказательство (9.1) на стр. 279). Если для краткости обозначить $F_N(x_i+0)=\sum_{s=0}^{i} C_s$ через F_i, то получим

$$\int_0^1 |F_N-x|^q\,dx=\frac{1}{q+1}\sum_{i=-1}^{N-1}\{|x_{i+1}-F_i|^q(x_{i+1}-F_i)+$$
$$+|F_i-x_i|^q(F_i-x_i)\}.$$

В фигурной скобке первый член при $i=N-1$ и второй член при $i=-1$ равны нулю, так как $F_{-1}=F(0)=0$, $F_{N-1}=F(1)=1$. Объединим оставшиеся члены с одними и теми же значениями x_i:

$$\int |F_N-x|^q\,dx=\frac{1}{q+1}\sum_{i=0}^{N-1}\{|x_i-F_{i-1}|^q(x_i-F_{i-1})+$$
$$+|F_i-x_i|^q(F_i-x_i)\}.$$

В этом выражении каждая фигурная скобка зависит лишь от одного x_i. Рассмотрим функцию, стоящую в такой скобке (рис. 2.4):

$$y=|x-F_{i-1}|^q(x-F_{i-1})+|F_i-x|^q(F_i-x).$$

Легко проверить, что $y'(x)>0$, когда $x>F_i$, и $y'(x)<0$, когда $x<F_{i-1}$. Поэтому $y(x)$ имеет лишь один минимум — при $x=0{,}5\,(F_{i-1}+F_i)$. Подставив это значение вместо x_i в фигурную скобку, получим неравенство

$$\int_0^1 |F_N-x|^q\,dx\geqslant\frac{2}{q+1}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{F_i-F_{i-1}}{2}\right)^{q+1}=$$
$$=\frac{2}{q+1}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{C_i}{2}\right)^{q+1},$$

обращающееся в равенство только при $x_i = 0{,}5(F_{i-1}+F_i)$. Далее, по вспомогательному неравенству (9.4) (стр. 280)

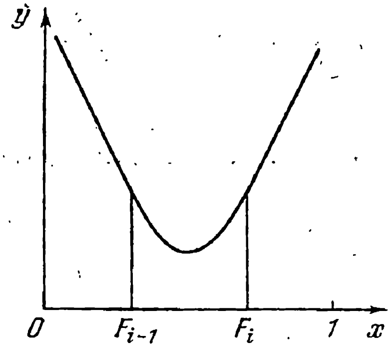

Рис. 2.4.

$$\sum_{i=0}^{N-1} (C_i)^{q+1} \geqslant 1/N^q,$$

причем равенство имеет место только в случае, когда все $C_i = 1/N$. Следовательно,

$$\int_0^1 | F_N - x|^q \, dx \geqslant$$

$$\geqslant (q+1)^{-1} (2N)^{-q},$$

что равносильно (2.6). Равенство возможно только в случае, когда все $C_i = 1/N$ и

$$x_i = 0{,}5\left(\frac{i}{N} + \frac{i+1}{N}\right) = \frac{i+1/2}{N}.$$

Теорема 2'. *Для любой квадратурной формулы вида* (2.1)

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} | F_N(x) - x | \geqslant \frac{1}{2N}, \qquad (2.6')$$

причем равенство в (2.6′) *имеет место в случае формулы прямоугольников.*

Для доказательства этого утверждения достаточно перейти в (2.6) к пределу при $q \to \infty$ и учесть лемму 2.

Обобщения. Рассмотрим функции $f(x)$, имеющие на отрезке [0,1] ограниченную вариацию [53]. Как известно, такие функции не обязаны быть непрерывными, а могут иметь не более чем счетное множество точек разрыва первого рода.

Определение. Функция $f(x)$ принадлежит $V(L)$, если ее вариация $V_0^1(f) \leqslant L$.

Объединение всех $V(L)$ со всевозможными L будем называть V.

Легко видеть, что если $f(x) \in V$, то все соотношения, использованные при выводе формулы (2.4), сохраняют свою силу, если их записать в форме интегралов Стилтьеса. Следовательно, для таких функций справедлива также формула (2.4), но записанная в форме интеграла Стилтьеса:

$$\delta(f)=\int_0^1 [F_N(x)-x]\,df(x). \tag{2.7}$$

Так как $\mathrm{V}_0^1(f)=\int_0^1 |df(x)|$, то отсюда вытекает, что если $f(x)\in V(L)$, то $|\delta(f)|\leqslant Ld$.

Последняя оценка совпадает с оценкой (2.5′) на классе $W_1^{(1)}(L)$. Однако если $f(x)\in W_1^{(1)}(L)$, то $\mathrm{V}_0^1(f)=\int_0^1 |f'(x)|\,dx\leqslant L$, так что $W_1^{(1)}(L)\subset V(L)$. И так как оценка (2.5′) точна на $W_1^{(1)}(L)$, то тем более она точна на $V(L)$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 1″. *Погрешность квадратурной формулы* (2.1) *на классе функций* $V(L)$ *выражается формулой* (2.5′).

Заметим, что для случая равных весов это утверждение было доказано Й. Коксма в 1942 году.

Пусть теперь $f(x)$ принадлежит классу Липшица $H_1(L)$ (определение см. на стр. 43). В этом случае

$$\mathrm{V}_0^1(f)=\sup\sum_j |f(\xi_{j+1})-f(\xi_j)|\leqslant L\sup\sum_j |\xi_{j+1}-\xi_j|=L.$$

Значит, $H_1(L)\subset V(L)$ и для всех функций из $H_1(L)$ справедлива формула (2.7). Так как $|df(x)|\leqslant L\,dx$, то из (2.7) вытекает оценка $|\delta(f)|\leqslant L\int_0^1 |F_N(x)-x|\,dx$, совпадающая с оценкой (2.5) для класса $W_\infty^{(1)}(L)$.

Если $f(x)\in W_\infty^{(1)}(L)$, то

$$|f(x')-f(x)|=\left|\int_x^{x'} f'(t)\,dt\right|\leqslant L|x'-x|,$$

так что $f(x)\in H_1(L)$. Значит, $W_\infty^{(1)}(L)\subset H_1(L)$ и оценка, точная на $W_\infty^{(1)}(L)$, тем более точна на $H_1(L)$.

Таким образом, нами доказана еще одна теорема:

Теорема 1‴. *Погрешность квадратурной формулы* (2.1) *на классе функций* $H_1(L)$ *выражается формулой* (2.5) *при* $q=1$.

Теоремы 2 и 2′ показывают, что формула прямоугольников является наилучшей квадратурной формулой и на классе $V(L)$, и на классе $H_1(L)$. Последний результат был впервые получен в [55].

Дальнейшие обобщения. Можно отказаться от предположения о кусочной непрерывности $f'(x)$ и в определении классов $W_p^{(1)}$ требовать только, чтобы $f'(x)$ была суммируемой и принадлежала L_p. При этом, для того чтобы имело место равенство $f(x) = f(1) - \int\limits_x^1 f'(t)\,dt$, надо еще предположить, что $f(x)$ абсолютно непрерывна*). Для таким образом определенных более широких классов $W_p^{(1)}(L)$ также будут справедливы все доказанные выше утверждения.

Квадратурные формулы на классах H_α. Получить удобную формулу для погрешности R на классах функций $H_\alpha(L)$ (определение см. на стр. 43) не удается (за исключением случая $\alpha = 1$, для которого это сделано в теореме 1'''). Поэтому воспользуемся оценкой R снизу.

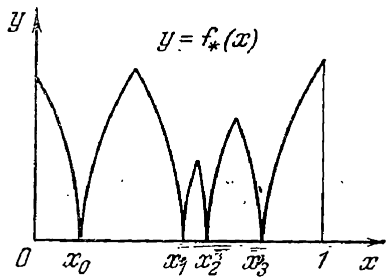

Рис. 2.5.

Пусть задана квадратурная формула (2.1) с узлами $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_{N-1}$. Рассмотрим «плохую» функцию $f_*(x)$, изображенную на рис. 2.5:

$$f_*(x) = L\,|x_i - x|^\alpha,$$

когда

$$x_{i-1} + x_i \leqslant 2x \leqslant x_i + x_{i+1},$$

где $i = 0, 1, \ldots, N-1$ и формально надо считать $x_{-1} = -x_0$, $x_N = 2 - x_{N-1}$ (благодаря этим условиям первый отрезок определения $f_*(x)$ будет $[0, x_0]$, а последний — $[x_{N-1}, 1]$).

Так как во всех узлах $f_*(x_i) = 0$, то из (2.2) вытекает, что

$$\delta(f_*) = \int\limits_0^1 f_*(x)\,dx,$$

---

*) Более точно, абсолютная непрерывность $f(x)$ необходима и достаточна для того, чтобы $f(x) = f(1) - \int\limits_x^1 f'(t)\,dt$ в случае $f'(x) \in L_1$. Если $f'(x) \in L_p$ и $p > 1$, то необходимые и достаточные условия менее ограничительные (теорема Ф. Рисса [53], стр. 225).

и погрешность

$$R = \sup_{f \in H_\alpha(L)} |\delta(f)| \geqslant |\delta(f_*)| = \int_0^1 f_*(x)\,dx.$$

Вычислив последний интеграл, получим оценку

$$R \geqslant \frac{L}{(\alpha+1)\,2^\alpha}\Big[2^\alpha x_0^{\alpha+1} + \sum_{i=1}^{N-1}(x_i - x_{i-1})^{\alpha+1} + \\ + 2^\alpha(1 - x_{N-1})^{\alpha+1}\Big]. \quad (2.8)$$

Минимум выражения, стоящего в квадратной скобке, при дополнительных условиях $x_0 \geqslant 0$, $x_i - x_{i-1} \geqslant 0$, $1 - x_{N-1} \geqslant 0$ и

$$x_0 + \sum_{i=1}^{N-1}(x_i - x_{i-1}) + (1 - x_{N-1}) = 1$$

легко найти с помощью вспомогательного неравенства (9.5) (стр. 280). Он реализуется в случае, когда все $x_i - x_{i-1} = 1/N$ и $x_0 = 1 - x_{N-1} = 1/(2N)$. Подставив эти значения в (2.8), получим оценку снизу

$$R \geqslant L\,(\alpha+1)^{-1}\,(2N)^{-\alpha}. \quad (2.9)$$

Чтобы доказать, что оценка (2.9) точная, достаточно указать конкретную квадратурную формулу, погрешность которой удовлетворяет соотношению (2.9) со знаком равенства. Эта формула, очевидно, будет наилучшей на $H_\alpha(L)$.

Как и следовало ожидать, этому условию удовлетворяет формула прямоугольников (2.1) с $x_i = (i + 1/2)/N$, $C_i = 1/N$. В самом деле, для формулы прямоугольников

$$\delta(f) = \int_0^1 f(x)\,dx - (1/N)\sum_{i=0}^{N-1} f((i+1/2)/N) = \\ = \sum_{i=0}^{N-1}\int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}}[f(x) - f((i+1/2)/N)]\,dx.$$

Используя определение (1.31) класса $H_\alpha(L)$, получим оценку

$$|\delta(f)| \leqslant L \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \left| x - \frac{i+1/2}{N} \right|^\alpha dx.$$

Интегралы здесь легко вычисляются, после чего правая часть последнего неравенства обращается в правую часть (2.9).

Полученный результат можно сформулировать в виде теоремы:

Теорема 3 ([58]). *Наилучшей квадратурной формулой на каждом из классов* $H_\alpha(L)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *является формула прямоугольников* $(x_i = (i + 1/2)/N,\ C_i = 1/N)$, *погрешность которой на* $H_\alpha(L)$ *есть*

$$R = L(\alpha + 1)^{-1}(2N)^{-\alpha}. \tag{2.10}$$

Заметим, что при таком подходе (то есть при использовании оценок снизу без явного расчета R) вопрос о единственности наилучшей квадратурной формулы не решается, хотя в рассмотренном случае единственность может быть доказана.

§ 2. Классы функций S_p

Этот параграф мог бы быть включен в гл. 1: здесь изучаются классы функций с быстро сходящимися рядами Фурье — Хаара, близкие к классам H_α. Рассмотрение классов S_p составляет основу метода рядов Хаара в теории квадратурных формул, так как на этих классах удается явно вычислить погрешность R и исследовать ее свойства. Для функций от одной переменной это сделано в § 3 (а для функций от многих переменных — в гл. 4).

Определение классов $S_p(A)$. Фиксируем параметр $1 \leqslant p < \infty$, и пусть q — сопряженное значение $(\infty \geqslant q > 1)$:

$$(1/p) + (1/q) = 1.$$

Определение. Функция $f(x)$ принадлежит классу $S_p(A)$, если она представима в виде ряда Хаара

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x) \tag{2.11}$$

и

$$A_p(f)\equiv\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}|^p\right\}^{1/p}\leqslant A. \tag{2.12}$$

Объединение всех классов $S_p(A)$ при всевозможных A будем обозначать S_p. С помощью вспомогательного неравенства (9.3) (стр. 279) легко получить, что если $1<p<p'$, то

$$S_1(A)\subset S_p(A)\subset S_{p'}(A).$$

Теорема 4. *Для любой функции* $f(x)$ *из* S_p *ряд* (2.11) *сходится абсолютно и равномерно на* $[0, 1]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный участок ряда (2.11)

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} |c_k\chi_k(x)|\leqslant\sum_{m=m_1}^{m_2}\ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}\chi_{mj}(x)|,$$

где справа суммирование распространено на полную группу. По неравенству Гельдера

$$\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}\chi_{mj}(x)|\leqslant\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\chi_{mj}(x)|^q\right\}^{1/q},$$

а последняя фигурная скобка по формуле (1.6) равна $2^{1/2(m-1)q}$. Поэтому

$$\sum_{k=k_1}^{k_2} |c_k\chi_k(x)|\leqslant\sum_{m=m_1}^{m_2} 2^{\frac{m-1}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}|^p\right\}^{1/p}<\varepsilon,$$

если k_1 (а вместе с ним и m_1) достаточно велико.

Следствие. Функции классов S_p непрерывны во всех точках отрезка $[0, 1]$, кроме, быть может, двоично рациональных точек, в которых они непрерывны справа и могут иметь разрывы первого рода. Это утверждение вытекает из теоремы 4 и теоремы 3 гл. 1.

Следствие. Функции классов S_p ограничены:

$$|f(x)| \leqslant |c_1| + A_p(f).$$

Это утверждение доказывается в точности так же, как теорема 4.

Вложение H_α в S_p. Следующая теорема показывает, что классы S_p содержат достаточно много непрерывных функций.

Теорема 5. *Если* $\alpha \cdot p > 1$, *то* $H_\alpha(L) \subset S_p(A)$ *при*

$$A = \frac{0{,}5L}{2^\alpha - 2^{1/p}}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Во-первых, надо оценить коэффициенты Фурье — Хаара для произвольной функции $f(x)$ из $H_\alpha(L)$:

$$c_{mj} = \int_0^1 f(x)\,\chi_{mj}(x)\,dx = 2^{\frac{m-1}{2}}\left[\int_{l_{mj}^-} f(x)\,dx - \int_{l_{mj}^+} f(x)\,dx\right] = 2^{\frac{m-1}{2}} \int_{l_{mj}^-} [f(x) - f(x+2^{-m})]\,dx.$$

Используя определение (1.31) класса $H_\alpha(L)$, получим отсюда

$$|c_{mj}| \leqslant L\,2^{-m(\alpha+1/2)-1/2}. \tag{2.14}$$

Подставим оценку (2.14) в выражение (2.12) для $A_p(f)$:

$$A_p(f) \leqslant L \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m(\alpha-1/p)-1-1/p}.$$

Просуммировав стоящую справа прогрессию со знаменателем $2^{-(\alpha-1/p)}$, получим справа выражение (2.13).

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = Lx$, принадлежащую $H_1(L)$. Легко вычислить коэффициенты

Фурье — Хаара для этой функции: $c_1 = 0{,}5L$,

$$c_{mj} = 2^{\frac{m-1}{2}}\,\frac{L}{2}\left[2\left(\frac{j-1/2}{2^{m-1}}\right)^2 - \left(\frac{j}{2^{m-1}}\right)^2 - \left(\frac{j-1}{2^{m-1}}\right)^2\right] = -2^{-\frac{3m+1}{2}}L.$$

Следовательно,

$$Lx = L\left[\frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{m-1}} 2^{-\frac{3m+1}{2}}\chi_{mj}(x)\right]$$

(частичные суммы этого ряда приведены на рис. 2.6).

Легко также вычислить значение

$$A_p(Lx) = \frac{0{,}5L}{2-2^{1/p}}.$$

Отсюда видно, что значение A в формуле (2.13) уменьшить нельзя, во всяком случае при $\alpha = 1$.

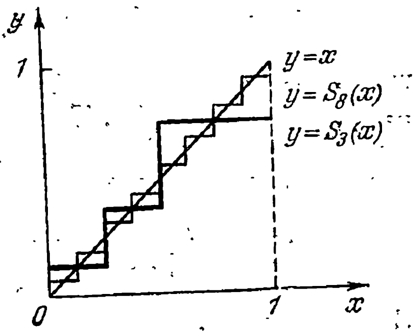

Рис. 2.6.

Этот же пример показывает, что заменить в условии теоремы 5 неравенство $\alpha\cdot p > 1$ на $\alpha\cdot p \geqslant 1$ нельзя, так как $A_1(Lx) = \infty$ и функция $f = Lx$ из H_1 не принадлежит S_1.

О классе функций S_1. Теорема 5 и предыдущий пример показывают, что классы H_α с различными α довольно тесно вкладываются в классы S_p с соответствующими значениями $p > 1/\alpha$. В частности, $H_1 \subset S_p$ при любом $p > 1$, однако при $p = 1$ такое утверждение уже неверно: $H_1 \not\subset S_1$.

Сейчас мы докажем, что, в то время как классу H_1 принадлежат все непрерывно дифференцируемые функции, класс S_1 таких функций не содержит. И в этом смысле класс S_1 гораздо беднее, чем все S_p при $p > 1$.

Т е о р е м а 6. *Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, производная которой $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, за исключением, быть может, конечного числа* *двоично рациональных точек, в которых она может иметь разрывы первого рода. Если $f(x) \in S_1$, то $f(x) = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Обозначим через $F(x)$ неопределенный интеграл $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ и выберем m столь большим, чтобы все точки разрыва функции $f'(x)$ содержались среди точек вида $j/2^{m-1}$. Вычислим коэффициенты Фурье — Хаара функции $f(x)$:

$$c_{mj} = 2^{\frac{m-1}{2}}\Big[\int\limits_{l_{mj}^-} f(x)\,dx - \int\limits_{l_{mj}^+} f(x)\,dx\Big] =$$

$$= -2^{\frac{m-1}{2}}\Big[F\Big(\frac{j-1}{2^{m-1}}\Big) - 2F\Big(\frac{j-1/2}{2^{m-1}}\Big) + F\Big(\frac{j}{2^{m-1}}\Big)\Big] =$$

$$= -2^{\frac{m-1}{2}}\Delta^2_{2^{-m}} F\Big(\frac{j-1}{2^{m-1}}\Big),$$

где $\Delta_{2^{-m}}$ — обычный разностный оператор: $\Delta_t F(x) = F(x+t) - F(x)$. Так как на l_{mj} функция $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, то по известной теореме о среднем найдется точка $\xi_{mj} \in l_{mj}$ такая, что

$$\Delta^2_{2^{-m}} F\Big(\frac{j-1}{2^{m-1}}\Big) = F''(\xi_{mj})(2^{-m})^2 = f'(\xi_{mj})\,2^{-2m}.$$

Следовательно,

$$|c_{mj}| = 2^{-\frac{3m+1}{2}}|f'(\xi_{mj})|. \tag{2.15}$$

Так как по условию теоремы $f(x) \in S_1$, то сходится ряд (2.12) для $A_1(f)$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}| < \infty.$$

Общий член этого ряда с учетом (2.15) равен

$$2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}| = 2^{-2} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |f'(\xi_{mj})|\,2^{-(m-1)}.$$

Последняя сумма представляет собой интегральную сумму и при $m \to \infty$ имеет предел:

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |f'(\xi_{mj})|\, 2^{-(m-1)} = \int_0^1 |f'(x)|\, dx.$$

А так как общий член любого сходящегося ряда обязан стремиться к нулю, то этот предел равен нулю. Значит, $\int_0^1 |f'(x)|\, dx = 0$ и $f'(x) \equiv 0$, что равносильно утверждению теоремы.

Линейное нормированное пространство S_p. Функционал (2.2), который нас интересует, принимает одинаковые значения на всех функциях $f(x)$ из S_p, различающихся постоянными слагаемыми. Условимся считать все такие функции одной функцией $f(x)$ и определим для нее норму

$$\|f\| = A_p(f).$$

При таком определении S_p превращается в линейное нормированное пространство.

В самом деле, обозначим c_{mj} и d_{mj} коэффициенты Фурье—Хаара функций f и g. По известному неравенству Минковского

$$\left\{\sum_j |c_{mj} + d_{mj}|^p\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_j |c_{mj}|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_j |d_{mj}|^p\right\}^{1/p},$$

и из (2.12) видно, что

$$A_p(f+g) \leqslant A_p(f) + A_p(g). \tag{2.16}$$

Поэтому из $f \in S_p$ и $g \in S_p$ следует $f + g \in S_p$. Очевидно также, что при любом действительном λ из $f \in S_p$ следует $\lambda f \in S_p$. Таким образом, пространство S_p линейное.

Проверим теперь свойства нормы. Во-первых, если $\|f\| = 0$, то все $c_{mj} = 0$. Значит, $f(x) \equiv \mathrm{const}$, а это в силу нашего соглашения равносильно $f \equiv 0$. Во-вторых, очевидно, $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$. Наконец, неравенство треугольника $\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ следует из (2.16).

Полнота S_p. Докажем, что пространство S_p *полное*, то есть справедлив критерий Коши: если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое n_0, что

$$\|f_{n+k} - f_n\| < \varepsilon \tag{2.16'}$$

при всех $n \geqslant n_0$ и $k > 0$, то существует функция $f \in S_p$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$.

Доказательство. Из неравенства (2.16′) следует, что коэффициенты Фурье — Хаара этих функций удовлетворяют неравенствам $|c_{mj}(f_{n+k}) - c_{mj}(f_n)| < \varepsilon$ (через $c_{mj}(f_n)$ мы обозначим коэффициенты Фурье — Хаара функции f_n). Значит, существуют пределы $\overset{*}{c}_{mj} = \lim\limits_{n\to\infty} c_{mj}(f_n)$. При $k\to\infty$ из (2.16′) вытекает, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| \overset{*}{c}_{mj} - c_{mj}(f_n) \right|^p \right\}^{1/p} \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $f(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{2^{m-1}} \overset{*}{c}_{mj} \chi_{mj}(x)$. Тогда $\|f\| \leqslant \|f_n\| + \|f - f_n\| \leqslant \|f_n\| + \varepsilon < \infty$ и, следовательно, $f \in S_p$.

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

§ 3. Квадратурные формулы на классах S_p

Оценка погрешности. Если $f(x) \in S_p$, то ряд (2.11) сходится равномерно. Подставим его в выражение (2.2) для $\delta(f)$. Так как $c_1 = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$, то получим

$$\delta(f) = -\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} C_i c_{mj} \chi_{mj}(x_i).$$

Поменяем порядок суммирований и выделим $|\chi_{mj}(x)| = 2^{\frac{m-1}{2}}$:

$$\delta(f) = -\sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} c_{mj} \sum_{i=0}^{N-1} C_i \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x_i).$$

Отсюда следует неравенство

$$|\delta(f)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}| \left| \sum_{i=0}^{N-1} C_i \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x_i) \right|.$$

К сумме по j применим неравенство Гельдера:

$$|\delta(f)| \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |c_{mj}|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| \sum_{i=0}^{N-1} C_i \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x_i) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (2.17)$$

Введем теперь в рассмотрение функции ψ_q, $1 < q \leqslant \infty$:

$$\psi_q = \sup_{1 \leqslant m < \infty} \left\{ \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left| \sum_{i=0}^{N-1} C_i \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x_i) \right|^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (2.18)$$

Эти функции не зависят от $f(x)$ и представляют собой характеристики квадратурной формулы (2.1). Иначе говоря, $\psi_q = \psi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1})$. Из (2.17), (2.18) и (2.12) следует, что

$$|\delta(f)| \leqslant A_p(f)\psi_q. \quad (2.19)$$

Ниже будет доказана следующая теорема:

Теорема 7. *Погрешность квадратурной формулы (2.1) на классе функций $S_p(A)$ равна*

$$R = A\psi_q, \quad (2.20)$$

где $(1/p) + (1/q) = 1$.

Пока из (2.19) следует только, что $R \leqslant A\psi_q$. Надо еще доказать, что эта оценка точная. Однако это можно будет сделать только позднее, после изучения некоторых свойств функций $\psi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1})$.

Геометрический смысл ψ_q. Пусть задана квадратурная формула (2.1). Обозначим через $\sigma(l)$ сумму весов, соответствующих всем узлам этой формулы, принадлежащим l:

$$\sigma(l) = \sum_{\{i \mid x_i \in l\}} C_i.$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} C_i \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x_i) = \sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+),$$

так как $\operatorname{sgn}\chi_{mj}(x_i) = 1$, если $x_i \in l_{mj}^-$; $\operatorname{sgn}\chi_{mj}(x_i) = -1$, если $x_i \in l_{mj}^+$; $\operatorname{sgn}\chi_{mj}(x_i) = 0$, если $x_i \notin l_{mj}$. Поэтому аналитическое определение (2.18) равносильно следующему геометрическому определению ψ_q:

$$\psi_q = \sup_{1\leqslant m<\infty}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q}. \qquad (2.21)$$

Смысл формулы (2.21) можно истолковать так. Фиксировав значение m, мы тем самым фиксируем разбиение отрезка $[0, 1]$ на отрезки l_{mj}, $1 \leqslant j \leqslant 2^{m-1}$. Для каждого из этих отрезков мы вычисляем «вариацию весов» $|\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)|$, то есть абсолютную величину разности весов, соответствующих l_{mj}^-, и весов, соответствующих l_{mj}^+. Затем, суммируя по j, мы находим «вариацию весов» на данном разбиении: $\left\{\sum_j |\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q}$. Наконец, берем наибольшую «вариацию весов» по всевозможным разбиениям.

Лемма 3. *Какова бы ни была квадратурная формула* (2.1), *существует по крайней мере одно значение m такое, что*

$$\psi_q(x_0, \ldots, C_{N-1}) = \left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q}.$$

В самом деле, выберем m_0 столь большим, чтобы ни в одном из отрезков $l_{m_0 j}$ не лежали два различных узла x_i. Тогда

$$|\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)| = \sigma(l_{mj}),$$

и величина эта равна либо C_i, если $x_i \in l_{mj}$, либо нулю. А так как каждый из узлов x_i принадлежит одному из l_{mj}, то «вариация весов» на данном разбиении равна

$$\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q} = \left\{\sum_{i=0}^{N-1} (C_i)^q\right\}^{1/q}. \qquad (2.22)$$

Легко видеть, что если мы рассмотрим любое более мелкое разбиение, то по-прежнему «вариация весов» будет равна (2.22). Таким образом, $\sup\limits_{1\leqslant m<\infty}$ в формуле (2.21) фактически сводится к $\max\limits_{1\leqslant m\leqslant m_0}$, откуда сразу следует утверждение леммы *).

Окончание доказательства теоремы 7. Фиксируем значение m, существование которого было доказано в лемме 3, и положим $B_j = \sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)$. По лемме 3

$$\psi_q = \left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |B_j|^q\right\}^{1/q}. \tag{2.23}$$

Рассмотрим теперь конечную сумму Хаара

$$\hat f(x) = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \operatorname{sgn} B_j\, |B_j|^{q-1} \chi_{mj}(x),$$

содержащую только функции $\chi_{mj}(x)$ из фиксированной нами группы номер m. Нетрудно вычислить, что

$$A_p(\hat f) = 2^{\frac{m-1}{2}} \left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |B_j|^q\right\}^{1/q}, \tag{2.24}$$

а ошибка

$$\delta(\hat f) = -2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \operatorname{sgn} B_j\, |B_j|^{q-1} \sum_{i=0}^{N-1} C_i \operatorname{sgn} \chi_{mj}(x_i) =$$
$$= -2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} \operatorname{sgn} B_j\, |B_j|^{q-1} B_j = -2^{\frac{m-1}{2}} \sum_{j=1}^{2^{m-1}} |B_j|^q.$$

Из последней формулы и из (2.23) и (2.24) вытекает, что $\delta(\hat f) = -A_p(\hat f)\psi_q$, так что для функции $\hat f$ неравенство (2.19) обращается в равенство.

Правда, построенная функция $\hat f$ не обязана принадлежать $S_p(A)$. Однако ее можно перенормировать: положив $f_* = [A/A_p(\hat f)]\hat f$, получим функцию, для которой

*) Если среди узлов есть совпадающие, например, $x_i = x_\mu$, то в (2.22) войдет $(C_i + C_\mu)^q$. Дальнейшие рассуждения не изменятся.

$A_p(f_*) = A$ и $|\delta(f_*)| = A\psi_q$. Таким образом, теорема 7 полностью доказана.

В теореме 7 вычислена норма линейного функционала (2.2) на банаховом пространстве S_p:

$$\|\delta\| = \psi_q.$$

Границы ψ_q.

Теорема 8. *Для любой квадратурной формулы* (2.1)

$$N^{-1/p} \leqslant \psi_q(x_0, \ldots, C_{N-1}) \leqslant 1, \tag{2.25}$$

причем обе границы достижимы; $(1/p) + (1/q) = 1$.

Доказательство. Во-первых, из рассуждений, использованных при выводе (2.22), вытекает, что

$$\psi_q \geqslant \left\{\sum_{i=0}^{N-1} (C_i)^q\right\}^{1/q}.$$

Так как $\sum_{i=0}^{N-1} C_i = 1$, то по вспомогательному неравенству (9.4) (стр. 280) минимум правой части равен $N^{-1/p}$ и реализуется при $C_0 = C_1 = \ldots = C_{N-1} = 1/N$.

Во-вторых, всегда $|\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)| \leqslant \sigma(l_{mj})$ и так как $\sigma(l_{mj}) \leqslant 1$, то $[\sigma(l_{mj})]^q \leqslant \sigma(l_{mj})$. Поэтому при любом m

$$\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |\sigma(l_{mj}^-) - \sigma(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \sigma(l_{mj})\right\}^{1/q} = 1.$$

Верхняя граница (2.25) достижима, например, в случае $x_0 = x_1 = \ldots = x_{N-1}$. Достижимость нижней границы будет доказана несколько ниже, когда будут построены наилучшие формулы на S_p.

Устойчивость ψ_q $(x_0, \ldots, x_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1})$ относительно сдвигов узлов. При доказательстве леммы 3 мы видели, что на верхнюю грань в (2.21) не влияют все разбиения с $m > m_0$. Следовательно, если мы сдвинем узлы $x_0, \ldots, x_{N-1}$ так, чтобы они оставались в тех же отрезках $l_{m_0j}^-$ и $l_{m_0j}^+$, то все числа $\sigma(l_{mj}^-)$ и $\sigma(l_{mj}^+)$ при $m \leqslant m_0$ останутся прежними. Если совпадающих узлов x_i не было, то значение ψ_q

останется прежним. Если же какие-либо узлы совпадали, то, раздвинув их, можно (в некоторых случаях) уменьшить значение ψ_q.

В частности, каково бы ни было значение $\psi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1})$, можно заменить узлы $x_0, \ldots, x_{N-1}$ двоично рациональными точками $r_0, \ldots, r_{N-1}$ так, чтобы

$$\psi_q(r_0, \ldots, r_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1}) \leqslant \leqslant \psi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1}).$$

Наилучшие квадратурные формулы на классах S_p. Так как классы S_p шире, чем классы $W_p^{(1)}$ или H_1, то можно было ожидать, что для них наилучшей формулой тоже будет формула прямоугольников. В действительности ответ оказывается несколько иным: *наилучших квадратурных формул на класах S_p бесконечно много*. Правда, все эти формулы, так же как и формула прямоугольников, должны иметь равные веса: $C_0 = C_1 = \ldots = C_{N-1} = 1/N$ (это было показано в ходе доказательства теоремы 8).

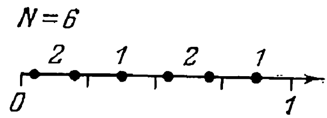

Рис. 2.7.

В качестве наилучшей сетки можно выбрать любую равномерную сетку $x_i = (i + \beta)/N$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$; $0 \leqslant \beta < 1$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим произвольный двоичный отрезок $\bar{l}_{mj}$. Предположим, что $\bar{l}_{mj}$ содержит s точек сетки. Тогда $(s-1)N^{-1} < |\bar{l}_{mj}| < (s+1)N^{-1}$ — знаки равенства здесь невозможны из-за того, что $\bar{l}_{mj}$ полуоткрыт. Легко видеть, что $\overset{+}{l}_{mj}$, длина которого $|\overset{+}{l}_{mj}| = |\bar{l}_{mj}|$, содержит не меньше чем $s-1$ и не больше чем $s+1$ точку (рис. 2.7). В любом случае количества точек, принадлежащих $\bar{l}_{mj}$ и $\overset{+}{l}_{mj}$, различаются не более чем на 1, и поэтому $|\sigma(\bar{l}_{mj}) - \sigma(\overset{+}{l}_{mj})| \leqslant 1/N$.

Далее, в сумме, стоящей в (2.21), не больше чем N слагаемых, отличных от нуля (так как число узлов равно N). И, как мы доказали, каждое из них не превосходит

$1/N$. Значит,

$$\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} \left|\sigma(l_{mj}^{-}) - \sigma(l_{mj}^{+})\right|^{q}\right\}^{1/q} \leqslant \{N \cdot N^{-q}\}^{1/q} = N^{-1/p}.$$

Из теоремы 8 следует, что для рассматриваемой сетки $\psi_q = N^{-1/p}$ — наименьшее возможное значение.

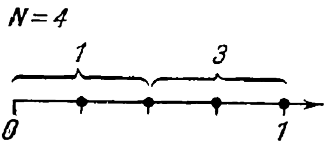

Рис. 2.8.

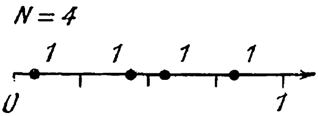

Рис. 2.9.

Замечание. Рис. 2.8 показывает, что ограничение $\beta < 1$ существенно.

Рассмотрим теперь случай $N = 2^{\nu}$. В этом случае в качестве наилучшей сетки можно выбрать любые точки $x_0, \ldots, x_{N-1}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{i}{N} \leqslant x_i < \frac{i+1}{N}, \tag{2.26}$$

например изображенные на рис. 2.9 при $N = 4$.

В самом деле, если $m \leqslant \nu$, то во всех отрезках l_{mj}^{-} и l_{mj}^{+} будет по одинаковому числу $2^{\nu-m}$ точек, и тогда $|\sigma(l_{mj}^{-}) - \sigma(l_{mj}^{+})| = 0$. Если же $m > \nu$, то в каждом из l_{mj}^{-} и l_{mj}^{+} будет не больше чем по одной точке, так что $|\sigma(l_{mj}^{-}) - \sigma(l_{mj}^{+})| \leqslant 1/N$. И так же, как выше, $\psi_q = N^{-1/p}$.

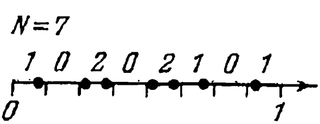

Рис. 2.10.

Пример, показывающий, что при $N \neq 2^{\nu}$ неравенства (2.26) недостаточны для того, чтобы $\psi_q = N^{-1/p}$.

Пусть $N = 7$; рассмотрим формулу (2.1) с равными весами и узлами $x_0 = 0{,}10$, $x_1 = 0{,}28$, $x_2 = 0{,}36$, $x_3 = 0{,}52$, $x_4 = 0{,}60$, $x_5 = 0{,}72$, $x_6 = 0{,}90$ (рис. 2.10). Эти узлы удовлетворяют условию

(2.26). Легко показать, что

$$|\sigma(l_{11}^-)-\sigma(l_{11}^+)|=1/N;$$

$$|\sigma(l_{21}^-)-\sigma(l_{21}^+)|=1/N;\quad |\sigma(l_{22}^-)-\sigma(l_{22}^+)|=2/N;$$

$$|\sigma(l_{3j}^-)-\sigma(l_{3j}^+)|=1/N,2/N,1/N,1/N \quad \text{при} \quad j=1,2,3,4.$$

Все остальные $|\sigma(l_{mj}^-)-\sigma(l_{mj}^+)|$ при $m\geqslant 4$ равны либо 0, либо 1. Следовательно,

$$\left\{\sum_j |\sigma(l_{mj}^-)-\sigma(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q}=\begin{cases}1/N & \text{при} \quad m=1,\\ (1/N)(1+2^q)^{1/q} & \text{при} \quad m=2,\\ (1/N)(3+2^q)^{1/q} & \text{при} \quad m=3,\\ (1/N)\,7^{1/q} & \text{при} \quad m\geqslant 4.\end{cases}$$

Найти наибольшую среди этих величин очень просто, так как $3+2^q>7$ при $q>2$. Значит,

$$\psi_q\left(x_0,\ldots,x_6;\frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{7}\right)=\begin{cases}7^{-1/p}, & \text{если} \quad 1<q\leqslant 2,\\ 7^{-1}(3+2^q)^{1/q}, & \text{если} \quad 2<q\leqslant\infty.\end{cases}$$

Отсюда видно, что наша квадратурная формула не будет наилучшей для случая $q>2$ или, что то же, для классов S_p с $p<2$.

Лемма 4. *Какова бы ни была квадратурная формула* (2.1),

$$\psi_q(x_0,\ldots,C_{N-1})\leqslant[\psi_\infty(x_0,\ldots,C_{N-1})]^{1/p}, \tag{2.27}$$

где, в согласии с определением (2.21),

$$\psi_\infty=\sup_{2\leqslant k<\infty}|\sigma(l_-)-\sigma(l_k^+)|. \tag{2.28}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное m. Тогда

$$\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}}|\sigma(l_{mj}^-)-\sigma(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q}\leqslant\left\{(\psi_\infty)^{q-1}\sum_{j=1}^{2^{m-1}}\sigma(l_{mj})\right\}^{1/q}=$$
$$=(\psi_\infty)^{1-1/q},$$

откуда сразу вытекает (2.27).

Мы видели (теорема 6), что класс функций S_1 слишком узок для большинства практических задач. Лемма 4 показывает, что, несмотря на это, соответствующая классу S_1 функция ψ_∞ (наиболее простая среди всех ψ_q) во многих случаях может оказаться очень полезной. В самом деле, если $\psi_\infty = 1/N$ (то есть формула (2.1) является наилучшей формулой на S_1), то из (2.27) следует, что $\psi_q = N^{-1/p}$ при любом q (то есть формула (2.1) будет наилучшей на всех классах S_p).

Оценка погрешности R на классах H_α. Из теорем 5 и 7 вытекает, что если $f(x) \in H_\alpha(L)$, то при любом p, большем чем $1/\alpha$,

$$|\delta(f)| \leqslant 0{,}5\,L\,(2^\alpha - 2^{1/p})^{-1}\,\psi_q.$$

Воспользуемся неравенством (2.27) и запишем

$$R \leqslant 0{,}5L\,(2^\alpha - 2^{1/p})^{-1}\,(\psi_\infty)^{1/p}.$$

Будем считать, что N достаточно велико ($N > e^{1/\alpha}$), и выберем параметр p так, чтобы $1/p = \alpha - (1/\ln N)$. Тогда

$$2^\alpha - 2^{1/p} = 2^\alpha\,(1 - e^{\log_2^{-1} N}) = (2^\alpha/\log_2 N)\,(1 + O(\ln^{-1} N)),$$
$$(\psi_\infty)^{1/p} = (\psi_\infty)^{\alpha - 1/\ln N} = (\psi_\infty)^\alpha \exp(-\ln\psi_\infty/\ln N) \leqslant e\,(\psi_\infty)^\alpha.$$

Подставив выбранное значение $1/p$ в неравенство для R, получим оценку

$$R \leqslant 2^{-(1+\alpha)}\,eL\,(\psi_\infty)^\alpha \log_2 N\,[1 + O(\ln^{-1} N)], \qquad (2.29)$$

справедливую для любой квадратурной формулы (2.1) на классе $H_\alpha(L)$. Конечно, оценка (2.29) не обязана быть точной оценкой для каждой формулы (2.1).

Рассмотрим, например, формулу прямоугольников, которая согласно теореме 3 является наилучшей формулой на каждом из классов $H_\alpha(L)$. В этом случае $\psi_\infty = N^{-1}$ и формула (2.29) дает оценку

$$R \leqslant 2^{-(1+\alpha)}\,Le\,[(\log_2 N)/N^\alpha]\,[1 + O(\ln^{-1} N)], \qquad (2.30)$$

в то время как в действительности имеет место более точная оценка (2.10). Впрочем, сравнение этих двух оценок показывает, что «потери» от применения оценки (2.29

не так уж велики: по существу, только множитель $\log_2 N$ в (2.30) «лишний». А главный фактор $N^{-\alpha}$ оказался правильным.

С другой стороны, необходимо отметить, что оценка (2.30) справедлива не только для формулы прямоугольников, но и для всех квадратурных формул с $\psi_q = N^{-1/p}$. В конце следующего параграфа будут указаны формулы с $\psi_q = N^{-1/p}$, для которых порядок оценки (2.30) при $\alpha = 1$, равный $\log_2 N/N$, не может быть улучшен.

§ 4. Задача о добавлении узлов в квадратурной формуле

Предположим, что подынтегральная функция $f(x)$ в (2.1) «сложная и плохая». Слово «сложная» означает, что на вычисление каждого значения $f(x)$ затрачивается много операций. Слово «плохая» означает, что $f(x)$ имеет не более одной производной, или что $f(x) \in H_\alpha$, или что $f(x) \in S_p$.

Как правило, заранее неизвестно, сколько узлов (то есть какое N) надо выбрать, чтобы вычислить интеграл с требуемой точностью. Поэтому обычно проводят не менее двух расчетов — с различными значениями N — и сопоставляют результаты. Однако далеко не всегда значения $f(x_0), \ldots, f(x_{N-1})$, используемые в квадратурной формуле с N узлами, будут входить в число нужных значений при $N_1 > N$. И при переходе от N к N_1 придется заново считать значения $f(x)$ в N_1 точках.

Возможны разные пути для организации более экономного счета. Например, при использовании формулы прямоугольников (или трапеций, или Симпсона) выбирают $N_1 = 2N$, что, конечно, не всегда удобно, особенно если N велико. В работе А. С. Кронрода [51] строятся пары квадратурных формул с N и N_1 узлами, которые выбираются так, чтобы по возможности уменьшить суммарное количество операций, затрачиваемое на вычисление по обеим формулам.

Можно попытаться построить бесконечную последовательность узлов $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots$ так, чтобы любой начальный участок этой последовательности $x_0, \ldots, x_{N-1}$ служил узлами наилучшей формулы (2.1). Тогда добавление узлов в квадратурной формуле можно будет осуществлять наиболее выгодным образом.

Легко видеть, что на классах $W_p^{(1)}$ или H_α эта задача неразрешима: при переходе от N к $N+1$ узлы $(i+1/2)/N$ должны заменяться узлами $(i+1/2)/(N+1)$, так как в каждом из этих случаев существует лишь по одной наилучшей формуле.

Мы докажем, что на классах S_p задача о добавлении узлов разрешима: можно построить последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots$ так, что при каждом N узлы $x_0, \ldots, x_{N-1}$ и веса $C_0 = \ldots = C_{N-1} = 1/N$ определяют квадратурную формулу (2.1), наилучшую по отношению к классам S_p.

Случай равных весов. Рассмотрим квадратурную формулу (2.1) с равными весами:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i). \tag{2.31}$$

Совокупность узлов $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ будет называть *сеткой интегрирования* и обозначать одной буквой Σ.

Через $S_N(l)$ обозначим число узлов сетки Σ, принадлежащих отрезку l. Очевидно, в случае равных весов $\sigma(l) = S_N(l)/N$. И вместо функций $\psi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}; C_0, \ldots, C_{N-1})$ удобно рассматривать функции от сетки

$$\varphi_q(\Sigma) = N\psi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}; 1/N, \ldots, 1/N),$$

впервые введенные в [57]. Из определений (2.21) и (2.28), из формул (2.25) и (2.27), из леммы 3 и вспомогательного неравенства (9.3) (стр. 279), вытекают следующие свойства функций $\varphi_q(\Sigma)$:

1°. $$\varphi_q(\Sigma) = \sup_{1 \leqslant m < \infty}\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |S_N(l_{mj}^-) - S_N(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q}.$$

2°. Существует хотя бы одно m такое, что

$$\varphi_q(\Sigma) = \left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |S_N(l_{mj}^-) - S_N(l_{mj}^+)|^q\right\}^{1/q}.$$

3°. Для любой сетки Σ

$$N^{1/q} \leqslant \varphi_q(\Sigma) \leqslant N. \tag{2.32}$$

4°. Для любой сетки Σ

$$\varphi_q(\Sigma) \leqslant N^{1/q}\,[\varphi_\infty(\Sigma)]^{1/p}, \tag{2.33}$$

где

$$\varphi_\infty(\Sigma) = \sup_{2\leqslant k<\infty} |\,S_N(l_k^-) - S_N(l_k^+)\,|. \tag{2.34}$$

Величину $\varphi_\infty(\Sigma)$ мы будем называть *неравномерностью* сетки Σ. Она может принимать только целые значения.

5°. Если $1 < q < q' < \infty$, то

$$1 \leqslant \varphi_\infty(\Sigma) \leqslant \varphi_{q'}(\Sigma) \leqslant \varphi_q(\Sigma). \tag{2.35}$$

Для записи погрешности формулы (2.31) на классах $W_p^{(1)}$ также удобно вместо $F_N(x)$ ввести другую функцию:

$$S_N(x) = \sum_{\{i\,|\,x_i < x\}} 1,$$

значение которой равно числу узлов сетки, расположенных левее x. Иначе говоря, $S_N(x) = S_N(l)$ при $l = [0, x)$. Легко видеть, что в случае равных весов $F_N(x) = S_N(x)/N$.

Из формул (2.5) и (2.20) вытекают выражения для погрешности R формулы (2.31) на классах $W_p^{(1)}(L)$ и $S_p(A)$ соответственно:

$$R = \frac{L}{N}\left\{\int_0^1 |\,S_N(x) - Nx\,|^q\right\}^{1/q} \text{ и } R = \frac{A}{N}\,\varphi_q(\Sigma).$$

А из теоремы $1'''$ получается выражение для погрешности R формулы (2.31) на классе $H_1(L)$:

$$R = \frac{L}{N}\int_0^1 |\,S_N(x) - Nx\,|\,dx. \tag{2.36}$$

Перейдем к построению последовательности $x_i = p(i)$, $i=0, 1, 2, \ldots$, для которой при любом N $\varphi_\infty(x_0, \ldots, x_{N-1}) = 1$. Из (2.33) видно, что для этой же последовательности при любом N значения $\varphi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}) = N^{1/q}$ при всех q.

Определение последовательности $\{p(i)\}$. Последовательность $\{p(i)\}$ была построена Й. Г. ван дер Корпутом [72] и независимо от него в [57]. Она использовалась во многих работах [18, 79, 83, 92, 93, 97, 108—111]. Различные обобщение $\{p(i)\}$ рассмотрены в гл. 3, 5, 6, 7.

Следующие три определения этой последовательности эквивалентны.

Определение 1. Если в двоичной системе $i = e_m e_{m-1} \ldots e_1$, то (снова в двоичной системе) $p(i) = 0, e_1 e_2 \ldots e_m$.

Здесь все e_j — двоичные цифры, то есть либо 0, либо 1. В десятичной системе

$$i = e_1 + 2^1 e_2 + \ldots + 2^{m-1} e_m,$$
$$p(i) = e_1 2^{-1} + e_2 2^{-2} + \ldots + e_m 2^{-m}.$$

Определение 2, рекуррентное по группам, состоит из двух правил:

1°. $p(0) = 0$; $p(2^s) = 2^{-(s+1)}$.

2°. Если $2^s < i < 2^{s+1}$, то $p(i) = p(2^s) + p(i - 2^s)$.

Определение 3, рекуррентное. Если в двоичной системе

$$p(i) = 0, e_1 e_2 \ldots e_m \ldots,$$

то для получения $p(i+1)$ необходимо найти наименьший номер k такой, что $e_k = 0$; затем заменить e_k единицей, а все цифры с меньщими номерами (если они есть) заменить нулями; цифры с номерами, большими чем k, остаются без изменения. Значение $p(0) = 0$ задано.

В десятичной системе это правило можно записать в виде формулы

$$p(i+1) = p(i) + 2^{-(k-1)} + 2^{-k} - 1.$$

Примеры. Использование первого определения.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$i_{\text{двоичное}}$	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	...
$p(i)_{\text{двоичное}}$	0	0,1	0,01	0,11	0,001	0,101	0,011	0,111	0,0001	...
$p(i)$	0	$1/2$	$1/4$	$3/4$	$1/8$	$5/8$	$3/8$	$7/8$	$1/16$	...

Использование второго определения.

$$p(3) = p(2) + p(1) = 1/4 + 1/2 = 3/4;$$
$$p(5) = p(4) + p(1) = 1/8 + 1/2 = 5/8;$$
$$p(6) = p(4) + p(2) = 1/8 + 1/4 = 3/8;$$
$$p(7) = p(4) + p(3) = 1/8 + 3/4 = 7/8.$$

Использование третьего определения.

Дано $p(3) = 0{,}11$; здесь $k = 3$, получаем $p(4) = 0{,}001$.

Дано $p(4) = 0{,}001$; здесь $k = 1$; получаем $p(5) = 0{,}101$.

Доказательство эквивалентности определений 1, 2 и 3. Пусть $\{p(i)\}$ — числа, получающиеся по определению 1, $\{p'(i)\}$ — числа, получающиеся по определению 2, $\{p''(i)\}$ — числа, получающиеся по определению 3. Очевидно, $p(0) = p'(0) = p''(0) = 0$ и $p(1) = p'(1) = p''(1) = 1/2$.

Докажем по индукции, что $p(i) = p'(i)$. Для этого допустим, что такое равенство справедливо для всех $i \leqslant n-1$.

а) Если $n = 2^s$, то из определений 1 и 2 следует, что $p(n) = p'(n) = 2^{-(s+1)}$.

б) Пусть теперь $2^s < n < 2^{s+1}$, так что в двоичной системе

$$n = 1e_se_{s-1}\ldots e_1, \qquad n - 2^s = e_se_{s-1}\ldots e_1.$$

По индукционному допущению

$$p'(n - 2^s) = p(n - 2^s) = 0,\ e_1e_2\ldots e_s.$$

Значит, $p'(n) = p'(2^s) + p'(n - 2^s) = 0,\ e_1e_2\ldots\ e_s1 = p(n)$.

Докажем теперь по индукции, что $p(i) = p''(i)$. Снова допустим, что это равенство имеет место для всех $i \leqslant n-1$.

а) Если $p''(n-1) = p(n-1) = 0{,}0e_2e_3\ldots e_m$ (в двоичной системе), то $k = 1$, $n - 1 = e_me_{m-1}\ldots e_20$, $n = e_me_{m-1}\ldots e_21$ и, следовательно, $p(n) = 0{,}1\ e_2e_3\ldots e_m = p''(n)$.

б) Если $p''(n-1) = p(n-1) = 0{,}\underbrace{1\ldots1}_{k-1}0\,e_{k+1}\ldots e_m$, то из определения 1 видно, что $n-1=e_m\dots e_{k+1}0\underbrace{1\dots 1}_{k-1}$.

Тогда $n=e_m\dots e_{k+1}1\underbrace{0\dots 0}_{k-1}$ и снова

$$p(n)=0,\underbrace{0\dots 0}_{k-1}1\,e_{k+1}\dots e_m=p''(n).$$

Некоторые свойства последовательности $\{p(i)\}$.

1°. $p(2i)=\frac{1}{2}p(i)$; $\quad p(2i+1)=p(2i)+\frac{1}{2}$.

2°. Начальный участок последовательности $\{p(i)\}$ и конечная группа чисел $i/2^\nu$ при $0\leqslant i\leqslant 2^\nu-1$ симметричны: если $p(i)=j/2^\nu$, то $p(j)=i/2^\nu$.

3°. Некоторые суммы по полным группам, то есть при $N=2^\nu$:

$$\sum_{i=0}^{N-1}p(i)=\frac{1}{2}(N-1);$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}ip(i)=\frac{1}{8}[2N^2+N(\log_2 N-4)+2];\tag{2.37}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}i^2p(i)=\frac{1}{12}[2N^3+\frac{3}{2}N(N-1)\log_2 N-5N^2+4N-1].\tag{2.38}$$

4°. Рассмотрим сетку, состоящую из точек $x_i=p(i)$ с номерами $0\leqslant i\leqslant N-1$. Для этой сетки при каждом N и при всех x из $[0, 1]$ справедливо неравенство $S_N(x)\geqslant \geqslant Nx$ (см. рис. 2.11 для $N=6$).

Доказательства этих свойств.

1. Если в двоичной системе $i=e_me_{m-1}\dots e_1$, то $2i= =e_me_{m-1}\dots e_1\,0$ и значение $p(2i)=0,0\,e_1e_2\dots e_m$ в два раза меньше, чем $p(i)=0,e_1e_2\dots e_m$. В этом же случае $2i+1=e_me_{m-1}\dots e_1 1$ и $p(2i+1)=0,1e_1e_2\dots e_m=0{,}1+ +p(2i)$. (В двоичной системе $0{,}1=1/2$.)

2. Пусть $i=e_\nu e_{\nu-1}\dots e_1$. Тогда $p(i)=0,e_1e_2\dots e_\nu$,

$$j=2^\nu p(i)=e_1e_2\dots e_\nu,\quad p(j)=0,e_\nu e_{\nu-1}\dots e_1=i/2^\nu.$$

3. Первая из этих формул очевидна, так как в сумму входят все дроби вида $i/2^\nu$ при $0 \leqslant i \leqslant 2^\nu - 1$. Чтобы доказать две другие формулы, воспользуемся методом разностных уравнений.

Обозначим $Z_\nu = \sum\limits_{i=0}^{2^\nu-1} i^m p(i)$ и преобразуем разность

$$Z_\nu - Z_{\nu-1} = \sum_{i=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1} i^m p(i) = \sum_{j=0}^{2^{\nu-1}-1} (j + 2^{\nu-1})^m [p(j) + 2^{-\nu}].$$

В случае $m = 1$ после несложных вычислений, выделив справа еще один член, равный $Z_{\nu-1}$, получим уравнение

$$Z_\nu - 2Z_{\nu-1} = \\ = 2^{2\nu-3} + 2^{\nu-3} - 2^{-2}.$$

Кроме того, должно выполняться начальное условие $Z_1 = 1/2$. Легко проверить, что правая часть формулы для $\Sigma ip(i)$ при $N = 2^\nu$ удовлетворяет и этому уравнению, и начальному условию.

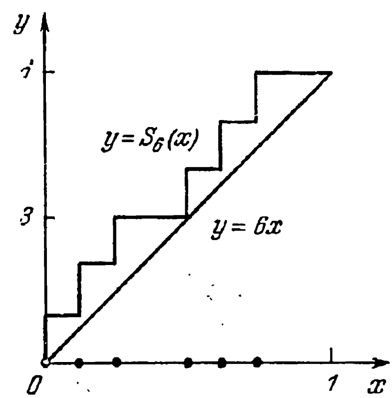

Рис. 2.11.

В случае $m = 2$ преобразования вполне аналогичные: справа выделяется еще одно слагаемое, равное $Z_{\nu-1}$, а сумма $\Sigma jp(j)$ уже известна. Получим уравнение

$$Z_\nu - 2Z_{\nu-1} = \frac{1}{4}\left(2^{3\nu-1} + \nu 2^{\nu-2} - \frac{7}{3} 2^{2\nu-2} - 2^{\nu-1} + \frac{1}{3}\right)$$

и то же начальное условие $Z_1 = 1/2$. Остается проверить, что правая часть формулы для $\Sigma i^2 p(i)$ удовлетворяет последнему уравнению и этому условию.

4. Значение $S_N(x)$ легко вычислить при $N = 2^\nu$, так как тогда множество всех точек $\{p(i)\}$, $0 \leqslant i \leqslant N - 1$,

образует равномерную сетку. Из рис. 2.12 видно *), что при $N = 2^\nu$

$$S_N(x) = \text{Ц}\,(Nx - 0) + 1, \tag{2.39}$$

откуда следует, что $S_N(x) \geqslant Nx$.

Для произвольного N проведем доказательство по индукции: предположим, что $S_N(x) \geqslant Nx$ при всех $N < 2^s$, и докажем это неравенство для всех $N < 2^{s+1}$. Обозначим $N_1 = N - 2^s$, так что $N_1 < 2^s$. Введем вспомогательную функцию

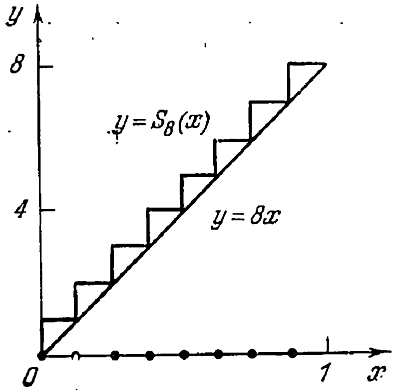

Рис. 2.12.

$$K(u) = \begin{cases} 0 \text{ при } u \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } u > 0. \end{cases}$$

$S_N(x)$ легко выражается через эту функцию:

$$S_N(x) = \sum_{i=0}^{N-1} K(x - p(i)). \tag{2.40}$$

Разобьем сумму (2.40) на две суммы и заменим во второй индекс суммирования:

$$S_N(x) = \sum_{i=0}^{2^s-1} K(x - p(i)) + \sum_{i=2^s}^{N-1} K(x - p(i)) =$$

$$= S_{2^s}(x) + \sum_{j=0}^{N_1-1} K(x - p(j + 2^s)).$$

Воспользуемся теперь 2-м определением $p(i)$ и форму-

*) Определение целой части Ц (z) числа z см. на стр. 102. Чтобы (2.39) было справедливо также в точках разрыва, приходится вместо Ц (Nx) писать Ц $(Nx - 0)$, так как по определению $S_N(x)$ непрерывна слева, а Ц (x) непрерывна справа: Ц $(n - 0) = n - 1$, Ц $(n) =$ Ц $(n + 0) = n$.

лой (2.39):

$$S_N(x) = Ц(2^s x - 0) + 1 + \sum_{j=0}^{N_1-1} K(x - 2^{-(s+1)} - p(j)).$$

Если $x \geqslant 2^{-(s+1)}$, то из (2.40) видно, что

$$S_N(x) = Ц(2^s x - 0) + 1 + S_{N_1}(x - 2^{-(s+1)}).$$

Перенумеруем точки $\{p(i)\}$, $0 \leqslant i \leqslant N_1 - 1$, в порядке возрастания и обозначим их $x_0 < x_1 < \ldots < x_{N_1-1}$. Легко видеть, что в каждом из интервалов вида $(x_{j-1} + 2^{-(s+1)}, x_j)$ (они заштрихованы на рис. 2.13) функция $S_{N_1}(x - 2^{-(s+1)}) \equiv S_{N_1}(x)$. Поэтому в каждом таком интервале

$$S_N(x) = Ц(2^s x) + 1 + S_{N_1}(x) \geqslant Ц(2^s x) + 1 + N_1 x \geqslant Nx.$$

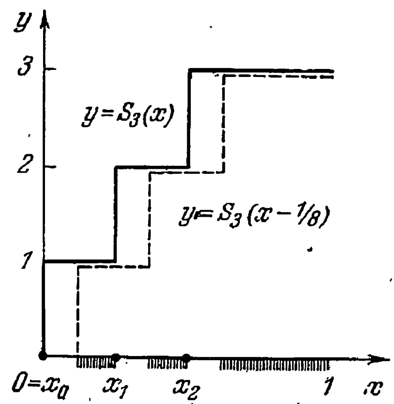

Рис. 2.13.

В частности, $S_N(x_j - 0) \geqslant Nx_j$, и так как $S_N(x_j + 0) = 1 + S_N(x_j - 0)$, то $S_N(x_j + 0) \geqslant Nx_j + 1$.

Однако на каждом интервале $(x_j, x_j + 2^{-(s+1)})$ величина Nx меняется меньше чем на 1 (ибо $N2^{-(s+1)} < 1$), а $S_N(x) \equiv S_N(x_j + 0)$. Поэтому здесь $S_N(x) \geqslant Nx_j + 1 \geqslant Nx$, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как число $S_N(x)$ целое, то из неравенства $S_N(x) \geqslant Nx$ следует неравенство

$$S_N(x) \geqslant Ц(Nx - 0) + 1, \qquad (2.39')$$

справедливое при всех $x \in [0, 1]$ и любом N. Лишь при $N = 2^\nu$ неравенство обращается в равенство и получается (2.39).

Погрешность квадратурной формулы (2.31) с сеткой $\{p(0), p(1), \ldots, p(N-1)\}$.

Теорема 9. *Каково бы ни было* N,

$$\varphi_\infty(p(0), p(1), \ldots, p(N-1)) = 1. \qquad (2.41)$$

Теорема 9 — это частный случай теоремы 7 гл. 3. Однако доказательство в гл. 3 аналитическое, а здесь приводится геометрическое доказательство.

Доказательство. В случае $N = 2^{s-1}$ утверждение (2.41) очевидно, так как сетка состоит из всех точек вида $i/2^{s-1}$, $0 \leqslant i \leqslant 2^{s-1} - 1$.

Допустим, что (2.41) справедливо при всех $N_1 < 2^{s-1}$, и рассмотрим случай $2^{s-1} < N < 2^s$. В этом случае сетка $\{p(0), \ldots, p(N-1)\}$ состоит из тех же 2^{s-1} точек $i/2^{s-1}$ и,

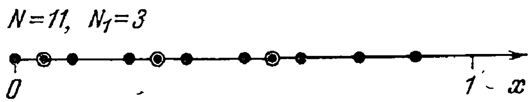

Рис. 2.14.

кроме того, еще из $N_1 = N - 2^{s-1}$ точек вида $p(i - 2^{s-1}) + 2^{-s}$, которые располагаются в серединах некоторых из отрезков

$$l_{sj} = [(j-1)\, 2^{-(s-1)},\quad j2^{-(s-1)})$$

и принадлежат l_{sj}^{+} (на рис. 2.14 значения $N = 11$, $N_1 = 3$).

Легко видеть, что $|S_N(l_{sj}^{-}) - S_N(l_{sj}^{+})| \leqslant 1$, так как каждое из этих S_N равно либо 0, либо 1. Более мелкие l_{mj} (при $m > s$) можем не рассматривать, так как в них лежит не более чем по одной точке сетки. Предположим, что при каком-то $m < s$ разность $|S_N(l_{mj}^{-}) - S_N(l_{mj}^{+})| > 1$, и докажем, что это невозможно.

Так как число точек вида $i2^{-(s-1)}$ и в l_{mj}^{-}, и в l_{mj}^{+} одинаковое, то величина разности определяется только точками вида $p(i - 2^{s-1}) + 2^{-s}$. Но в таком случае та же разность $|S_{N_1}(l_{mj}^{-}) - S_{N_1}(l_{mj}^{+})| > 1$ для сетки

$$\{p(0), \ldots, p(N_1 - 1)\},$$

что противоречит индукционному допущению. Теорема доказана.

Формулы (2.33) и (2.32) показывают, что любой начальный участок $\{p(0), p(1), \ldots, p(N-1)\}$ последовательности $\{p(i)\}$ представляет собой наилучшую сетку интегрирования на классах $S_p(A)$.

Теорема 10. *Пусть* $N = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_r}$, *где* $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_r \geqslant 0$. *Введем обозначения*: $N_1 = N - 2^{\nu_1}$, $N_2 = N_1 - 2^{\nu_2}, \ldots, N_{r-1} = 2^{\nu_r}$. *Для сетки* $\{p(0), p(1), \ldots$ $\ldots, p(N-1)\}$

$$\int_0^1 |S_N(x) - Nx|\,dx = \frac{1}{2}\left(r - \sum_{s=1}^{r-1} N_s 2^{-\nu_s}\right). \quad (2.42)$$

Доказательство. В силу свойства 4° последовательности $\{p(i)\}$

$$\int_0^1 |S_N(x) - Nx|\,dx = \int_0^1 S_N(x)\,dx - \frac{1}{2}N.$$

С помощью (2.40) легко показать, что

$$\int_0^1 S_N(x)\,dx = \sum_{i=0}^{N-1}\int_0^1 K(x - p(i))\,dx = \sum_{i=0}^{N-1}[1 - p(i)] =$$
$$= N - \sum_{i=0}^{N-1} p(i).$$

Поэтому

$$\int_0^1 |S_N(x) - Nx|\,dx = \frac{1}{2}N - \sum_{i=0}^{N-1} p(i). \quad (2.43)$$

Дальнейшие вычисления сравнительно просты:

$$\left[\frac{1}{2}N - \sum_{i=0}^{N-1} p(i)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}2^{\nu_1} + \frac{1}{2}N_1 - \sum_{i=0}^{2^{\nu_1}-1} p(i) - \sum_{j=0}^{N_1-1} p(j + 2^{\nu_1}).$$

Отсюда

$$\left[\frac{1}{2}N - \sum_{i=0}^{N-1} p(i)\right] = \left[\frac{1}{2}N_1 - \sum_{j=0}^{N_1-1} p(j)\right] + \frac{1}{2}(1 - N_1 2^{-\nu_1}).$$

Переходя от N_1 к N_2, затем от N_2 к N_3 и так далее, получим

$$\left[\frac{1}{2}N - \sum_{i=0}^{N-1} p(i)\right] = \sum_{s=1}^{r-1} \frac{1}{2}(1 - N_s 2^{-\nu_s}) + \left[\frac{1}{2}N_{r-1} - \sum_{j=0}^{N_{r-1}-1} p(j)\right]. \quad (2.44)$$

Последняя квадратная скобка в (2.44) легко вычисляется, ибо $N_{r-1} = 2^{\nu_r}$:

$$\left[\frac{1}{2}N_{r-1} - \sum_{i=0}^{N_{r-1}-1} p(i)\right] = \frac{1}{2}N_{r-1} - \frac{1}{2}(N_{r-1} - 1) = \frac{1}{2}.$$

Подставив это значение в (2.44), а затем (2.44) в (2.43), получим требуемое выражение (2.42).

Соотношения (2.42) и (2.36) позволяют записать погрешность квадратурной формулы (2.31) с сеткой $\{p(0), \ldots$ $\ldots, p(N-1)\}$ на классе функций $H_1(L)$.

О порядке формулы (2.42). Так как $N = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots$ $\ldots + 2^{\nu_r}$, то r равно количеству единиц в двоичной записи числа N. Если $2^s - 1 \leqslant N < 2^{s+1} - 1$, то $r \leqslant s$, а само $s = Ц\,[\log_2(N+1)]$. Следовательно,

$$r \leqslant Ц\,[\log_2(N+1)] \leqslant \log_2(N+1). \quad (2.45)$$

Из (2.42) следует, что (для рассматриваемой сетки)

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^1 |S_N(x) - Nx|\,dx \leqslant \frac{1}{2}\log_2(N+1).$$

Нижняя граница реализуется при $N = 2^\nu$, когда $r = 1$. Докажем, что существуют сколь угодно большие значения N, для которых интеграл (2.42) действительно имеет порядок $\log N$.

Пусть $N = N_{(r)} = 1010\ldots101$ — число, содержащее в двоичной записи r единиц, чередующихся с нулями. Нетрудно заметить, что $N_{(r+1)} = 4N_{(r)} + 1$ и что

$$N_{(r+1),s} = 4N_{(r),s} + 1, \quad \nu_{(r+1),s} = \nu_{(r),s} + 2$$

(обозначения те же, что и в теореме 10). Поэтому выражение, стоящее в (2.42) справа, при $r = k + 1$ имеет вид

$$k+1-\sum_{s=1}^{k} N_{(k+1),\,s}\, 2^{-\nu(k+1),\,s} = -\sum_{s=1}^{k-1} (4N_{(k),\,s}+1)2^{-\nu(k),\,s-2} +$$

$$+k+1-2^{-2^k} = k-\sum_{s=1}^{k-1} N_{(k),\,s}\, 2^{-\nu(k),\,s} + \frac{1}{3}\,(2+4^{-k}).$$

Суммируя такие равенства по k от $k = 1$ до $k = r-1$, получим

$$r-\sum_{s=1}^{r-1} N_{(r),\,s}\, 2^{-\nu(r),\,s} = \frac{2}{3}\,r + \frac{4}{9}\,(1-4^{-r}).$$

Принимая во внимание, что $2r = \log_2(3N_{(r)}+1)$, можем записать, что при $N = N_{(r)}$ для сетки $\{p\,(0),\,\ldots,\,p(N-1)\}$

$$\int_0^1 |S_N(x)-Nx|\,dx = \frac{1}{6}\log_2(3N+1)+\frac{4}{9}\left(1-\frac{1}{3N+1}\right). \tag{2.46}$$

Из равенств (2.46) и (2.36) вытекает, что погрешность R квадратурной формулы (2.31) с узлами $\{p\,(0),\,\ldots$ $\ldots,p\,(N-1)\}$ на классе функций $H_1\,(L)$ имеет при $N = N_{(r)}$ порядок $(\log N)/N$. Так как для таких сеток $\psi_\infty = 1/N$, то тем самым доказано, что в оценке (2.30) отбросить «лишний» $\log N$ нельзя: порядок этой оценки (в случае $\alpha = 1$) точный, если речь идет обо всех квадратурных формулах с $\psi_\infty = 1/N$.

В заключение приведем без доказательства еще одну теорему, которая легко выводится из соответствующей теоремы статьи [109] относительно сетки $\{p\,(1),\,\ldots,\,p\,(N)\}$.

Теорема 11. *Для сетки, состоящей из точек* $\{p\,(0),$ $p\,(1),\,\ldots,\,p\,(N-1)\}$, *при любом* N

$$|S_N(x)-Nx| \leqslant \frac{1}{3}\log_2 N + O(1), \tag{2.47}$$

причем значение $1/3$ *не может быть улучшено.*

Глава 3

Приложения функций Хаара к теории равномерного распределения

Понятие равномерного распределения (по модулю 1) было введено Г. Вейлем [80]. Как пишет Й. Коксма [78], «теория асимптотического распределения (по модулю 1), уходящая своими корнями в исследования Кронекера о поведении дробных долей линейных форм с целочисленными переменными, более или менее прямо возникла из работ Боля о вековых возмущениях, Серпинского об иррациональных числах, Бореля и Ф. Бернштейна о вероятностях и Харди — Литлвуда о диофантовых приближениях и рядах Фурье».

Современные реферативные журналы относят теорию равномерно распределенных (или, более общо, асимптотически распределенных) последовательностей к теории чисел. Однако в наши университетские курсы теории чисел этот вопрос, как правило, не входит. В настоящую книгу он включен из-за своей важности для прикладной математики: равномерно распределенные последовательности могут быть с успехом использованы для приближенного вычисления интегралов. Более того, для некоторых классов подинтегральных функций такой способ вычисления интегралов оказывается в некотором смысле наилучшим.

В настоящей главе для одномерного случая изложены основные понятия теории равномерно распределенных последовательностей и некоторые новые результаты, полученные благодаря применению в этой области функций Хаара или, точнее, благодаря применению «неравномерности» φ_∞, введенной в предыдущей главе.

Во второй части книги приведены оригинальные результаты, относящиеся к теории равномерного распределения в многомерном случае. При этом известные теоремы не повторяются: они представляют собой естественное обобщение теорем настоящей главы.

Различные обобщения равномерно распределенных последовательностей (в том числе вполне равномерно распределенные последовательности, представляющие, по нашему мнению, особенный интерес для прикладной математики *)) здесь не рассматриваются. С ними можно познакомиться по работам [59, 65, 71, 77, 78]. Список этот не претендует на полноту: здесь указаны только некоторые работы, преимущественно обзорного характера.

§ 1. Равномерно распределенные последовательности

Определение. Рассмотрим произвольную последовательность точек $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, принадлежащих отрезку $[0, 1]$. Пусть $l \subseteq [0, 1]$ — какой-нибудь отрезок, причем (для определенности) будем считать его замкнутым слева и открытым справа, если правый конец отличен от 1; если правый конец равен, 1, то будем считать, что l замкнут также справа.

Выделим начальный участок последовательности $x_0, \ldots$ $\ldots, x_{N-1}$ и через $S_N(l)$ обозначим число точек этого участка, принадлежащих l:

$$S_N(l) = \sum_{\left\{\substack{x_i \in l \\ 0 \leqslant i \leqslant N-1}\right\}} 1.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *равномерно распределенной на отрезке* $[0, 1]$, если для любого $l \subseteq [0, 1]$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{S_N(l)}{N} = |l|. \tag{3.1}$$

*) Понятие вполне равномерного распределения (в. р. р.) было введено Н. М. Коробовым [61], см. также [62, 65, 68]. В. р. р. последовательности могут быть использованы вместо псевдослучайных чисел при решении методом Монте-Карло очень многих задач [64, 66, 69, 74]. По-видимому, практическому применению в. р. р. последовательностей препятствует то, что пока не построены «достаточно хорошие» последовательности: с простым алгоритмом расчета и с быстро убывающими отклонениями.

Для краткости вместо слов «последовательность $\{x_n\}$ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$» будем писать «$\{x_n\}$ р. р.».

Геометрический смысл этого определения достаточно очевиден: при больших N число точек $S_N(l) \sim N|l|$, то есть пропорционально длине $|l|$.

Легко видеть, что в определении (3.1) можно заменить полуоткрытые отрезки открытыми или замкнутыми. Например, для любого замкнутого отрезка $\bar{l} \subset [0, 1]$ можно найти такие полуоткрытые l_1 и l_2, что $l_1 \subset \bar{l} \subset l_2$ и при этом $|l_2 - \bar{l}| < \varepsilon/4$, $|\bar{l} - l_1| < \varepsilon/4$. Затем можно выбрать N_0 (зависящее от l_1, l_2 и ε) так, чтобы при всех $N \geqslant N_0$ и $j = 1, 2$

$$|l_j|\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \frac{S_N(l_j)}{N} \leqslant |l_j|\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

При тех же N

$$\frac{S_N(\bar{l})}{N} \leqslant \frac{S_N(l_2)}{N} \leqslant |l_2|\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \left(|\bar{l}| + \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant \leqslant |\bar{l}| + \varepsilon$$

и точно так же

$$\frac{S_N(\bar{l})}{N} \geqslant \frac{S_N(l_1)}{N} \geqslant |l_1|\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant \left(|\bar{l}| - \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \geqslant \geqslant |\bar{l}| - \varepsilon.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\lim_{N\to\infty} [S_N(\bar{l})/N] = |\bar{l}|.$$

Лемма 1. *Для того чтобы $\{x_n\}$ была р. р., необходимо и достаточно, чтобы соотношение* (3.1) *выполнялось для всех двоичных отрезков l_{mj}.*

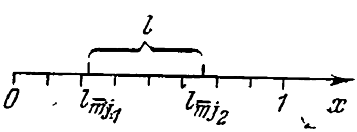

Рис. 3.1.

Необходимость этого требования очевидна. Переходя к доказательству достаточности, выберем произвольный отрезок $l \subset [0, 1]$. Если задано $\varepsilon > 0$, то можно выбрать столь большое $m = \bar{m}$, чтобы (рис. 3.1)

$$\bigcup_{j=j_1+1}^{j_2-1} l_{\overline{m}j} \subseteq l \subseteq \bigcup_{j=j_1}^{j_2} l_{\overline{m}j}$$

и при этом $|l_{\overline{m}j}| \leqslant \varepsilon/4$. Очевидно,

$$\sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} S_N(l_{\overline{m}j}) \leqslant S_N(l) \leqslant \sum_{j=j_1}^{j_2} S_N(l_{\overline{m}j}), \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} |l_{\overline{m}j}| - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant |l| \leqslant \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} |l_{\overline{m}j}| + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Можно выбрать N_0 так, чтобы при всех $N \geqslant N_0$ для всех $j_1 \leqslant j \leqslant j_2$

$$\left| \frac{S_N(l_{\overline{m}j})}{N} - |l_{\overline{m}j}| \right| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{j_2 - j_1 + 1}.$$

Тогда, вычитая (3.3) из (3.2), поделенного на N, получим, что

$$-\sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} \left| \frac{S_N(l_{\overline{m}j})}{N} - |l_{\overline{m}j}| \right| - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{S_N(l)}{N} - |l| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=j_1}^{j_2} \left| \frac{S_N(l_{\overline{m}j})}{N} - |l_{\overline{m}j}| \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда следует, что при $N \geqslant N_0$

$$-\varepsilon < \frac{S_N(l)}{N} - |l| < \varepsilon,$$

и, таким образом, лемма доказана.

Лемма эта допускает значительные обобщения. Пусть, например, задано произвольное всюду плотное на $[0,1]$ множество, состоящее из точек ξ. Для того чтобы $\{x_n\}$ была р. р., достаточно потребовать, чтобы соотношение (3.1) выполнялось для всех отрезков вида $[0, \xi)$.

Теорема Вейля. Докажем теперь следующую замечательную теорему, из которой видно, что р. р. последовательности можно использовать для вычисления определенных интегралов от очень широкого класса функций.

Теорема 1 [80]. *Если $\{x_n\}$ р.р., то для любой интегрируемой по Риману *) функции $f(x)$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) = \int_0^1 f(x)\,dx; \qquad (3.4)$$

если соотношение (3.4) справедливо для любой интегрируемой по Риману функции $f(x)$, то $\{x_n\}$ р. р.

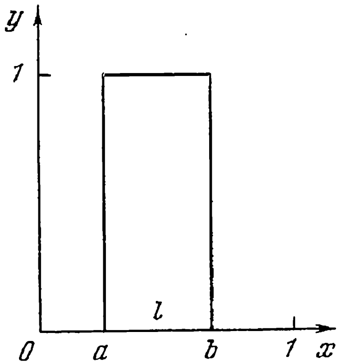

Рис. 3.2.

Доказательство. 1. Предположим, что $\{x_n\}$ р. р. Рассмотрим характеристическую функцию $h_l(x)$ произвольного отрезка l (рис. 3.2):

$$h_l(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in l, \\ 0 & \text{при } x \notin l. \end{cases}$$

Так как $\sum_{i=0}^{N-1} h_l(x_i) = S_N(l)$ и $\int_0^1 h_l(x)\,dx = |l|$, то (3.4) при $f = h_l(x)$ совпадает с (3.1). Значит, для любой функции вида $h_l(x)$ (3.4) выполняется.

Далее, (3.4) будет справедливо также для любой функции $g(x)$, постоянной на отрезках l_{mj}, так как если $g(x) \equiv g_j$ при $x \in l_{mj}$, то $g(x) = \sum_{j=1}^{2^m-1} g_j h_{l_{mj}}(x)$ и

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i) = \sum_{j=1}^{2^m-1} g_j \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} h_{l_{mj}}(x_i) =$$

$$= \sum_{j=1}^{2^m-1} g_j |l_{mj}| = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная интегрируемая по Риману функция. Воспользуемся хорошо известной в ана-

*) В определение интегрируемости входит также требование ограниченности $f(x)$.

лизе конструкцией так называемых сумм Дарбу. Для этого разобьем отрезок [0, 1] на сумму отрезков l_{mj}, $1 \leqslant j \leqslant 2^{m-1}$. Пусть g_{mj} и G_{mj} (соответственно) — верхняя и нижняя грани функции $f(x)$ на $\left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}}\right]$. Введем нижнюю и верхнюю функции: при $x \in l_{mj}$

$$g_m(x) \equiv g_{mj}, \quad G_m(x) \equiv G_{mj}.$$

По известному свойству интегральных сумм, когда $m \to \infty$,

$$\int_0^1 g_m(x)\,dx = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} g_{mj}\,|l_{mj}| \to \int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$\int_0^1 G_m(x)\,dx = \sum_{j=1}^{2^{m-1}} G_{mj}\,|l_{mj}| \to \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Значит, если задано произвольное число $\varepsilon > 0$, то можно выбрать m столь большим, чтобы

$$\int_0^1 G_m(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 g_m(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.5)$$

По построению $g_m(x) \leqslant f(x) \leqslant G_m(x)$ и, следовательно,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} g_m(x_i) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} G_m(x_i).$$

Далее, для кусочно постоянных функций $g_m(x)$ и $G_m(x)$ соотношение (3.4) уже доказано. Поэтому при всех достаточно больших значениях N будут справедливы неравенства

$$\int_0^1 g_m(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \leqslant \int_0^1 G_m(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (3.6)$$

Наконец, вычитая (3.6) из (3.5), получим, что

$$-\varepsilon \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \leqslant \varepsilon,$$

и тем самым соотношение (3.4) доказано для функции $f(x)$.

2. Осталось доказать второе утверждение теоремы. Однако легко видеть, что имеет место гораздо более сильное утверждение: если соотношение (3.4) справедливо для характеристических функций $h_{l_{mj}}(x)$ всех двоичных отрезков l_{mj}, то последовательность $\{x_n\}$ р. р. В самом деле, полагая в (3.4) $f = h_{l_{mj}}(x)$, получим равенство (3.1) для $l = l_{mj}$. Отсюда по лемме 1 следует, что $\{x_n\}$ р.р.

Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

Легко показать, что теорема 1 не распространяется на функции, интегрируемые по Лебегу. Например, функция Дирихле $\psi(x)$, которая равна 1 в рациональных точках и равна 0 в иррациональных точках, интегрируема по Лебегу (но не по Риману) и $\int\limits_0^1 \psi(x)\,dx = 0$. Однако если выбрать р. р. последовательность $\{x_n\}$, состоящую только из рациональных точек (такие последовательности будут указаны ниже), то $(1/N)\sum\limits_{i=0}^{N-1}\psi(x_i) = 1$ при любом N.

Дробные доли линейной функции. Рассмотрим следующий классический пример р. р. последовательности (Г. Вейль, В. Серпинский). Пусть α — любое действительное число, а θ — любое иррациональное число. Последовательность дробных долей $x_n = \{\alpha + n\theta\}$ р. р.*).

Доказательство этого утверждения удобно провести с помощью так называемого критерия Вейля, который очень часто используется в аналитической теории чисел.

Критерий Вейля. *Для того чтобы $\{x_n\}$ была р. р., необходимо и достаточно, чтобы при каждом целом k, отличном от нуля,*

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} = o(N). \tag{3.7}$$

---

*) *Целой частью* числа x называется наибольшее целое число $\text{Ц}(x)$, не превосходящее x. По определению *дробная доля* $\{x\}$ числа x — это разность $\{x\} = x - \text{Ц}(x)$.

Очевидно, всегда $x - 1 < \text{Ц}(x) \leqslant x < \text{Ц}(x) + 1$, $0 \leqslant \{x\} < 1$.

(Условие (3.7) записано в комплексной форме. Оно равносильно двум действительным условиям:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\cos 2\pi k x_n=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sin 2\pi k x_n=0.)$$

Допустим, что критерий (3.7) уже доказан, и рассмотрим последовательность чисел $x_n=\{\alpha+n\theta\}$. Так как функция $\exp(2\pi i k x)$ имеет период 1, то

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i k\{\alpha+n\theta\}}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i k(\alpha+n\theta)}=e^{2\pi i k\alpha}\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i k\theta n}.$$

Последняя сумма представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $\exp(2\pi i k\theta)$ и легко вычисляется:

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i k\theta n}=\frac{e^{2\pi i k\theta N}-1}{e^{2\pi i k\theta}-1}.$$

Нетрудно также вычислить, что

$$\left|\frac{e^{2\pi i k\theta N}-1}{e^{2\pi i k\theta}-1}\right|=\left|\frac{\sin\pi k\theta N}{\sin\pi k\theta}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin\pi k\theta|}.$$

Значит,

$$\frac{1}{N}\left|\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i k\{\alpha+n\theta\}}\right|\leqslant\frac{1}{N|\sin\pi k\theta|}\to 0,$$

когда $N\to\infty$. Иррациональность θ гарантирует нам, что $|\sin\pi k\theta|\neq 0$ при каждом целом $k\neq 0$.

Доказательство критерия Вейля. Если $\{x_n\}$ р. р., то тогда справедливо соотношение (3.4), которое при $f=\exp(2\pi i\,kx)$, $k\neq 0$, обращается в (3.7).

Сложнее доказать, что из (3.7) следует равномерность распределения $\{x_n\}$. Идея доказательства такова. Рассмотрим характеристическую функцию $h_l(x)$ произвольного отрезка $l=[a,b)$ (рис. 3.2) и разложим ее в ряд Фурье по тригонометрическим функциям:

$$h_l(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{2\pi i k x}. \tag{3.8}$$

Так как $S_N(l) = \sum_{n=0}^{N-1} h_l(x_n)$, а $c_0 = \int_0^1 h_l(x)\,dx = |l|$, то из (3.8) следует, что

$$S_N(l) = N|l| + \sum_{k\neq 0} c_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n}. \tag{3.9}$$

Остается доказать, что сумма, стоящая в (3.9) справа, есть $o(N)$. К сожалению, ряд (3.8) сходится неабсолютно, и это затрудняет оценку последнего выражения. Поэтому выберем другой способ доказательства.

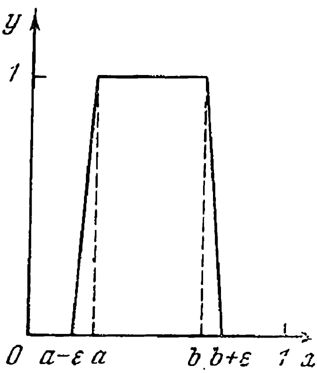

Рис. 3.3.

Доказательство обходным путем. Вместо функции $h_l(x)$ рассмотрим непрерывную функцию $h_\varepsilon(x)$ (рис. 3.3), ряд Фурье которой будет сходиться уже абсолютно:

$$h_\varepsilon(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k\varepsilon}\, e^{2\pi i k x},$$

где, как нетрудно вычислить,

$$c_{0\varepsilon} = \int_0^1 h_\varepsilon(x)\,dx = |l| + \varepsilon,$$

$$c_{k\varepsilon} = \int_0^1 h_\varepsilon(x)\, e^{2\pi i k x}\,dx = \frac{(1 - e^{-2\pi i k \varepsilon})\left[e^{-2\pi i k b} - e^{-2\pi i k (a-\varepsilon)}\right]}{4\pi^2 k^2 \varepsilon}.$$

Обозначим через $\overline{S}_\varepsilon(l)$ сумму

$$\overline{S}_\varepsilon(l) = \sum_{n=0}^{N-1} h_\varepsilon(x_n).$$

Повторяя рассуждения, приведшие нас от (3.8) к (3.9), получим

$$\overline{S}_\varepsilon(l) = N(|l| + \varepsilon) + \sum_{k\neq 0} c_{k\varepsilon} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n}.$$

Отсюда

$$\left| \frac{\overline{S}_\varepsilon(l)}{N} - |l| - \varepsilon \right| \leqslant \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{k\varepsilon}| \left| \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} \right|. \tag{3.10}$$

Пусть задано произвольное $\eta > 0$. Выберем k_0 столь большим, чтобы

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} |c_{k\varepsilon}| < \frac{1}{4}\eta.$$

Так как имеет место тривиальное неравенство $\left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n}\right| \leqslant N$, то, разбивая (3.10) на две части, получим

$$\left|\frac{\overline{S}_\varepsilon(l)}{N} - |l| - \varepsilon\right| < \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{k_0} |c_{k\varepsilon}| \times \left|\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n}\right| + \frac{1}{2}\eta.$$

В силу условия (3.7) можно выбрать N столь большим, чтобы первый член справа был тоже меньше $1/2\ \eta$.

Таким образом, мы доказали, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\overline{S}_\varepsilon(l)}{N} = |l| + \varepsilon.$$

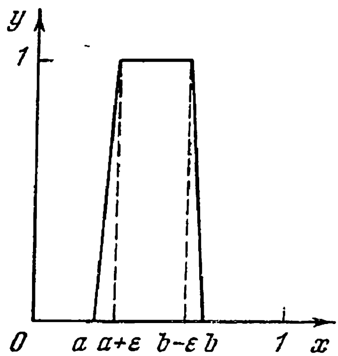

Рис. 3.4.

Введем теперь функцию $g_\varepsilon(x)$, изображенную на рис. 3.4. Это функция того же типа, что $h_\varepsilon(x)$, и если обозначить $\underline{S}_\varepsilon(l) = \sum_{n=0}^{N-1} g_\varepsilon(x_n)$, то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\underline{S}_\varepsilon(l)}{N} = |l| - \varepsilon.$$

Наконец, так как $\underline{S}_\varepsilon(l) \leqslant S_N(l) \leqslant \overline{S}_\varepsilon(l)$, то

$$|l| - \varepsilon \leqslant \varliminf_{N\to\infty} \frac{S_N(l)}{N} \leqslant \varlimsup_{N\to\infty} \frac{S_N(l)}{N} \leqslant |l| + \varepsilon.$$

И ввиду произвольности ε отсюда следует (3.1).

Исследованию распределения дробных долей линейных и нелинейных функций посвящено много работ. Библиография имеется в уже упоминавшихся обзорных работах [59, 65, 71, 77, 78]. Возможность использования n-мерных точек $P_0, P_1, \ldots, P_k, \ldots$ с координатами $P_k = (\{k\theta_1\}, \ldots, \{k\theta_n\})$, где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — независимые иррациональные числа, для вычисления n-мерных интегралов также исследовали многие авторы *).

Пример: двоично рациональные дроби. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$ двоично рациональных дробей в естественном порядке:

$$0;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{8},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8};\ \frac{1}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{5}{16},\ \frac{7}{16},\ldots$$

Иначе говоря, $x_0 = 0$, $x_k = (2j-1)\,2^{-m}$, где $k = 2^{m-1} + j - 1$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{m-1}$, $m=1, 2, \ldots$ Легко доказать, что последовательность эта не р. р. В самом деле, путь $l = [0, {}^1/_2)$ и $N = N_s = 2^s + 2^{s-1}$. Очевидно, в этом случае (рис. 3.5) $S_{N_s}(l) = 2\cdot 2^{s-1}$ и $S_{N_s}(l)/N_s = {}^2/_3$, в то время как $|l| = {}^1/_2$.

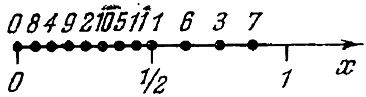

Рис. 3.5.

Однако если рассматривать значения $N = N_t = 2^t$ (то есть полные группы), то нетрудно доказать, что при любом l отношение $[S_{N_t}(l)/N_t] \to |l|$. Этот факт наводит на мысль, что можно переставить числа внутри каждой из групп так, чтобы эта последовательность стала р. р. Один из возможных способов такой перестановки — последовательность $\{p(i)\}$, рассмотренная в § 4 гл. 2. Другие способы такой перестановки и доказательство того, что последовательность $\{p(i)\}$ р. р., приведены ниже в § 3.

§ 2. Некоторые критерии равномерности распределения

Соотношения (3.1), (3.4), (3.7) позволяют установить факт равномерности распределения заданной последовательности, но не позволяют решить вопроса, какая из двух р. р. последовательностей «более равномерно» распределена. В настоящем параграфе рассмотрены критерии, дающие количественную оценку равномерности распределения.

*) В том числе И. И. Пятецкий-Шапиро, Н. С. Бахвалов, Н. М. Коробов, L. G. Peck, R. D. Richtmyer, C. B. Haselgrove, E. Hlawka, P. Davis, P. Rabinowitz.

Отклонение. Фиксируем произвольные точки $x_0, x_1, \ldots \ldots, x_{N-1}$ на отрезке $[0, 1]$, которые будем называть сеткой. Обозначим через $S_N(x)$ число точек сетки, принадлежащих отрезку $[0, x)$ (иначе говоря, $S_N(x) = S_N(l)$, когда $l = [0, x)$).

Отклонением сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ назовем величину

$$D(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_N(x) - Nx|. \qquad (3.11)$$

Иногда для краткости вместо $D(x_0, \ldots, x_{N-1})$ будем писать D_N.

Необходимо отметить, что в литературе встречаются различные, не тождественные определения отклонения (discrepancy, Diskrepanz). Часто отклонением называют отношение D_N/N. Некоторые авторы рассматривают $\sup\limits_{l \subseteq [0,1]} |S_N(l) - N\,|l||$. Об отклонении в многомерном случае, помимо вышеуказанных обзорных работ, см. также [73, 75, 76].

Геометрический смысл отклонения довольно прозрачен: Nx — это количество точек сетки, приходящихся на отрезок $[0, x)$ при «пропорциональном» (равномерном) распределении, а $S_N(x)$ — количество точек сетки, фактически принадлежащих $[0, x)$. Таким образом, D_N в каком-то смысле характеризует отклонение расположения точек сетки от «равномерного».

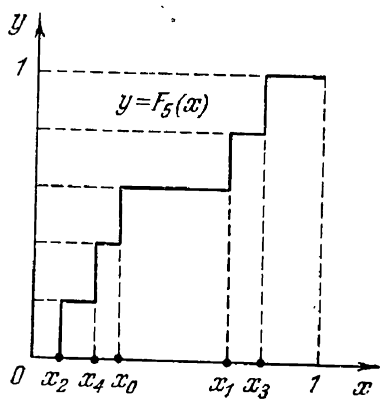

Рис. 3.6.

Функция $S_N(x)$ представляет собой ступенчатую неубывающую функцию со скачками, равными 1 в каждой точке сетки, если все эти точки различные; если k точек совпадают, то при соответствующем значении x_i скачок будет равен k. В точках разрыва функция $S_N(x)$ непрерывна слева (при нашем определении $S_N(l)$).

Через $F_N(x)$ обозначим отношение $F_N(x) = S_N(x)/N$. Эта функция (рис. 3.6, где $N = 5$) также ступенчатая, неубывающая, $F_N(0) = 0$, $F_N(1) = 1$. Скачки $F_N(x)$ в однократных точках сетки равны $1/N$*).

Лемма 2 ([80]). *Для того чтобы $\{x_n\}$ была р. р., необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $\{F_N(x)\}$ при $N \to \infty$ сходилась к x равномерно на отрезке* $[0, 1]$.

Доказательство достаточности тривиально, так как если $\{F_N(x)\}$ сходится равномерно к x, то при каждом x существует $\lim\limits_{N\to\infty} F_N(x) = x$. И если $l = [a, b)$, то

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N(l)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{S_N(b) - S_N(a)}{N} = b - a = |l|.$$

Доказательство необходимости. Предположим теперь, что $\{x_n\}$ р. р. Тогда $\{F_n(x)\} \to x$ в каждой точке x. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и разделим $[0, 1]$ на конечное число отрезков, длина каждого из которых меньше $\varepsilon/2$. Обозначим точки деления через ξ_j. Затем выберем N_0 столь большим, чтобы при всех $N \geqslant N_0$ во всех точках $x = \xi_j$

$$|F_N(\xi_j) - \xi_j| < \varepsilon/2. \tag{3.12}$$

Рассмотрим теперь произвольную точку x. Пусть $x \in [\xi_k, \xi_{k+1})$. Так как все $F_N(x)$ монотонны, то $F_N(\xi_k) \leqslant F_N(x) \leqslant F_N(\xi_{k+1})$ и в силу (3.12)

$$\xi_k - \varepsilon/2 \leqslant F_N(x) \leqslant \xi_{k+1} + \varepsilon/2.$$

Вычитая x из всех членов этого неравенства, получим, что

$$-(x - \xi_k) - \varepsilon/2 \leqslant F_N(x) - x \leqslant (\xi_{k+1} - x) + \varepsilon/2,$$

откуда сразу видно, что $-\varepsilon \leqslant F_N(x) - x \leqslant \varepsilon$. Тем самым лемма доказана.

---

*) В теории вероятностей функция $F_N(x)$ называется эмпирической функцией распределения выборки $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы $\{x_n\}$ была р. р., необходимо и достаточно, чтобы*

$$D(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) = o(N). \tag{3.13}$$

Эта теорема есть непосредственное следствие леммы 2, так как равномерная сходимость $\{F_N(x)\}$ к x равносильна требованию $D_N/N = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |F_N(x) - x| \to 0$.

Некоторые свойства отклонения. Следующие две простые леммы, вытекающие непосредственно из определения (3.11), позволяют лучше понять характер отклонения. Пусть задана сетка $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$.

Л е м м а 3. *Верхняя грань $|S_N(x) - Nx|$ не может достигаться в точке непрерывности $S_N(x)$.*

Эта лемма есть частный случай леммы 1 из гл. 2, соответствующий квадратурной формуле (2.1) с равными весами, когда $F_N(x) = S_N(x)/N$.

Из леммы 3 следует, что

$$D_N = \max_{0 \leqslant i \leqslant N-1} \{ |S_N(x_i - 0) - Nx_i|; |S_N(x_i + 0) - Nx_i| \}. \tag{3.14}$$

Иначе говоря, для вычисления D_N достаточно просмотреть $2N$ чисел $|S_N(x_i \pm 0) - Nx_i|$ и выбрать наибольшее среди них.

Л е м м а 4. *Для любой сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$*

$$1/2 \leqslant D(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \leqslant N. \tag{3.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху тривиальна, так как и $S_N(x)$ и Nx в (3.11) не превосходят N. В то же время оценка эта точная: равенство $D_N = N$ имеет место в случае сетки, состоящей из точек $x_0 = x_1 = \ldots = x_{N-1} = 0$.

Чтобы доказать оценку снизу, рассмотрим два случая произвольной сетки.

1-й случай: среди отрезков $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right)$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, найдется такой, которому не принадлежит ни одна точка сетки. Тогда на этом отрезке $S_N(x) \equiv k$ и

$$D_N \geqslant \sup_{i \leqslant Nx \leqslant i+1} |k - Nx| = \max\{ |k - i|; |k - i - 1| \} \geqslant 1.$$

2-й случай: в каждом из отрезков $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right)$ лежит одна точка сетки. Пусть это будет точка x_i (можно перенумеровать точки сетки в порядке возрастания). Тогда $S_N(x) \equiv i$ при $i/N \leqslant x \leqslant x_i$ и $S_N(x) \equiv i+1$ при $x_i < x \leqslant (i+1)/N$ (рис. 3.7, где $N=4$, $i=2$). Поэтому $D_N \geqslant \max\{|i - Nx_i|; |i+1-Nx_i|\}$, и если $Nx_i \neq i + {}^1/_2$, то $D_N > {}^1/_2$.

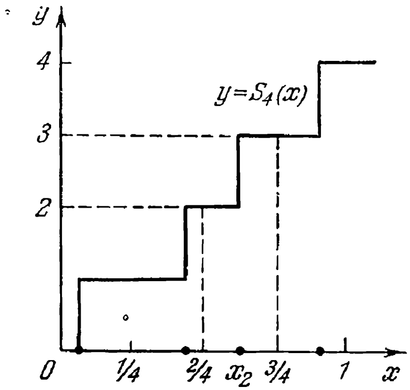

Рис. 3.7.

Единственная сетка, для которой $D_N = {}^1/_2$,— это равномерная сетка, состоящая из точек $x_i = (i + {}^1/_2)/N$.

Заметим, что оценка (3.15) снизу есть следствие теоремы 2′ из гл. 2.

Неравномерность. В предыдущей главе для оценки «качества» произвольной сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ на [0, 1] мы ввели функции

$$\varphi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \sup_{1 \leqslant m < \infty} \left\{ \sum_{j=1}^{2^m-1} |S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-)|^q \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.16}$$

где параметр $1 < q \leqslant \infty$. Простейшую среди этих функций

$$\varphi_\infty(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \sup_{2 \leqslant k < \infty} |S_N(l_k^+) - S_N(l_k^-)| \tag{3.17}$$

мы назвали *неравномерностью* сетки $\{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$.

Естественно ожидать, что асимптотика $\varphi_q(x_0, \ldots, x_{N-1})$ при $N \to \infty$ должна быть связана с равномерностью (или неравномерностью) распределения последовательности $\{x_n\}$.

Теорема 3 ([57]). *Если $\{x_n\}$ р. р., то при всех $1 < q \leqslant \infty$*

$$\varphi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}) = o(N); \tag{3.18}$$

если (3.18) справедливо при каком-либо q, то $\{x_n\}$ р. р.

Доказательство первого утверждения. Значение $q \in (1, \infty]$ будем считать фиксированным. Выберем $\bar{m}$ столь большим, чтобы двоичные отрезки $l_{\bar{m}j}$ были достаточно малыми:

$$|l_{\bar{m}j}| < \frac{1}{2}\varepsilon^{\frac{q}{q-1}}.$$

Затем выберем N_0 (зависящее от $\bar{m}$ и от ε) так, чтобы при всех $N \geqslant N_0$ для всех l_{mj} с $m \leqslant \bar{m}$ выполнялись неравенства

$$N\,|l_{mj}|\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant S_N(l_{mj}) \leqslant N\,|l_{mj}|\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad (3.19)$$

(это можно сделать, так как число таких l_{mj} конечно).

Пусть $m < \bar{m}$. Тогда из (3.19) следует, что

$$|S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-)| = |S_N(l_{m+1,\,2j}) - S_N(l_{m+1,\,2j-1})| \leqslant$$
$$\leqslant N\varepsilon\,|l_{m+1,\,j'}| < N\varepsilon\,|l_{mj}|$$

и

$$\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-)|^q\right\}^{1/q} < N\varepsilon\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |l_{mj}|^q\right\}^{1/q} \leqslant N\varepsilon.$$

Пусть теперь $m \geqslant \bar{m}$. Тогда каждый из отрезков l_{mj} принадлежит одному из отрезков $l_{\bar{m}j}$, так что

$$S_N(l_{mj}) \leqslant S_N(l_{\bar{m}j'}) \leqslant N\,|l_{\bar{m}j'}|\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \leqslant N\varepsilon^{\frac{q}{q-1}}.$$

В этом случае

$$\left\{\sum_j |S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-)|^q\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\sum_j [S_N(l_{mj})]^q\right\}^{1/q} =$$
$$= \left\{\sum_j [S_N(l_{mj})]^{q-1} S_N(l_{mj})\right\}^{1/q} \leqslant \left\{N^{q-1}\varepsilon^q \sum_j S_N(l_{mj})\right\}^{1/q} = N\varepsilon.$$

Таким образом, при любых m и при всех $N \geqslant N_0$

$$\left\{\sum_{j=1}^{2^{m-1}} |S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-)|^q\right\}^{1/q} \leqslant \varepsilon N.$$

Из (3.16) вытекает, что $\varphi_q(x_0, \ldots, x_{N-1}) \leqslant \varepsilon N$, а это равносильно (3.18).

Доказательство второго утверждения. Если $\varphi_q = o(N)$ при каком-либо q, то из неравенства (2.35) следует, что $\varphi_\infty = o(N)$, и поэтому при любых m и j

$$S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-) = o(N). \tag{3.20}$$

Пусть $m = 1$. Из (3.20) видно, что

$$S_N(l_{11}^+) - S_N(l_{11}^-) = o(N). \tag{3.21}$$

В то же время, так как $l_{11}^- \cup l_{11}^+ = l_{11} = [0, 1]$, то

$$S_N(l_{11}^+) + S_N(l_{11}^-) = N. \tag{3.22}$$

Из (3.21) и (3.22) вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N(l_{11}^+)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{S_N(l_{11}^-)}{N} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, требование (3.1) справедливо для отрезков l_{11}^+ и l_{11}^- или, что то же, для всех l_{2j}.

Пусть теперь $m = 2$. Из (3.20) видно, что (при любом фиксированном j)

$$S_N(l_{2j}^+) - S_N(l_{2j}^-) = o(N), \tag{3.23}$$

а так как $l_{2j}^- \cup l_{2j}^+ = l_{2j}$, то по уже доказанному

$$\frac{1}{N}[S_N(l_{2j}^+) + S_N(l_{2j}^-)] \to \frac{1}{2}. \tag{3.24}$$

Из (3.23) и (3.24) вытекает, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N(l_{2j}^+)}{N} = \lim_{N\to\infty} \frac{S_N(l_{2j}^-)}{N} = \frac{1}{4},$$

и тем самым (3.1) справедливо для всех l_{3j}.

Возможность продолжения такого доказательства по индукции очевидна. При этом соотношение (3.1) будет доказано для всех l_{mj}. Тогда по лемме 1 последовательность $\{x_n\}$ окажется р. р.

Следствие из теоремы 3. Если для последовательности $\{x_n\}$ значение $\varphi_q = o(N)$ при каком-то q, то $\varphi_q = o(N)$ при всех $q \in (1, \infty]$ (ибо в этом случае $\{x_n\}$ р.р.).

Известно, что критерий Вейля (3.7) остается в силе при замене тригонометрической системы $\{e^{2\pi i l x}\}$ другими полными ортогональными системами. Выбрав систему Хаара $\{\chi_{mj}(x)\}$, получим вместо (3.7) соотношения

$$\sum_{n=0}^{N-1} \chi_{mj}(x_n) = o(N).$$

Но сумма слева равна $2^{\frac{m-1}{2}} [S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-)]$; значит, для того чтобы $\{x_n\}$ была р. р., необходимо и достаточно, чтобы для каждого двоичного отрезка l_{mj}

$$S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-) = o(N).$$

Конечно, этот критерий, так же как и (3.7), не дает нам количественной оценки равномерности распределения.

Отклонение D и неравномерность φ_∞. Равномерность распределения последовательности $\{x_n\}$ зависит лишь от поведения членов этой последовательности при $n \to \infty$. Легко показать, что если среди точек последовательности $\{x_n\}$ изменить (или добавить, или выкинуть) любое конечное число любых точек, то равномерность распределения от этого не изменится.

Однако с точки зрения приложения к вычислению определенных интегралов такая процедура может сильно изменить последовательность. Если 10^6 начальных точек последовательности $\{x_n\}$ «плохие», то очевидно, что рассчитывать на хорошую точность формулы

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i) \approx \int_0^1 f(x)\,dx \tag{3.25}$$

можно только при $N > 10^6$.

Характеристики $D(x_0, \ldots, x_{N-1})$ и $\varphi_\infty(x_0, \ldots, x_{N-1})$ позволяют оценить «качество» любого начального участка последовательности $\{x_n\}$. Кроме того, по асимптотике D и φ_∞ при $N \to \infty$ можно классифицировать р.р. последовательности: чем медленнее растут эти характеристики, тем лучше последовательность (и тем лучше будет оценка погрешности формулы (3.25) на некоторых классах функций — см. гл. 2).

Отклонение D — это классическая характеристика р. р. последовательностей. Она была введена, по-видимому, Й. Г. ван дер Корпутом, хотя лемма 2 показывает, что уже Г. Вейль фактически использовал это понятие. Величины φ_q — гораздо более новые. Они были введены лишь в 1957 году в связи с возникновением метода рядов Хаара в теории многомерных квадратур.

Характеристика D представляется нам более простой, чем φ_∞ (ср. (3.11) с (3.17)), и вычислять D (с учетом (3.14)) проще, чем вычислять φ_∞ (с учетом леммы 3 из гл. 2). Однако φ_∞ имеет и свои преимущества, связанные с тем, что она «грубее», чем D.

Во-первых, D может принимать любые действительные значения, в то время как φ_∞ принимает лишь целочисленные значения.

Во-вторых, грубость φ_∞ дает больше возможностей для оптимизации. В самом деле, существует единственная сетка $x_0, \ldots, x_{N-1}$, для которой $D(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \min$, но можно указать сколько угодно сеток, для которых $\varphi_\infty(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \min$. Далее, можно построить бесконечные последовательности точек $\{x_n\}$, для которых $\varphi_\infty \equiv \min$ (при каждом N). Одной из таких последовательностей является $\{p(i)\}$. В следующем параграфе будет указан целый класс таких последовательностей. И все они могут рассматриваться как наилучшие р. р. последовательности (с точки зрения критерия неравномерности φ_∞).

В то же время очевидно, что невозможно построить последовательность $\{x_n\}$ так, чтобы $D(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \min$ при любом N (ибо если $D(x_0, \ldots, x_{N-1}) = 1/2$, то при любом выборе x_N значение $D(x_0, \ldots, x_{N-1}, x_N) > 1/2$). Более того, невозможно построить последовательность $\{x_n\}$ такую, чтобы $D(x_0, \ldots, x_{N-1}) \leqslant \text{const}$ при всех N.

Еще Й. Г. ван дер Корпут [72] высказал предположение о том, что для любой последовательности $\{x_n\}$

$$\limsup_{N\to\infty} D(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \infty,$$

Эту трудную теорему доказала Т. ван Аарденне-Эренфест [70]. Позднее К. Ф. Рот [79] уточнил, что, какова бы ни была $\{x_n\}$, можно указать $\{N_k\} \to \infty$ так, что при $N = N_k$ отклонения $D(x_0, x_1, \ldots, x_{N_{k-1}}) \geqslant \geqslant c\sqrt{\ln N_k}$, где c — абсолютная постоянная. Вполне возможно, что эта оценка допускает усиление, но не более чем $D(x_0, x_1, \ldots, x_{N_k-1}) \geqslant c_1 \ln N_k$.

Таким образом, в любой р.р. последовательности неизбежны неравномерности (*irregularities*), если в качестве меры равномерности выбрать D. Если же оценивать равномерность при помощи φ_∞, то такие неравномерности не обязательны.

Связь между φ_∞ и D в одну сторону довольно легко устанавливается. Для любого отрезка $l = [a, b)$ и любой сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$

$$S_N(l) - N|l|| = |[S_N(b) - Nb] - [S_N(a) - Na]| \leqslant 2D_N.$$

Поэтому $S_N(l_{mj}^+) = N|l_{mj}^+| + \eta^+$, $S_N(l_{mj}^-) = N|l_{mj}^-| + \eta^-$, где $|\eta^+| \leqslant 2D_N$, $|\eta^-| \leqslant 2D_N$. Отсюда сразу вытекает, что $|S_N(l_{mj}^+) - S_N(l_{mj}^-)| \leqslant 4D_N$. И согласно (3.17)

$$\varphi_\infty(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \leqslant 4D(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}).$$

Другие характеристики равномерности распределения. В качестве меры «неравномерности» сетки $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$ можно выбрать любой из интегралов

$$I^{(q)}(x_0, \ldots, x_{N-1}) = \left\{\int_0^1 |S_N(x) - Nx|^q\, dx\right\}^{1/q}, \quad (3.26)$$

где $q > 0$. Иногда для краткости вместо $I^{(q)}(x_0, \ldots, x_{N-1})$ будем писать $I_N^{(q)}$. Естественно назвать $I_N^{(q)}$ *интегральными отклонениями* сетки. Такие интегралы уже встречались нам в § 4 гл. 2.

Теорема 4. *Если $\{x_n\}$ р.р., то при всех $q > 0$*

$$I^{(q)}(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) = o(N); \quad (3.27)$$

если (3.27) справедливо при каком-либо $q > 0$, то $\{x_n\}$ р.р.

Доказательство первого утверждения очевидно, так как из равенства (3.26) следует, что $I^{(q)}(x_0, \ldots, x_{N-1}) \leqslant D(x_0, \ldots, x_{N-1})$.

Для доказательства второго утверждения заметим, что (3.27) равносильно утверждению

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 |F_N(x) - x|^q \, dx = 0. \tag{3.28}$$

Мы докажем, что из (3.28) следует равномерная сходимость $\{F_N(x)\}$ к x на $[0, 1]$, и тогда (по лемме 2) $\{x_n\}$ будет р.р.

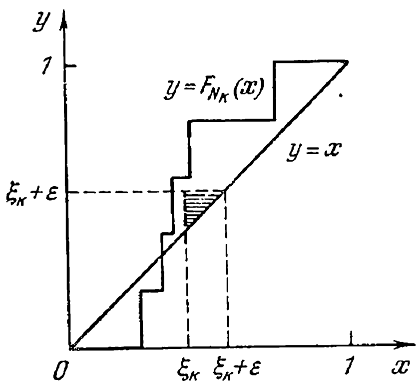

Рис. 3.8.

Доказательство проведем от противного — допустим, что можно указать такое $\varepsilon > 0$, такие $\{N_k\} \to \infty$ и такие точки $\{\xi_k\}$, что $|F_{N_k}(\xi_k) - \xi_k| \geqslant \varepsilon$. Предположим для определенности, что в точке ξ_k значение $F_{N_k}(\xi_k) \geqslant \xi_k + \varepsilon$. Так как функция $F_{N_k}(x)$ не убывает, то на отрезке $[\xi_k, \xi_k + \varepsilon]$ сохранится неравенство $F_{N_k}(x) \geqslant \xi_k + \varepsilon$ (рис. 3.8). Следовательно,

$$\int_0^1 |F_{N_k}(x) - x|^q \, dx \geqslant \int_{\xi_k}^{\xi_k+\varepsilon} (\xi_k + \varepsilon - x)^q \, dx = \frac{\varepsilon^{q+1}}{q+1},$$

что противоречит (3.28).

Следствие из теоремы 4. Если для последовательности $\{x_n\}$ значение $I_N^{(q)} = o(N)$ при каком-то $q > 0$, то $I_N^{(q)} = o(N)$ при всех $q > 0$ (ибо в этом случае $\{x_n\}$ р.р.).

Лемма 5. *Для любой сетки* $\{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$

$$2^{-1}(q+1)^{-1/q} \leqslant I^{(q)}(x_0, \ldots, x_{N-1}) \leqslant N. \tag{3.29}$$

Оценка сверху здесь тривиальна. Оценка снизу есть частный случай теоремы 2 гл. 2, соответствующий квадратурным формулам с равными весами, когда $F_N(x) = S_N(x)/N$.

Из леммы 2 гл. 2 следует, что $I_N^{(q)} \to D_N$, когда $q \to \infty$. При этом оценка (3.29) переходит в оценку (3.15).

Для «хороших» р.р. последовательностей (например, для ЛП$_0$-последовательностей из § 3) $D_N = O(\ln N)$ и все $I_N^{(q)} = O(\ln N)$. Существуют ли такие последовательности, для которых $D_N = o(\ln N)$ или хотя бы $I_N^{(q)} = o(\ln N)$, неизвестно. Скорее всего, что нет.

§ 3. ЛП$_0$-последовательности

Определения и основные свойства [67]. Сетку, состоящую из $N = 2^\nu$ точек, назовем П$_0$-*сеткой*, если каждому двоичному отрезку с длиной $1/N$ принадлежит одна точка сетки (рис. 3.9 для $N = 8$).

Последовательность $\{x_n\}$ назовем *ЛП$_0$-последовательностью*, если любой ее двоичный участок представляет собой П$_0$-сетку.

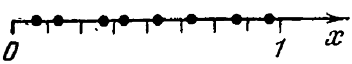

Рис. 3.9.

Двоичным участком последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ называется множество членов x_i с номерами i, удовлетворяющими неравенству вида $k2^s \leqslant i < (k+1)\,2^s$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$; $s = 1, 2, \ldots$

Например, участок $16 \leqslant i < 24$ двоичный ($k = 2$, $s = 3$), а участок $4 \leqslant i < 16$ двоичным не является.

Запишем условие $k2^s \leqslant i < (k+1)\,2^s$ в двоичной системе. Пусть $k = c_\mu c_{\mu-1} \ldots c_1 c_0$, где все c_j — двоичные цифры (то есть либо 0, либо 1). Тогда

$$k2^s = c_\mu c_{\mu-1} \ldots c_1 c_0 00 \ldots 0,$$

$$(k+1)\,2^s = c_\mu c_{\mu-1} \ldots c_1 c_0 \underbrace{00 \ldots 0}_{s \text{ нулей}} + 1\underbrace{00 \ldots 0}_{s \text{ нулей}}.$$

И наше условие означает, что число i в двоичной системе представимо в виде $i = c_\mu c_{\mu-1} \ldots c_1 c_0 e_s e_{s-1} \ldots e_1$, где цифры c_j фиксированы, а e_j — произвольные *).

Понятие Π_0-сетки настолько элементарно, что не заслуживало бы специального наименования, если бы не предполагалось обобщение на многомерный случай. Ясно, что Π_0-сетки представляют собой очень хорошие сетки (по равномерности распределения): для любой Π_0-сетки (с любым числом $N = 2^\nu$ точек) $\varphi_q = N^{1/q}$, а $D \leqslant 1$ (доказательство сходно с доказательством второго случая в лемме 4).

Напротив, $Л\Pi_0$-последовательности даже в одномерном случае представляют интерес, и то, что они относятся к числу наиболее равномерно распределенных последовательностей, не тривиально.

Т е о р е м а 5. *Для произвольного начального участка любой* $Л\Pi_0$-*последовательности* $\{x_n\}$ *при любом* $q \in (1, \infty]$

$$\varphi_q(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) = N^{1/q}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим начальный участок $0 \leqslant i < N$. Выберем произвольный двоичный отрезок l_{mj} так, что $|\overset{+}{l}_{mj}| = |\overset{-}{l}_{mj}| = 2^{-m}$. Выделим на нашем участке все двоичные участки с длиной 2^m:

$$0 \leqslant i < 2^m;\ 2^m \leqslant i < 2 \cdot 2^m;\ \ldots;$$
$$(k-1)2^m \leqslant i < k2^m;\ k2^m \leqslant i < N.$$

Каждый из первых k участков представляет собой Π_0-сетку, и поэтому отрезку $\overset{+}{l}_{mj}$ принадлежит одна точка из каждого участка. Последний, $(k+1)$-й участок представляет собой часть такой же Π_0-сетки ($k2^m \leqslant i < (k+1)2^m$), так что отрезку $\overset{+}{l}_{mj}$ принадлежит не более чем одна точка из этого участка. Значит, $k \leqslant S_N(\overset{+}{l}_{mj}) \leqslant k+1$.

Точно так же $k \leqslant S_N(\overset{-}{l}_{mj}) \leqslant k+1$, откуда следует, что $|S_N(\overset{+}{l}_{mj}) - S_N(\overset{-}{l}_{mj})| \leqslant 1$ и $\varphi_\infty = 1$.

---

*) В десятичной системе

$$k = c_\mu 2^\mu + c_{\mu-1} 2^{\mu-1} + \ldots + c_1 2 + c_0,$$

$$i = c_\mu 2^{s+\mu} + \ldots + c_0 2^s + e_s 2^{s-1} + e_{s-1} 2^{s-2} + \ldots + e_2 2 + e_1.$$

Наконец, из (2.32) и (2.33) вытекает, что при любом q имеет место равенство $\varphi_q = N^{1/q}$.

Теорема 6. *Для произвольного начального участка любой* ЛП$_0$-*последовательности* $\{x_n\}$

$$D(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \leqslant r,$$

где r — количество единиц в двоичной записи числа N.

Доказательство. Пусть $N = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_r}$, где $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_r \geqslant 0$. Выделим r двоичных участков последовательности:

$$0 \leqslant i < 2^{\nu_1};\ 2^{\nu_1} \leqslant i < 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2};\ \ldots;\ 2^{\nu_1} + \ldots + 2^{\nu_{r-1}} \leqslant i < N,$$

каждый из которых есть П$_0$-сетка (за исключением случая $\nu_r = 0$, когда последний участок содержит всего одну точку x_{N-1}). Для каждой из этих сеток отклонение D не превосходит единицы: $|S^{(j)}_{2^{\nu_j}}(x) - 2^{\nu_j}x| \leqslant 1$. И так как $S_N(x) = \sum_{j=1}^{r} S^{(j)}_{2^{\nu_j}}(x)$, а $N = \sum_{j=1}^{r} 2^{\nu_j}$, то

$$|S_N(x) - Nx| \leqslant \sum_{j=1}^{r} |S^{(j)}_{2^{\nu_j}}(x) - 2^{\nu_j}x| \leqslant r.$$

Следствие из теоремы 6. Для произвольного участка ЛП$_0$-последовательности $\{x_n\}$

$$D(x_0, \ldots, x_{N-1}) \leqslant \text{Ц}\,[\log_2(N+1)] \leqslant \log_2(N+1)$$

(ср. (2.45)).

Теорема 11 гл. 2 показывает, что для конкретной ЛП$_0$-последовательности $\{p(i)\}$ возможна более точная оценка отклонения (2.47). Впрочем, тот факт, что $\{p(i)\}$ есть ЛП$_0$-последовательность, пока еще не доказан; это сделано ниже, после доказательства теоремы 7.

Рассмотрим теперь способ построения ЛП$_0$-последовательностей.

Операция *. Для краткости условимся обозначать звездочкой (*) поразрядное сложение по модулю 2 в двоичной системе. Более подробно: для того чтобы вычислить «сумму» $a * b$, надо оба эти числа записать в двоичной системе и сложить цифры в соответствующих разрядах по правилам

$$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1, \quad 1 + 1 = 0 \quad (3.30)$$

(то есть без переноса единиц в старшие разряды). Например, $7/8 * 11/16 = 0{,}111 * 0{,}1011 = 0{,}0101 = 5/16$ *).

Легко видеть, что

$$a * b = b * a,$$
$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Следующий пример показывает, что дистрибутивность по отношению к обычному умножению не имеет места. Пусть в двоичной системе $a = 0{,}11$, $b = 0{,}10$, $c = 0{,}11$; тогда

$$(a * b)\,c = (0{,}11 * 0{,}10)\cdot 0{,}11 = 0{,}01\cdot 0{,}11 = 0{,}0011,$$
$$ac * bc = (0{,}11\cdot 0{,}11) * (0{,}10\cdot 0{,}11) = 0{,}1001 * 0{,}011 = 0{,}1111.$$

Однако если c — двоичная цифра (то есть либо 0, либо 1), то справедливо также соотношение

$$(a * b)\,c = ac * bc.$$

Так как $a * a = 0$, то очевидно, что линейное уравнение $a * x = b$ при любом $a \neq 0$ имеет единственное решение $x = b * a$.

Обозначим через R_m множество двоичных m-значных дробей x таких, что $0 \leqslant x < 1$. Если $a \in R_m$, то функция $y = a * x$ осуществляет взаимно однозначное отображение R_m на себя. Если $a \neq 0$, то неподвижных точек это отображение не имеет.

В большинстве современных ЭВМ есть специальная команда для выполнения операции $*$, которая используется для сравнения кодов ($a * b = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$). Эта команда относится к числу наиболее быстро выполняемых (так называемых логических) команд.

---

*) Правила (3.30) совпадают с логической операцией «отрицание равнозначности»:

$$0 \nsim 0 = 0, \quad 0 \nsim 1 = 1 \nsim 0 = 1, \quad 1 \nsim 1 = 0,$$

Замечание. В дальнейшем нам не раз встретится алгебраическое поле Z_2, состоящее из двух элементов — 0 и 1,— с обычной операцией умножения и сложением по правилам (3.30) (иначе говоря, по модулю 2) [63]. Очевидно, если рассматриваются величины a и b, принадлежащие Z_2, то операция $*$ означает «обычное» (для этого поля) сложение.

ДР-последовательности. Выберем произвольную последовательность (двоично рациональных) чисел $V_1, V_2, \ldots, V_s, \ldots$, где все $0 < V_s < 1$. Условимся называть эти числа *направляющими числами.*

ДР-*последовательность* $\{r(i)\}$ *с направляющими числами* $\{V_s\}$ определяется следующей формулой: если в двоичной системе $i = e_m e_{m-1} \ldots e_2 e_1$, то

$$r(i) = e_1 V_1 * e_2 V_2 * \ldots * e_m V_m. \tag{3.31}$$

Легко доказать, что это определение равносильно следующему рекуррентному определению:

1°. $r(0) = 0$; $r(2^s) = V_{s+1}$.

2°. Если $2^s < i < 2^{s+1}$, то $r(i) = r(2^s) * r(i - 2^s)$.

Правило 1° показывает, что направляющие числа V_s расставляются в заданных местах каждой ДР-последовательности. А все другие числа $r(i)$ получаются по общему правилу 2°.

Название «ДР-последовательность», по нашему мнению, не слишком удачное. Оно получилось в результате сокращения первоначального названия «последовательность двоично рационального типа».

Легко видеть, что рассмотренная в гл. 2. последовательность $\{p(i)\}$ есть ДР-последовательность, получающаяся тогда, когда все $V_s = 2^{-s}$. В этом случае все слагаемые $e_j V_j$ в (3.31) содержат единицы в различных разрядах и операция $*$ равносильна обычному сложению.

Направляющая матрица. Можно задавать направляющие числа V_s в форме двоичных дробей:

$$V_s = 0,\ v_{s1} v_{s2} \ldots v_{sj} \ldots,$$

где все $v_{sj} \in Z_2$. Тогда задание последовательности $\{V_s\}$ равносильно заданию бесконечной матрицы, все элементы которой принадлежат Z_2:

$$(v_{sj}) = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1j} & \ldots \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2j} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{s1} & v_{s2} & \ldots & v_{sj} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу естественно назвать *направляющей матрицей.*

Вышеупомянутая последовательность $\{p(i)\}$ соответствует единичной направляющей матрице (то есть $v_{ss} = 1$, $v_{sj} = 0$ при $s \neq j$).

Теорема 7. *Если в направляющей матрице все* $v_{ss} = 1$, *а при* $j > s$ *все* $v_{sj} = 0$, *то соответствующая ей* ДР-*последовательность есть* ЛП_0-*последовательность.*

Доказательство. Выберем произвольный двоичный участок ДР-последовательности $\{r(i)\}$, длина которого равна 2^m. Номера i, принадлежащие этому участку, запишем в двоичной системе:

$$i = c_\mu c_{\mu-1} \ldots c_{m+1} e_m e_{m-1} \ldots e_2 e_1, \tag{3.32}$$

где c_k фиксированы, а e_k — любые двоичные цифры.

Выберем теперь произвольный двоичный отрезок $l = l_{m+1, j}$, длина которого $|l| = 2^{-m}$. В двоичной системе этот отрезок определяется неравенством

$$0,\ a_1 a_2 \ldots a_m \leqslant x < 0,\ a_1 a_2 \ldots a_m + 0,\ 00 \ldots 01,$$

где числа a_k фиксированы *).

Нам нужно доказать, что, каковы бы ни были c_k и a_k, среди чисел i вида (3.32) найдется одно такое, что $r(i) \in l$. Для этого запишем $r(i)$ в двоичной системе:

$$r(i) = 0,\ g_{i1} g_{i2} \ldots g_{ij} \ldots$$

Из формулы (3.31) следует, что если $i = e_\mu e_{\mu-1} \ldots e_2 e_1$, то

$$g_{ij} = e_1 v_{1j} * e_2 v_{2j} * \ldots * e_\mu v_{\mu j}. \tag{3.33}$$

*) Если все $a_k = 1$, то справа должен стоять знак $\leqslant$ вместо $<$. Однако в этом случае $0,\ a_1 \ldots a_m + 0,\ 0 \ldots 1 = 1$, и так как все $r(i) < 1$, то наличие знака $<$ не повлияет на доказательство.

Условие $r(i) \in l$ эквивалентно m условиям

$$g_{ij} = a_j \text{ при } j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \tag{3.34}$$

а условие принадлежности i к участку (3.32) означает, что

$$e_j = c_j \quad \text{при } j = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ \mu. \tag{3.35}$$

Из (3.33), (3.34) и (3.35) получаем систему m уравнений для нахождения m неизвестных $e_1, \ldots, e_m$:

$$e_1 v_{1j} * \ldots * e_m v_{mj} = a_j * c_{m+1} v_{m+1,\, j} * \ldots * c_\mu v_{\mu j}, \tag{3.36}$$

где $1 \leqslant j \leqslant m$.

В силу условий теоремы ($v_{sj} = 0$ при $s < j$) матрица этой системы треугольная, и систему можно записать в виде

$$e_j v_{jj} * e_{j+1} v_{j+1,\, j} * \ldots * e_m v_{mj} = f_j,$$

где через f_j обозначены правые части (3.36). Так как здесь $v_{jj} = 1$, то неизвестные $e_m, e_{m-1}, \ldots, e_1$ последовательно вычисляются.

Единственность этого решения может быть доказана как из алгебраических соображений (решается линейная система в поле Z_2 с определителем, равным 1), так и из геометрических (каждому из 2^m двоичных отрезков принадлежит хотя бы одна из 2^m точек). Таким образом, теорема доказана.

Следствие из теоремы 7. *Последовательность $\{p(i)\}$ представляет собой* ЛП$_0$-*последовательность.*

Если не предполагать выполненными условия теоремы 7, то вопрос о том, будет ли ДР-последовательность ЛП$_0$-последовательностью, сводится к вопросу о существовании единственного решения системы (3.36) в поле Z_2 при фактически произвольных правых частях. Воспользовавшись алгебраической теорией линейных систем в произвольном поле [63], легко получить следующее предложение:

Теорема 7'. *Для того чтобы* ДР-*последовательность с направляющей матрицей* (v_{sj}) *была* ЛП$_0$-*последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы при всех* $m = 1, 2, \ldots$ *угловые определители*

$$\det \| v_{sj} \|_1^m = 1 \pmod 2.$$

Однако все встречающиеся в дальнейшем ДР-последовательности удовлетворяют условиям теоремы 7.

Заметим, что множество всех ДР-последовательностей, которые являются ЛП_0-последовательностями, значительно уже, чем множество всех ЛП_0-последовательностей, даже если ограничиться ЛП_0-последовательностями, состоящими из двоично рациональных точек. Например, требование $r(0) = 0$ для ЛП_0-последовательностей вовсе не обязательно.

Последовательность $\{q(i)\}$. Матрица Паскаля. Ниже для построения последовательности $\{q(i)\}$ нам понадобится бесконечная целочисленная матрица, которую мы будем называть *матрицей Паскаля*:

$$(\pi_{sj}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы определяются рекуррентным уравнением

$$\pi_{sj} = \pi_{s-1,\, j} + \pi_{s-1,\, j-1} \tag{3.37}$$

с «краевыми условиями»: $\pi_{s1} \equiv 1$ при $s = 1, 2, \dots$; $\pi_{1j} \equiv 0$ при $j = 2, 3, \dots$ Легко проверить, что $\pi_{sj} = 0$, когда $j > s$, а при $j \leqslant s$ значения π_{sj} равны биномиальным коэффициентам:

$$\pi_{sj} = \binom{s-1}{j-1}.$$

Таким образом, ненулевая часть матрицы (π_{sj}) представляет собой знаменитый треугольник Паскаля.

Лемма 6. *Рассмотрим квадрат матрицы Паскаля:* $(w_{sj}) = (\pi_{sj})\cdot(\pi_{sj})$. *Элементы*

$$w_{sj} = \begin{cases} 0, & \text{когда } j > s; \\ 1, & \text{когда } j = s; \\ 0 \pmod 2, & \text{когда } j < s. \end{cases}$$

Доказательство. Первые два утверждения леммы достаточно очевидны. Рассмотрим случай $j < s$. В этом случае

$$w_{sj} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \pi_{s\alpha}\pi_{\alpha j} = \sum_{\alpha=j}^{s} \pi_{s\alpha}\pi_{\alpha j}. \tag{3.38}$$

В (3.38) разложим $\pi_{s\alpha}$ по формуле (3.37):

$$w_{sj} = \sum_{\alpha=j}^{s} \pi_{s-1,\alpha}\pi_{\alpha j} + \sum_{\alpha=j}^{s} \pi_{s-1,\alpha-1}\pi_{\alpha j}.$$

Затем во второй сумме разложим $\pi_{\alpha j}$ по формуле (3.37):

$$w_{sj} = \sum_{\alpha=j}^{s} \pi_{s-1,\alpha}\pi_{\alpha j} + \sum_{\alpha=j}^{s} \pi_{s-1,\alpha-1}\pi_{\alpha-1,j} + \sum_{\alpha=j}^{s} \pi_{s-1,\alpha-1}\pi_{\alpha-1,j-1}.$$

Последнее слагаемое в первой сумме содержит $\pi_{s-1,s} = 0$, а первое слагаемое во второй сумме содержит $\pi_{j-1,j} = 0$. Отбросив эти слагаемые и заменив во второй и третьей суммах индексы суммирования α на $\alpha - 1$, получим

$$w_{sj} = \sum_{\alpha=j}^{s-1} \pi_{s-1,\alpha}\pi_{\alpha j} + \sum_{\alpha=j}^{s-1} \pi_{s-1,\alpha}\pi_{\alpha j} + \sum_{\alpha=j-1}^{s-1} \pi_{s-1,\alpha}\pi_{\alpha,j-1}.$$

Последнее соотношение означает, что $w_{sj} = 2w_{s-1,j} + w_{s-1,j-1}$, и, стало быть, $w_{sj} \equiv w_{s-1,j-1} \pmod 2$. Использовав это соотношение $j - 1$ раз, получим, что

$$w_{sj} \equiv w_{s-j+1,1} \pmod 2.$$

Однако при любом k

$$w_{k1} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \pi_{k\alpha}\pi_{\alpha 1} = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \pi_{k\alpha} = 2^{k-1},$$

так как это есть сумма всех биномиальных коэффициентов порядка $k - 1$. Следовательно, $w_{sj} \equiv 0 \pmod 2$, что и требовалось доказать.

Лемма 7. *При любых целых $p \geqslant 0$ и $q \geqslant 1$ определитель*

$$D_p^{(q)} \equiv \det|\pi_{p+i,\,j}|_1^q = 1. \tag{3.39}$$

Заметим, что $D_p^{(q)}$ — это определитель произвольной квадратной матрицы (порядка q), вырезаемой из матрицы Паскаля так, чтобы при этом был захвачен первый столбец. Например,

$$D_2^{(4)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 1.$$

Доказательство леммы 7. Вычтем из элементов последней, q-й строки $D_p^{(q)}$ элементы предпоследней строки. Согласно (3.37) получим числа 0, $\pi_{p+q-1,1}, \ldots$ $\ldots, \pi_{p+q-1,q-1}$. Затем вычтем из элементов $(q-1)$-й строки элементы $(q-2)$-й, из элементов $(q-2)$-й — элементы $(q-3)$-й, ... и, наконец, из элементов 2-й строки — элементы первой. Получим

$$D_p^{(q)} = \begin{vmatrix} \pi_{p+1,\,1} & \pi_{p+1,\,2} & \ldots & \pi_{p+1,\,q} \\ 0 & \pi_{p+1,1} & \ldots & \pi_{p+1,\,q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & \pi_{p+q-1,\,1} & \ldots & \pi_{p+q-1,\,q-1} \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $D_p^{(q)} = \pi_{p+1,1} D_p^{(q-1)} = D_p^{(q-1)}$. А так как $D_p^{(1)} = \pi_{p+1,1} = 1$, то все $D_p^{(q)} = 1$.

Определение. ДР-последовательность с направляющей матрицей (v_{sj}), состоящей из элементов $v_{sj} = \pi_{sj} \pmod 2$, назовем последовательностью $\{q(i)\}$.

Эта направляющая матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям теоремы 7, так что $\{q(i)\}$ есть ЛП$_0$-последовательность. В дальнейшем будет доказано, что последовательности $\{p(i)\}$ и $\{q(i)\}$ в некотором смысле независимы (ср. [60]): точки с координатами $(p(i), q(i))$ образуют р.р. последовательность на единичном квадрате.

Вычислим несколько значений $q(i)$. Очевидно, в двоичной системе $V_1 = 0{,}1$, $V_2 = 0{,}11$, $V_3 = 0{,}101$, $V_4 = 0{,}1111$, ... Пусть $i = 3$; в двоичной системе $i = 11$, так что $q(3) = V_1 * V_2 = 0{,}01 = 1/4$. Пусть $i = 6$; в двоичной системе $i = 110$, так что $q(6) = V_2 * V_3 = 0{,}011 = 3/8$. Пусть $i = 11$; в двоичной системе $i = 1011$, так что $q(11) = V_1 * V_2 * V_4 = 0{,}1011 = 11/16$.

Сопоставим теперь значения $p(i)$ с $q(i)$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$p(i)$	0	$^1/_2$	$^1/_4$	$^3/_4$	$^1/_8$	$^5/_8$	$^3/_8$	$^7/_8$	$^1/_{16}$	$^9/_{16}$	$^5/_{16}$	$^{13}/_{16}$	$^3/_{16}$	...
$q(i)$	0	$^1/_2$	$^3/_4$	$^1/_4$	$^5/_8$	$^1/_8$	$^3/_8$	$^7/_8$	$^{15}/_{16}$	$^7/_{16}$	$^3/_{16}$	$^{11}/_{16}$	$^5/_{16}$	...

В этих значениях легко усмотреть симметрию, которая не случайна.

Теорема 8. *Последовательности $\{p(i)\}$ и $\{q(i)\}$ симметричны в следующем смысле: если $p(i) = q(j)$, то $q(i) = p(j)$.*

Доказательство. Множество всех значений $p(i)$ при $0 \leqslant i < 2^m$ совпадает с множеством всех значений $q(i)$ при $0 \leqslant i < 2^m$ и равно R_m — множеству всех двоичных m-значных дробей $x \in [0, 1)$. Поэтому к каждому i из участка $0 \leqslant i < 2^m$ можно подобрать такое j из этого же участка, что $p(i) = q(j)$.

Пусть в двоичной системе

$$i = e_m e_{m-1} \dots e_1, \quad j = d_m d_{m-1} \dots d_1;$$

тогда

$$p(i) = 0, e_1 \dots e_{m-1} e_m, \quad q(j) = d_1 V_1 * \dots * d_m V_m.$$

Равенство $p(i) = q(j)$ означает, что в каждом из двоичных разрядов, то есть при $1 \leqslant s \leqslant m$,

$$e_s = \sum_{\alpha=1}^{m} d_\alpha v_{\alpha s} \pmod 2. \tag{3.40}$$

(Вместо $*$ можно писать сложение (mod 2), так как все числа здесь принадлежат Z_2.)

Вычислим теперь величину $q(i) = e_1 V_1 * \ldots * e_m V_m$. В k-м двоичном разряде числа $q(i)$ стоит

$$q_{ik} = \sum_{\beta=1}^{m} e_\beta v_{\beta k} \pmod 2, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Подставив сюда выражение (3.40) для e_β и воспользовавшись тем, что $v_{sj} = \pi_{sj} \pmod 2$, получим

$$q_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{m} d_\alpha \sum_{\beta=1}^{m} v_{\alpha\beta} v_{\beta k} \pmod 2 = \sum_{\alpha=1}^{m} d_\alpha w_{\alpha k} \pmod 2.$$

Из леммы 6 следует, что последняя сумма равна d_k. Значит,

$$q(i) = 0,\ q_{i1} q_{i2} \ldots q_{im} = 0,\ d_1 d_2 \ldots d_m = p(j),$$

что и требовалось доказать.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Глава 4

Оценка погрешности многомерных квадратурных формул

В этой главе рассматриваются функции от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, определенные на единичном n-мерном кубе $K^n = \{0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \ \ldots, \ 0 \leqslant x_n \leqslant 1\}$. Для краткости мы будем точку с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$ обозначать одной буквой P, так что $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(P)$, где $P \in K^n$. Вместо $dx_1 \ldots dx_n$ будем писать dP.

Рассмотрим квадратурную (или, что то же, кубатурную) формулу

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(P)\,dP \approx \sum_{\mu=0}^{N-1} C_\mu f(P_\mu) \tag{4.1}$$

с узлами $P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}$ и весами $C_0, C_1, \ldots, C_{N-1}$.

Погрешностью формулы (4.1) на каком-нибудь множестве функций H называется верхняя грань ошибки

$$R = \sup_{f \in H} |\delta(f)|,$$

где ошибка

$$\delta(f) = \int_{K^n} f(P)\,dP - \sum_{\mu=0}^{N-1} C_\mu f(P_\mu). \tag{4.2}$$

Если в качестве множества H взять единичную сферу в каком-нибудь линейном нормированном пространстве функций, то (см. начало гл. 2) $R = \|\delta\|$ — погрешность формулы (4.1) равна норме линейного функционала (4.2).

Настоящая глава посвящена изложению метода рядов Хаара в теории многомерных квадратур [57, 18, 19, 92—96]. В § 1 вводятся многомерные классы функций S_p с быстро сходящимися рядами Хаара и близкие к ним классы функций H_α. В §§ 2 и 3 вычисляются $\|\delta\|$ на пространствах S_p и оцениваются $\|\delta\|$ на пространствах H_α. С помощью этих результатов в гл. 5 и 6 исследуется точность различных сеток интегрирования в K^n, а в гл. 7, используя предельный переход при $n \to \infty$, получены оценки погрешности интегрирования на некоторых классах функций от бесконечного числа переменных.

Порядок сходимости семейства формул. На фиксированном множестве функций H рассмотрим семейство квадратурных формул вида (4.1), содержащее формулы со сколь угодно большим числом узлов (то есть определенные для значений $N = N_t$, где $N_t \to \infty$ при $t \to \infty$). Если для любой формулы (4.1) семейства

$$R \leqslant B\rho(N), \tag{4.3}$$

где B — постоянная, а $\rho(N) \to 0$ при $N \to \infty$, то мы будем говорить, что *порядок сходимости* этих формул на множестве H не превосходит $\rho(N)$.

Если для любой формулы (4.1) семейства

$$B_1\rho(N) \leqslant R \leqslant B\rho(N),$$

$B \geqslant B_1 > 0$, то будем говорить, что порядок сходимости этих формул равен $\rho(N)$ или что порядок оценки (4.3) точный.

Кратные ряды Хаара. Рассмотрим всевозможные произведения функций Хаара

$$\chi_{k_1}(x_1)\,\chi_{k_2}(x_2)\ldots\chi_{k_n}(x_n),$$

где $1 \leqslant k_\nu < \infty$, $1 \leqslant \nu \leqslant n$. Совокупность всех произведений представляет собой ортонормированную систему на K^n. Для любой интегрируемой функции $f(P)$ можно вычислить коэффициенты Фурье — Хаара

$$c_{k_1\ldots k_n} = \int\limits_{K^n} f(P)\,\chi_{k_1}(x_1)\ldots\chi_{k_n}(x_n)\,dP \tag{4.4}$$

и составить кратный ряд Фурье — Хаара, который (как и в случае одной переменной) сходится равномерно для любой непрерывной функции $f(P)$:

$$f(P) = \sum_{k_1, \ldots, k_n=1}^{\infty} c_{k_1 \ldots k_n} \chi_{k_1}(x_1) \ldots \chi_{k_n}(x_n). \tag{4.5}$$

Легко также доказать, что функции $f(P)$, представимые в форме равномерно сходящегося ряда (4.5), непрерывны во всех точках P, координаты которых не двоично рациональны. Если же какие-либо из координат точки $P = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ двоично рациональны, то $f(P)$ может иметь в этой точке разрыв *).

Индексы k_ν, j_ν, m_ν в этой главе имеют тот же смысл, что индексы k, j, m в гл. 1. В частности, если $2 \leqslant k_\nu < \infty$, то $k_\nu = 2^{m_\nu - 1} + j_\nu$, где $1 \leqslant j_\nu \leqslant 2^{m_\nu - 1}$, $1 \leqslant m_\nu < \infty$.

§ 1. Классы функций

Разложение $f(P)$ на «разноразмерные» слагаемые [95]. Фиксируем s произвольных индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$, где $1 \leqslant s \leqslant n$, которые будем называть *отмеченными индексами*. Символом $K_{i_1 \ldots i_s}$ мы будем обозначать s-мерную грань куба K^n, на которой $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ меняются от 0 до 1, в то время как все остальные x_i (при $i \neq i_1, \ldots, i_s$) фиксированы: $x_i \equiv 1$ (рис. 4.1 для случая $n = 3$). Сам куб K^n мы будем также причислять к числу граней: это n-мерная грань $K_{12 \ldots n}$.

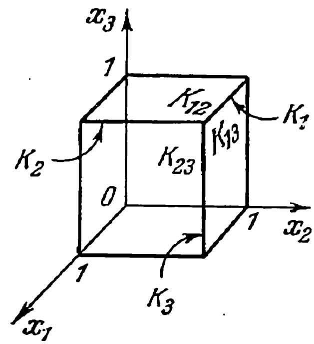

Рис. 4.1.

Грань $K_{i_1 \ldots i_s}$ можно рассматривать как единичный s-мерный куб в пространстве переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$,

*) В такой точке разрыва существуют предельные значения $\lim f(P')$, когда $P' \to P$, не пересекая при этом ни одной из плоскостей $x_s = \xi_s$ с двоично рациональной координатой ξ_s.

Предположим, что на каждой грани $K_{i_1\ldots i_s}$ задано число $T_{i_1\ldots i_s}$. Сумму всех $T_{i_1\ldots i_s}$ условимся обозначать через $\hat{\Sigma} T_{i_1\ldots i_s}$. Итак,

$$\hat{\sum} T_{i_1\ldots i_s} = \sum_{i_1=1}^{n} T_{i_1} + \sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}\sum T_{i_1i_2} + \\ + \sum\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n}\sum T_{i_1i_2i_3} + \ldots + T_{12\ldots n}.$$

Число слагаемых в сумме $\hat{\Sigma}$ равно $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$. Например, пусть $T_{i_1\ldots i_s} = a^s$. Тогда

$$\hat{\sum} a^s = \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} a^s = (1+a)^n - 1.$$

Выделим теперь в (4.5) в явном виде первую функцию системы Хаара $\chi_1(x) \equiv 1$. Тогда в этой сумме окажутся члены, содержащие произведения различного числа функций Хаара, и удобно записать ее с помощью $\hat{\Sigma}$:

$$f(P) = c_1 + \hat{\sum} \sum_{k_1,\ldots,k_s} c_{k_1\ldots k_s}^{i_1\ldots i_s} \chi_{k_1}(x_{i_1})\ldots\chi_{k_s}(x_{i_s}), \tag{4.6}$$

где

$$c_1 = \int_{K^n} f(P)\,dP,$$

$$c_{k_1\ldots k_s}^{i_1\ldots i_s} = \int_{K^n} f(P)\,\chi_{k_1}(x_{i_1})\ldots\chi_{k_s}(x_{i_s})\,dP; \tag{4.7}$$

индексы $k_1,\ldots, k_s$ меняются теперь от 2 до ∞.

Каждая из величин, стоящих в (4.6) под знаком $\hat{\Sigma}$, зависит лишь от s переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, и можно считать, что она задана на грани $K_{i_1\ldots i_s}$. Поэтому формулу (4.6) естественно назвать разложением $f(P)$ на *разноразмерные слагаемые*. Конечно, такое разложение можно осуществить с помощью любой ортонормированной системы $\{\varphi_k(P)\}$, содержащей функцию $\varphi_1(P) \equiv 1$.

Пример. Разложение $f(x, y)$ на разноразмерные слагаемые:

$$f(x, y) = c_1 + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^1 \chi_k(x) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k^2 \chi_k(y) + \\ + \sum_{k_1=2}^{\infty} \sum_{k_2=2}^{\infty} c_{k_1 k_2}^{12} \chi_{k_1}(x) \chi_{k_2}(y).$$

Классы функций $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$. Рассмотрим функцию $f(P)$, представимую в форме ряда (4.6). Для слагаемого

$$\sum_{k_1, \ldots, k_s} c_{k_1 \ldots k_s}^{i_1 \ldots i_s} \chi_{k_1}(x_{i_1}) \ldots \chi_{k_s}(x_{i_s}) \tag{4.8}$$

введем величину $A_p^{i_1 \ldots i_s}(f)$, аналогичную $A_p(f)$ в гл. 2:

$$A_p^{i_1 \ldots i_s}(f) = \sum_m 2^{\frac{m_1 - 1}{2} + \ldots + \frac{m_s - 1}{2}} \left\{ \sum_j |c_k^i|^p \right\}^{1/p}, \tag{4.9}$$

где для краткости $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_s)$, $\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_s)$, $\boldsymbol{j} = (j_1, \ldots, j_s)$, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_s)$.

Определение. Классом $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ назовем множество функций $f(P)$, представимых в виде ряда (4.6), коэффициенты Фурье—Хаара которых удовлетворяют условиям

$$A_p^{i_1 \ldots i_s}(f) \leqslant A_{i_1 \ldots i_s} \tag{4.10}$$

при любых отмеченных индексах $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$. Постоянные $A_{i_1 \ldots i_s}$ будем называть *определяющими постоянными* класса $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$. Параметр p из промежутка $1 \leqslant p < \infty$.

Так же, как в одномерном случае, если $1 < p < p'$, то

$$S_1(A_{i_1 \ldots i_s}) \subset S_p(A_{i_1 \ldots i_s}) \subset S_{p'}(A_{i_1 \ldots i_s}).$$

Теорема 1. *Для любой функции $f(P)$ из $S_p(A_{i_1\dots i_s})$ ряд (4.6) сходится абсолютно и равномерно.*

Доказательство. Оценим произвольный участок ряда (4.6) с $k'_\nu \leqslant k_\nu \leqslant k''_\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant s$:

$$T_{k'k''} \equiv \sum_{k=k'}^{k''} |c_k^i \chi_{k_1}(x_{i_1})\dots\chi_{k_s}(x_{i_s})|.$$

Если $k'_\nu = 2^{m'_\nu-1} + j'_\nu$, то распространим суммирование на полную группу $1 \leqslant j_\nu \leqslant 2^{m'_\nu-1}$ и точно так же поступим с k''_ν. Тогда

$$T_{k'k''} \leqslant \sum_{m=m'}^{m''} \sum_j |c_k^i \chi_{k_1}(x_{i_1})\dots\chi_{k_s}(x_{i_s})|, \tag{4.11}$$

причем $m'_\nu \to \infty$, когда $k'_\nu \to \infty$.

К внутренней сумме применим неравенство Гельдера:

$$\sum_j |c_k^i \chi_{k_1}\dots\chi_{k_s}| \leqslant \left\{\sum_j |c_k^i|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_j |\chi_{k_1}\dots\chi_{k_s}|^q\right\}^{1/q}. \tag{4.12}$$

Вторая фигурная скобка в (4.12) вычисляется с помощью (1.6):

$$\sum_j |\chi_{k_1}(x_{i_1})\dots\chi_{k_s}(x_{i_s})|^q = \prod_{\nu=1}^{s} \sum_{j_\nu=1}^{2^{m_\nu-1}} |\chi_{k_\nu}(x_{i_\nu})|^q = \prod_{\nu=1}^{s} 2^{\frac{1}{2}(m_\nu-1)q}.$$

Подставляя это выражение в (4.12), а затем (4.12) — в (4.11), получим

$$T_{k'k''} \leqslant \sum_{m=m'}^{m''} \prod_{\nu=1}^{s} 2^{\frac{1}{2}(m_\nu-1)} \left\{\sum_j |c_k^i|^p\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{4.13}$$

Очевидно, (4.13) — это участок ряда (4.9), который по условию (4.10) сходится. Поэтому из (4.13) вытекает абсолютная и равномерная сходимость ряда (4.8), а вместе с этим и ряда (4.6).

Следствие. Функции классов S_p ограничены:

$$|f(P)| \leqslant |c_1| + \hat{\sum} A_p^{i_1 \ldots i_s}(f).$$

Это утверждение доказывается в точности так же, как теорема 1.

Две леммы о приращениях функций. Рассмотрим функцию $f(P)$, определенную в K^n. Обозначим через ξ_s приращение аргумента x_s и введем обычный разностный оператор

$$\Delta_{\xi_s} f(P) = f(x_1, \ldots, x_s + \xi_s, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n). \tag{4.14}$$

Лемма 1. *Если* $P = (x_1, \ldots, x_n)$, *а* $Q = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, *то*

$$f(P+Q) - f(P) = \hat{\sum} \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P). \tag{4.15}$$

Доказательство можно провести по индукции. При $n = 1$ (4.15) равносильно (4.14). Допустим, что (4.15) верно для функций, зависящих от $(n-1)$-ой переменной. Пусть $Q' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$. Тогда по формуле (4.15) для $(n-1)$-ой переменной

$$f(P+Q') - f(P) = \hat{\sum} {}' \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P), \tag{4.16}$$

где штрих означает, что в число приращений входят только $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Далее,

$$f(P+Q) - f(P) = f(P+Q) - f(P+Q') + f(P+Q') - \\ - f(P) = \Delta_{\xi_n} f(P+Q') + \hat{\sum} {}' \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P).$$

Из (4.16) найдем $f(P+Q')$ и подставим в последнее выражение. Тогда получим

$$f(P+Q) - f(P) = \Delta_{\xi_n} f(P) + \hat{\sum} {}' \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} \Delta_{\xi_n} f(P) + \\ + \hat{\sum} {}' \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P) = \hat{\sum} \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P).$$

Лемма 2. *Предположим, что функция $f(P)$ имеет в K^n кусочно-непрерывные частные производные, содержащие не более одного дифференцирования по каждому* *переменному*:

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n, \quad 1 \leqslant s \leqslant n. \tag{4.17}$$

Тогда

$$\Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P) = \int_0^{\xi_{i_1}} \ldots \int_0^{\xi_{i_s}} \frac{\partial^s f(P+T)}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}} dt_{i_1} \ldots dt_{i_s}, \tag{4.18}$$

где $T = (0, \ldots, 0, t_{i_1}, 0, \ldots, 0, t_{i_s}, 0, \ldots, 0)$.

Доказательство мы опускаем: оно легко проводится индукцией по s, а при $s = 1$

$$\Delta_{\xi_1} f(P) = f(x_1 + \xi_1, \ldots) - f(x_1, \ldots) = \int_0^{\xi_1} f'_{x_1}(x_1 + t_1, \ldots)\, dt_1.$$

Классы функций $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$.

Определение. Классом $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ назовем множество функций $f(P)$, удовлетворяющих следующим условиям: если $P \in K^n$ и $P + Q \in K^n$, то при любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$

$$|\Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P)| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s} |\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s}|^\alpha. \tag{4.19}$$

Постоянные $L_{i_1\ldots i_s}$ будем называть *определяющими постоянными* класса $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$. Параметр $0 < \alpha \leqslant 1$.

Так же, как в одномерном случае, если $\alpha < \alpha' < 1$, то

$$H_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset H_{\alpha'}(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset H_\alpha(L_{i_1 \ldots i_s}).$$

Сравнив (4.19) с (1.31), легко видеть, что классы $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ представляют собой обобщение на n-мерный случай классов Липшица $H_\alpha(L)$. Однако надо подчеркнуть, что условия (4.19) отличаются от многомерного условия Липшица, используемого в теории дифференциальных уравнений [102]:

$$|f(P+Q) - f(P)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} L_i |\xi_i|^\alpha. \tag{4.20}$$

Для того чтобы функция $f(P)$ удовлетворяла (4.20) с $\alpha = 1$, достаточно, чтобы все частные производные $\partial f/\partial x_i$ были ограничены: $|\partial f/\partial x_i| \leqslant L_i$. А для того, чтобы она удовлетворяла (4.19) с $\alpha = 1$, этого мало: надо требовать, чтобы все частные производные $\partial^s f/\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}$ были ограничены, так как если $|\partial^s f/\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s}$, то из (4.18) легко получить (4.19) с $\alpha = 1$.

Обозначим через $W_1(L_{i_1 \ldots i_s})$ множество функций $f(P)$, у которых все частные производные (4.17) кусочно непрерывны и ограничены в K^n:

$$\left| \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} \right| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s}.$$

Предыдущее рассуждение показывает нам, что

$$W_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset H_1(L_{i_1 \ldots i_s}). \tag{4.21}$$

В некоторых вопросах анализа ([90], стр. 130) при переходе от функций одной переменной к функциям n переменных роль дифференцируемых функций $f(x)$ играют n раз дифференцируемые функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, точнее, функции, имеющие все частные производные до n-го порядка включительно. С точки зрения теории многомерных квадратурных формул оказывается, что в качестве такого аналога можно рассматривать значительно более широкий класс функций, имеющих лишь частные производные (4.17), входящие в определение $W_1(L_{i_1 \ldots i_s})$.

Классы дифференцируемых функций такой структуры, как W_1, в теорию многомерных квадратурных формул были введены в работе [87]. Классы недифференцируемых функций аналогичной структуры — классы H_α — были введены в [18].

Легко привести примеры, показывающие, что классы функций такой структуры весьма часто встречаются в вычислительной математике. Например, когда переменные разделяются: $f = g_1(x_1)\, g_2(x_2) \ldots g_n(x_n)$; если существуют $g_i'(x_i)$, то функция f имеет все производные (4.17).

Или в более сложном случае, когда

$$f = g_1(x_1, x_2)\, g_2(x_2, x_3) \ldots g_{n-1}(x_{n-1}, x_n);$$

если существуют $\partial g_i/\partial x_i$, $\partial g_i/\partial x_{i+1}$ и $\partial^2 g_i/\partial x_i \partial x_{i+1}$, то легко проверить, что функция f имеет все производные (4.17).

Еще пример [89]: часто при решении интегрального уравнения с ядром $K(x, y)$ вычисляют итерации заданной функции $\varphi_0(x)$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x, t)\,\varphi_0(t)\,dt,$$

$$\varphi_2(x) = \int_a^b\int_a^b K(x, s)\,K(s, t)\varphi_0(t)\,dt\,ds, \ldots$$

и интегралы типа

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\psi(x)\,dx, \quad \int_a^b \varphi_2(x)\,\psi(x)\,dx, \ldots$$

Нетрудно заметить, что подинтегральные функции

$$f = \psi(x_1)\; K(x_1, x_2)\; K(x_2, x_3) \ldots K(x_{n-1}, x_n)\; \varphi_0(x_n)$$

также имеют все производные (4.17), если существуют φ', ψ', K'_x, K'_y и K''_{xy}.

Вложение $H_\alpha(L_{i_1 \ldots i_s})$ в $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$. Мы хотим доказать, что (как и в одномерном случае) классы функций $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ при $p > 1$ содержат достаточно много непрерывных функций. Для оценки коэффициентов Фурье — Хаара нам понадобится одна лемма.

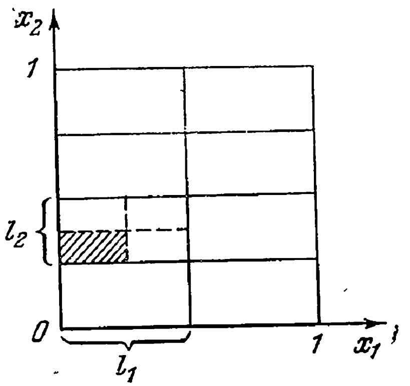

Рис. 4.2.

Обозначим через $\Pi_{k_1 \ldots k_n}$ двоичный параллелепипед, ребра которого суть двоичные отрезки $l_{k_1}, \ldots, l_{k_n}$. Можно воспользоваться записью в форме топологического произведения $\Pi_{k_1 \ldots k_n} = l_{k_1} \times \ldots \times l_{k_n}$. Обозначим $\Pi^-_{k_1 \ldots k_n} = l^-_{k_1} \times \ldots \times l^-_{k_n}$ «левый нижний октант» параллелепипеда $\Pi_{k_1 \ldots k_n}$ (на рис. 4.2 этот октант заштрихован). Наконец, обозначим h_ν длину отрезка $l_{k_\nu}^-$:

$$h_\nu = |l_{k_\nu}^-| = 2^{-m_\nu}.$$

Лемма 3. *Какова бы ни была интегрируемая $\Pi_{k_1 \ldots k_n}$ функция $\varphi(P)$, имеет место тождество*

$$\int\limits_{\Pi_{k_1 \ldots k_n}} \varphi(P) \operatorname{sgn} [\chi_{k_1}(x_1) \ldots \chi_{k_n}(x_n)]\, dP =$$

$$= (-1)^n \int\limits_{\Pi_{k_1 \ldots k_n}^-} \Delta_{h_1} \ldots \Delta_{h_n} \varphi(P)\, dP. \qquad (4.22)$$

Доказательство проведем по индукции. При $n = 1$ лемма очевидна:

$$\int\limits_{l_k} \varphi(x) \operatorname{sgn} \chi_k(x)\, dx = \int\limits_{l_k^-} \varphi(x)\, dx - \int\limits_{l_k^+} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{l_k^-} \varphi(x)\, dx - \int\limits_{l_k^-} \varphi(x + 2^{-m})\, dx = - \int\limits_{l_k^-} \Delta_h \varphi(x)\, dx.$$

Допустим, что формула (4.22) верна для $(n-1)$-ой переменной. Тогда можно считать x_n параметром и записать тождество

$$\Phi(x_n) \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{l_{k_1} \times \cdots \times l_{k_{n-1}}} \varphi(P) \operatorname{sgn} [\chi_{k_1}(x_1) \cdots \chi_{k_{n-1}}(x_{n-1})]\, dx_1 \cdots dx_{n-1} =$$

$$= (-1)^{n-1} \int\limits_{l_{k_1}^- \times \cdots \times l_{k_{n-1}}^-} \Delta_{h_1} \cdots \Delta_{h_{n-1}} \varphi(P)\, dx_1 \cdots dx_{n-1}.$$

Для функции $\Phi(x_n)$, зависящей от одного переменного, мы уже доказали, что

$$\int\limits_{l_{k_n}} \Phi(x_n) \operatorname{sgn} \chi_{k_n}(x_n)\, dx_n = - \int\limits_{l_{k_n}^-} \Delta_{h_n} \Phi(x_n)\, dx_n.$$

Подставив в левую часть последнего равенства левое выражение для $\Phi(x_n)$, а в правую часть — правое выражение для $\Phi(x_n)$, получим (4.22).

Теорема 2. *Если* $\alpha p > 1$, *то* $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s}) \subset S_p(A_{i_1\ldots i_s})$, *где*

$$A_{i_1\ldots i_s} = (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-s} L_{i_1\ldots i_s}. \tag{4.23}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию $f(P)$ из $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ и оценим ее коэффициенты Фурье — Хаара:

$$c_k^i = \int\limits_{K^n} f(P)\,\chi_{k_1}(x_{i_1})\ldots\chi_{k_s}(x_{i_s})\,dP.$$

Выделим интегрирование по «отмеченным» переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$:

$$c_k^i = \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \prod_{i\neq i_\nu} dx_i \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 f(P)\,\chi_{k_1}(x_{i_1})\cdots\chi_{k_s}(x_{i_s})\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_s}.$$

Произведение $\chi_{k_1}(x_{i_1})\ldots\chi_{k_s}(x_{i_s})$ отлично от нуля только тогда, когда точка $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) \in l_{k_1}\times\ldots\times l_{k_s}$. Поэтому

$$c_k^i = \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 \prod_{i\neq i_\nu} dx_i \prod_{\nu=1}^{s} 2^{\frac{m_\nu-1}{2}} \int\limits_{l_{k_1}} \cdots \int\limits_{l_{k_s}} f(P) \times$$
$$\times \operatorname{sgn}[\chi_{k_1}(x_{i_1})\cdots\chi_{k_s}(x_{i_s})]\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_s}. \tag{4.24}$$

Внутренний интеграл преобразуем с помощью леммы 3:

$$\int\limits_{l_{k_1}} \cdots \int\limits_{l_{k_s}} f(P)\operatorname{sgn}[\chi_{k_1}(x_{i_1})\cdots\chi_{k_s}(x_{i_s})]\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_s} =$$
$$= (-1)^s \int\limits_{l_{k_1}^-} \cdots \int\limits_{l_{k_s}^-} \Delta_{h_1}\cdots\Delta_{h_s} f(P)\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_s},$$

где $h_\nu = |l_{k_\nu}^-| = 2^{-m_\nu}$. Отсюда, используя условия (4.19), получаем оценку

$$\left|\int\limits_{l_{k_1}} \cdots \int\limits_{l_{k_s}} f(P)\operatorname{sgn}[\chi_{k_1}(x_{i_1})\cdots\chi_{k_s}(x_{i_s})]\,dx_{i_1}\cdots dx_{i_s}\right| \leqslant$$
$$\leqslant L_{i_1\ldots i_s}|h_1\cdots h_s|^{\alpha+1}.$$

Из (4.24) с помощью последнего неравенства получаем, что

$$|c_k^i| \leqslant L_{i_1\ldots i_s}\prod_{\nu=1}^{s} 2^{-m_\nu(\alpha+1/2)-1/2}. \tag{4.25}$$

Оценим теперь величину (4.9). Так как $1 \leqslant j_\nu \leqslant 2^{m_\nu-1}$, то

$$A_p^{i_1\ldots i_s}(f) \leqslant L_{i_1\ldots i_s}\sum_m \prod_{\nu=1}^{s} 2^{\frac{m_\nu-1}{2}-m_\nu\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}+\frac{m_\nu-1}{p}},$$

или

$$A_p^{i_1\ldots i_s}(f) \leqslant L_{i_1\ldots i_s}\sum_{m_1,\ldots,m_s}\prod_{\nu=1}^{s} 2^{-m_\nu(\alpha-1/p)-1-1/p} =$$
$$= L_{i_1\ldots i_s}\prod_{\nu=1}^{s}\sum_{m_\nu=1}^{\infty} 2^{-m_\nu(\alpha-1/p)-1-1/p}.$$

Стоящую справа геометрическую прогрессию легко просуммировать. Получим окончательно

$$A_p^{i_1\ldots i_s}(f) \leqslant L_{i_1\ldots i_s}\prod_{\nu=1}^{s}(2^{1+\alpha}-2^{1+1/p})^{-1} = L_{i_1\ldots i_s}(2^{1+\alpha}-2^{1+1/p})^{-s},$$

что равносильно утверждению теоремы.

З а м е ч а н и е. Теорема 2 более точная, чем соответствующая теорема вложения в [19]. Хотя на первый взгляд оценки в этих теоремах одинаковые, но в [19] классы H_α определялись несколько иначе, так что фактически оценка (4.23) улучшена в $[2/(\alpha+1)]^s$ раз. Улучшение достигнуто благодаря использованию леммы 3.

Линейные нормированные пространства функций S_p и H_α. Так же, как в гл. 2 (стр. 73), условимся считать за одну все функции $f(P)$, отличающиеся постоянными слагаемыми.

Приняв во внимание это соглашение, рассмотрим множество функций $f(P)$, принадлежащих всем классам $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ (со всевозможными $A_{i_1\ldots i_s}$; значение $1 \leqslant p < \infty$ фиксировано). Назовем это множество S_p. Повторяя те же рассуждения, что привели нас к формуле (2.16), докажем, что при любых отмеченных индексах $i_1, \ldots, i_s$

$$A_p^{i_1 \ldots i_s}(f+g) \leqslant A_p^{i_1 \ldots i_s}(f) + A_p^{i_1 \ldots i_s}(g).$$

После этого легко доказать, что множество S_p линейное: если $f \in S_p$ и $g \in S_p$, то и $(f+g) \in S_p$; при любом действительном λ функция $\lambda f \in S_p$ вместе с f.

На S_p введем норму

$$\|f\|_{S_p} = \hat{\sum} A_p^{i_1 \ldots i_s}(f). \tag{4.26}$$

Легко проверить, что эта норма удовлетворяет всем аксиомам нормы (стр. 73). Следовательно, S_p — это линейное нормированное пространство. Полнота его может быть доказана точно так же, как в одномерном случае.

Рассмотрим теперь множество функций $f(P)$, принадлежащих всем классам $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ (со всевозможными $L_{i_1\ldots i_s}$; значение $0 < \alpha \leqslant 1$ фиксировано). Назовем это множество H_α.

Так как

$$|\Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}}[f(P)+g(P)]| \leqslant$$
$$\leqslant |\Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P)| + |\Delta_{\xi_{i_1}} \cdots \Delta_{\xi_{i_s}} g(P)|,$$

то легко проверить, что множество H_α линейное.

Введем на H_α норму

$$\|f\|_{H_\alpha} = \max_{i_1,\ldots,i_s} \sup_{\substack{P \in K^n \\ P+Q \in K^n}} \frac{|\Delta_{\xi_{i_1}} \cdots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P)|}{|\xi_{i_1} \cdots \xi_{i_s}|^\alpha}. \tag{4.27}$$

(Напомним, что $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $P+Q = (x_1+\xi_1, \ldots$ $\ldots, x_n+\xi_n)$.)

Проверим для $\|f\|_{H_\alpha}$ аксиомы нормы. 1) Если $\|f\|_{H_\alpha}=0$, то из (4.27) следует, что любое $\Delta_{\xi_{i_1}}\ldots\Delta_{\xi_{i_s}} f(P)=0$, и из (4.15) видно, что $f(P+Q)=f(P)=\text{const}$. 2) Для любого действительного λ очевидно, что $\|\lambda f\|_{H_\alpha}=|\lambda|\|f\|_{H_\alpha}$. 3) Неравенство треугольника $\|f+g\|_{H_\alpha}\leqslant\|f\|_{H_\alpha}+\|g\|_{H_\alpha}$ следует из вышеприведенного неравенства для приращений. Итак, H_α — это линейное нормированное пространство.

Нетрудно заметить, что если $f(P)\in H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$, то норма $\|f\|_{H_\alpha}\leqslant\max\limits_{i_1,\ldots i_s} L_{i_1\ldots i_s}$. Но если для $f(P)$ выбрать наименьшие возможные определяющие постоянные $L_{i_1\ldots i_s}$, то $\|f\|_{H_\alpha}=\max\limits_{i_1\ldots i_s} L_{i_1\ldots i_s}$.

Т е о р е м а 2'. *Если $\alpha p>1$, то $H_\alpha\subset S_p$, причем*

$$\|f\|_{S_p}\leqslant\|f\|_{H_\alpha}\left\{\left(1+\frac{1}{2^{1+\alpha}-2^{1+1/p}}\right)^n-1\right\}. \tag{4.28}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(P)\in H_\alpha$. Выберем для $f(P)$ наименьшие определяющие постоянные $L_{i_1\ldots i_s}$. С помощью теоремы 2, обозначив для краткости $(2^{1+\alpha}-2^{1+1/p})^{-1}=\theta$, получим

$$\|f\|_{S_p}\leqslant\hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}\theta^s\leqslant\|f\|_{H_\alpha}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{s}\theta^s=\|f\|_{H_\alpha}\{(1+\theta)^n-1\},$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Погрешность квадратурных формул на классах $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ и $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$

В гл. 2 мы видели, что наилучшие квадратурные формулы на классах функций $S_p(A)$ и $H_\alpha(L)$ обязаны иметь равные веса. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением квадратурных формул с равными весами. Несколько подробнее об этом ограничении сказано в конце параграфа.

Итак, рассмотрим формулу

$$\int_{K^n} f(P)\,dP \approx \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} f(P_\mu), \tag{4.29}$$

где узлы $P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}$ — произвольные (фиксированные) точки куба K^n. Координаты узла P_μ обозначим $(x_{\mu 1}, \ldots, x_{\mu n})$, а всю сетку — буквой Σ, так что $\Sigma = \{P_0, \ldots, P_{N-1}\}$. Ошибка формулы (4.29)

$$\delta(f) = \int_{K^n} f(P)\,dP - \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} f(P_\mu). \tag{4.30}$$

Оценка ошибки (4.30). Если функция $f(P) \in S_p\,(A_{i_1\ldots i_s})$, то ряд (4.6) сходится абсолютно и равномерно. Подставим его в предыдущее выражение для $\delta(f)$:

$$\delta(f) = -\frac{1}{N}\hat{\sum}\sum_{k_1,\ldots,k_s=2}^{\infty} c_{k_1\ldots k_s}^{i_1\ldots i_s}\sum_{\mu=0}^{N-1}\chi_{k_1}(x_{\mu i_1})\ldots\chi_{k_s}(x_{\mu i_s}).$$

Выделим суммирование по различным группам функций Хаара, иначе говоря, вместо суммы по k_ν запишем двойную сумму по m_ν и j_ν: $\sum\limits_{k_\nu=2}^{\infty} = \sum\limits_{m_\nu=1}^{\infty}\sum\limits_{j_\nu=1}^{2^{m}-1}$. Кроме того, выделим абсолютные величины $|\chi_{k_\nu}|$. Тогда

$$\delta(f) = -\frac{1}{N}\hat{\sum}\sum_{m}\prod_{\tau=1}^{s} 2^{\frac{m_\tau-1}{2}}\sum_{j} c_k^i \sum_{\mu=0}^{N-1}\operatorname{sgn}\prod_{\nu=1}^{s}\chi_{k_\nu}(x_{\mu i_\nu}). \tag{4.31}$$

Сумму по $j = (j_1, \ldots, j_s)$ оценим с помощью неравенства Гельдера:

$$\sum_{j}|c_k^i|\left|\sum_{\mu=0}^{N-1}\operatorname{sgn}\prod_{\nu=1}^{s}\chi_{k_\nu}(x_{\mu i_\nu})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{j}|c_k^i|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{j}\left|\sum_{\mu=0}^{N-1}\operatorname{sgn}\prod_{\nu=1}^{s}\chi_{k_\nu}(x_{\mu i_\nu})\right|^q\right\}^{1/q},$$

где $(1/p) + (1/q) = 1$.

Введем числа

$$\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) = \sup_m \left\{ \sum_j \left| \sum_{\mu=0}^{N-1} \operatorname{sgn}\left[\chi_{k_1}(x_{\mu i_1}) \ldots \chi_{k_s}(x_{\mu i_s})\right] \right|^q \right\}^{1/q}, \tag{4.32}$$

где верхняя грань берется по всем $1 \leqslant m_\nu < \infty$, $1 \leqslant \nu \leqslant s$. Эти числа зависят только от точек $P_0, \ldots, P_{N-1}$ и представляют собой некоторые характеристики сетки интегрирования Σ.

Из последних трех формул вытекает, что

$$|\delta(f)| \leqslant \frac{1}{N} \hat{\sum} \Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) \sum_m \prod_{\nu=1}^{s} 2^{\frac{m_\nu - 1}{2}} \left\{ \sum_j |c_k^i|^p \right\}^{1/p}$$

или, если вспомнить определение (4.9), что

$$|\delta(f)| \leqslant \frac{1}{N} \hat{\sum} A_p^{i_1 \ldots i_s}(f)\, \Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma). \tag{4.33}$$

Геометрический смысл $\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma)$. Легко видеть, что $\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma)$ зависит только от проекций сетки Σ на грань $K_{i_1 \ldots i_s}$. В самом деле, проекция P_μ на $K_{i_1 \ldots i_s}$ — это точка с координатами $(1, \ldots, 1, x_{\mu i_1}, 1, \ldots, 1, x_{\mu i_s}, 1, \ldots, 1)$, а в (4.32) входят только $x_{\mu i_1}, \ldots, x_{\mu i_s}$.

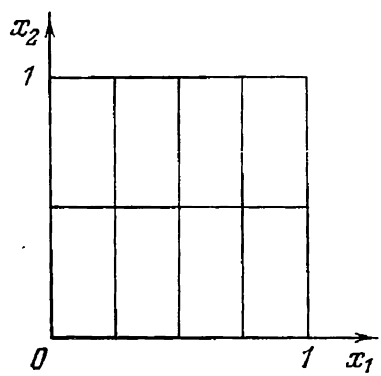

Рис. 4.3.

Если заданы числа $m_1, \ldots, m_s$, тотем самым задано разбиение грани $K_{i_1 \ldots i_s}$ на всевозможные *двоичные параллелепипеды* вида $l_{m_1 j_1} \times \ldots \times l_{m_s j_s}$, где $1 \leqslant j_\nu \leqslant 2^{m_\nu - 1}$ (на рис. 4.3 изображена двумерная грань K_{12} и разбиение, соответствующее значениям $m_1 = 3$, $m_2 = 2$). Рассмотрим один из параллелепипедов этого разбиения, обозначив его для краткости буквой $\Pi_k = l_{k_1} \times \ldots \times l_{k_s}$. Перенесем начало координат в центр Π_k и новые координаты обозначим $\xi_{i_\nu} = x_{i_\nu} - (j_\nu - 1/2)2^{-(m_\nu - 1)}$, $1 \leqslant \nu \leqslant s$. Из рис. 4.4 ясно, что в Π_k при $\xi_{i_\nu} \neq 0$

$$\operatorname{sgn} \chi_{k_\nu}(x_{i_\nu}) = -\operatorname{sgn} \xi_{i_\nu}. \tag{4.34}$$

После такого переноса параллелепипед Π_k разобьется на 2^s «многомерных октантов» (или «квадрантов»). Обозначим через V_k^+ совокупность всех положительных октантов, в которых произведение $\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s} > 0$, а через V_k^- — совокупность всех отрицательных октантов, в которых

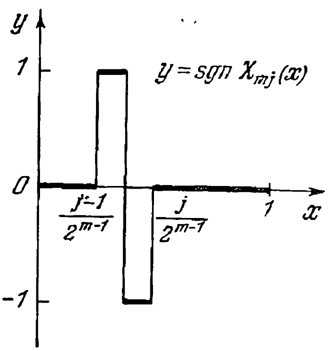

Рис. 4.4.

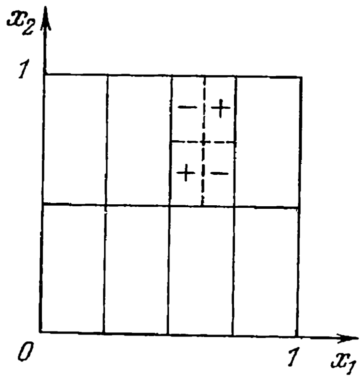

Рис. 4.5.

$\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s} < 0$ (рис. 4.5). Заметим, что объемы V_k^+ и V_k^- равны $0{,}5\ |\Pi_k|$, где $|\Pi_k|$ — объем Π_k.

Если проекция $(x_{\mu i_1}, \ldots, x_{\mu i_s}) \in \Pi_k$, то согласно (4.34)

$$\operatorname{sgn} [\chi_{k_1}(x_{\mu i_1}) \ldots \chi_{k_s}(x_{\mu i_s})] = (-1)^s \operatorname{sgn} (\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s}).$$

Если при этом $(x_{\mu i_1}, \ldots, x_{\mu i_s}) \in V_k^+$, то эта величина равна $(-1)^s$; если же $(x_{\mu i_1}, \ldots, x_{\mu i_s}) \in V_k^-$, то эта величина равна $(-1)^{s+1}$ и имеет противоположный знак. Наконец, если $(x_{\mu i_1}, \ldots, x_{\mu i_s}) \notin \Pi_k$, то $\operatorname{sgn} [\chi_{k_1}(x_{\mu i_1}) \ldots \chi_{k_s}(x_{\mu i_s})] = 0$.

Обозначим через $S_N^{i_1 \ldots i_s}(V)$ число точек сетки Σ, проекции которых на $K_{i_1 \ldots i_s}$ принадлежат V. Предыдущие рассуждения показывают, что

$$\left|\sum_{\mu=0}^{N-1} \operatorname{sgn}\left[\chi_{k_1}(x_{\mu i_1}) \ldots \chi_{k_s}(x_{\mu i_s})\right]\right| = \left|S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^+) - S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^-)\right|.$$

Следовательно, эта величина в каком-то смысле характеризует неравномерность расположения проекций сетки Σ в параллелепипеде $\Pi_k \subseteq K_{i_1 \ldots i_s}$. А сумма

$$\left\{\sum_{j_1, \ldots, j_s} \left|S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^+) - S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^-)\right|^q\right\}^{1/q}$$

характеризует неравномерность расположения проекций сетки на грани $K_{i_1 \ldots i_s}$ по отношению к заданному разбиению $(m_1, \ldots, m_s)$ этой грани.

Наконец,

$$\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) = \\ = \sup_{m_1, \ldots, m_s} \left\{\sum_{j_1, \ldots, j_s} \left|S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^+) - S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^-)\right|^q\right\}^{1/q} \qquad (4.35)$$

— это наибольшая неравномерность расположения проекций сетки Σ на грани $K_{i_1 \ldots i_s}$ при всевозможных разбиениях $(m_1, \ldots, m_s)$ этой грани.

Геометрическое определение (4.35) позволяет исследовать ряд свойств функций $\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma)$, вполне аналогичных свойствам $\varphi_q(\Sigma)$ из гл. 2.

Лемма 4. *Какова бы ни была сетка Σ, существует хотя бы одно разбиение $m = (m_1, \ldots, m_s)$ грани $K_{i_1 \ldots i_s}$ такое, что*

$$\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) = \left\{\sum_{j_1, \ldots, j_s} \left|S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^+) - S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^-)\right|^q\right\}^{1/q}$$

(напомним, что $k = (k_1, \ldots, k_s)$; $k_\nu = 2^{m_\nu - 1} + j_\nu$, $1 \leqslant j_\nu \leqslant 2^{m_\nu - 1}$).

Для доказательства леммы выберем число M столь большим, чтобы во всех разбиениях $(m_1, \ldots, m_s)$ грани

$K_{i_1\ldots i_s}$, удовлетворяющих условию $m_1 + \ldots + m_s = M$, все Π_k были либо «пустыми», либо содержали одну проекцию точек сетки (конечно, возможно, что эта проекция отвечает нескольким точкам сетки и должна считаться кратной, но геометрически это одна точка на $K_{i_1\ldots i_s}$) *). Для каждого из таких Π_k

$$| S_N^i (V_k^+) - S_N^i (V_k^-) | = S_N^i (\Pi_k),$$

и поэтому для каждого из таких разбиений

$$\left\{\sum_j | S_N^i (V_k^+) - S_N^i (V_k^-) |^q\right\}^{1/q} = \left\{\sum_j | S_N^i (\Pi_k)|^q\right\}^{1/q}. \quad (4.36)$$

Легко видеть, что для всех более мелких разбиений, когда $m_1' + \ldots + m_s' = M' > M$, сумма (4.36) останется такой же. В самом деле, каждый Π_k составлен из некоторого числа более мелких $\Pi_{k'}$. Если Π_k был пуст, то все эти $\Pi_{k'}$ окажутся пустыми. Если же $S_N^i (\Pi_k) \neq 0$, то только один среди всех $\Pi_{k'}$ будет содержать эту же проекцию и для него $S_N^i (\Pi_{k'}) = S_N^i (\Pi_k)$, в то время как все остальные $\Pi_{k'}$ будут пустыми.

Итак, верхнюю грань в формуле (4.35) или (4.32) можно брать фактически по конечному числу разбиений таких, что $m_1 + \ldots + m_s \leqslant M$, откуда следует утверждение леммы.

Погрешность формулы (4.29) на классах $S_p (A_{i_1\ldots i_s})$.

Теорема 3. *Какова бы ни была сетка $\Sigma = \{P_0, \ldots \ldots, P_{N-1}\}$, погрешность квадратурной формулы (4.29) на классе функций $S_p (A_{i_1\ldots i_s})$ равна*

$$R = \frac{1}{N} \hat{\sum} A_{i_1\ldots i_s} \Phi_q^{i_1\ldots i_s} (\Sigma), \quad (4.37)$$

где $(1/p) + (1/q) = 1$.

---

*) Одна из возможных процедур выбора M такова: рассмотрим проекции точек сетки на ось Ox_{i_ν}; выберем M_ν столь большим, чтобы в каждом из отрезков $l_{M_\nu j}$ на оси Ox_{i_ν} лежала не более чем одна координата $x_{\mu i_\nu}$ (не считая совпадающих); проделав то же с каждой из осей $1 \leqslant \nu \leqslant s$, положим $M = M_1 + \ldots + M_s$.

Доказательство. Из (4.10) и (4.33) видно, что для любой функции $f(P) \in S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ ошибка (4.30) не превосходит правой части (4.37). Остается доказать, что существует функция $g(P) \in S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ такая, что

$$\delta(g) = \frac{1}{N} \sum^{\wedge} A_{i_1 \ldots i_s} \Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma). \tag{4.38}$$

На грани $K_{i_1 \ldots i_s}$ фиксируем разбиение $(m_1, \ldots, m_s)$, удовлетворяющее требованиям леммы 4, и обозначим

$$B_j^i = \sum_{\mu=0}^{N-1} \operatorname{sgn}[\chi_{m_1 j_1}(x_{\mu i_1}) \ldots \chi_{m_s j_s}(x_{\mu i_s})].$$

Тогда по определению (4.32)

$$\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) = \left\{\sum_j |B_j^i|^q\right\}^{1/q}. \tag{4.39}$$

Рассмотрим конечную сумму Хаара, содержащую только функции из выделенных групп $m_1, \ldots, m_s$:

$$g^i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) = \sum_j \operatorname{sgn} B_j^i |B_j^i|^{q-1} \chi_{m_1 j_1}(x_{i_1}) \ldots \chi_{m_s j_s}(x_{i_s}).$$

Абсолютные величины коэффициентов Фурье — Хаара этой функции $|c_k^i| = |B_j^i|^{q-1}$, если $(i_1, \ldots, i_s)$ — отмеченные индексы и k_ν принадлежат выделенным группам m_ν; в противном случае $c_k^i = 0$. Поэтому по формуле (4.9) нетрудно вычислить, что

$$A_p^{i_1 \ldots i_s}(g^i) = \left\{\sum_j |B_j^i|^q\right\}^{1/p} \prod_{\nu=1}^{s} 2^{\frac{m_\nu - 1}{2}}, \tag{4.40}$$

а по формуле (4.31)

$$\delta(g^i) = -\frac{1}{N} \prod_{\tau=1}^{s} 2^{\frac{m_\tau - 1}{2}} \sum_j \operatorname{sgn} B_j^i |B_j^i|^{q-1} \sum_{\mu=0}^{N-1} \operatorname{sgn} \prod_{\nu=1}^{s} \chi_{m_\nu j_\nu}(x_{\mu i_\nu}) =$$

$$= -\frac{1}{N} \prod_{\nu=1}^{s} 2^{\frac{m_\nu - 1}{2}} \sum_j |B_j^i|^q.$$

Последнее соотношение вместе с (4.39) и (4.40) показывает, что

$$\delta(g^i) = -\frac{1}{N} A_p^{i_1\ldots i_s}(g^i)\,\Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma).$$

Выберем теперь функцию

$$g(P) = -\hat{\sum} [A_{i_1\ldots i_s} / A_p^{i_1\ldots i_s}(g^i)]\, g^i(x_{i_1},\ldots, x_{i_s}).$$

Легко проверить, что для этой функции выполняется равенство (4.38) и в то же время $A_p{}^{i_1\ldots i_s}(g) = A_{i_1\ldots i_s}$ при любых $i_1,\ldots, i_s$. Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

О наилучших сетках на классах $S_p\,(A_{i_1\ldots i_s})$.

Лемма 5. *Для любой сетки* $\Sigma = \{P_0, P_1,\ldots, P_{N-1}\}$

$$N^{1/q} \leqslant \Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma) \leqslant N. \tag{4.41}$$

Доказательство. Некоторые из проекций точек P_μ на $K_{i_1\ldots i_s}$ могут совпадать. Обозначим $Q_0,\ldots$ $\ldots, Q_{N_1-1}$ все различные проекции ($N_1 \leqslant N$), и пусть n_μ — кратность Q_μ, так что $n_0 + n_1 + \ldots + n_{N_1-1} = N$.

Рассмотрим разбиение m грани $K_{i_1\ldots i_s}$, удовлетворяющее требованиям леммы 4 (иначе говоря, одно из наименьших существенных разбиений грани). Так как каждая из точек Q_μ принадлежит одному и только одному из параллелепипедов Π_k этого разбиения, то из (4.36) следует, что

$$\Big\{\sum_j \big| S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)\big|^q\Big\}^{1/q} = \\ = \Big\{\sum_{\mu=0}^{N_1-1} (n_\mu)^q\Big\}^{1/q} \geqslant \Big\{\sum_{\mu=0}^{N_1-1} n_\mu\Big\}^{1/q} = N^{1/q}.$$

С другой стороны, при любом разбиении m для любого Π_k

$$\big| S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)\big| \leqslant S_N^i(\Pi_k),$$

так что

$$\Big\{\sum_j \big| S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)\big|^q\Big\}^{1/q} \leqslant \\ \leqslant \Big\{\sum_j [S_N^i(\Pi_k)]^q\Big\}^{1/q} \leqslant \Big\{\sum_j S_N^i(\Pi_k)\Big\} = N.$$

Верхняя оценка (4.41) реализуется, например, в случае, когда $P_0 = P_1 = \ldots = P_{N-1}$, так как тогда при любом разбиении m все Π_k будут пустыми и только в одном из них ($\Pi_{k'}$) будет лежать одна N-кратная точка, так что $|S_N^i(V_{k'}^+) - S_N^i(V_{k'}^-)| = N$.

Нижняя оценка (4.41) также точная. Она реализуется, например, в случае, когда $N = M^s$ и проекции точек $P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}$ на $K_{i_1 \ldots i_s}$ образуют равномерную сетку, состоящую из точек с координатами

$$(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) = \left(\frac{r_1 + \beta_1}{M}, \ldots, \frac{r_s + \beta_s}{M}\right),$$

где $r_1, \ldots, r_s$ пробегают независимо друг от друга значения $0, 1, \ldots, M-1$, а числа β_ν фиксированы: $0 \leqslant \beta_\nu < 1$. В § 1 гл. 5 доказано, что для такой сетки $\Phi_q^{i_1 \ldots i_s} = N^{1/q}$ (см. ниже (5.4)).

До сих пор все результаты, полученные в гл. 2 для одномерных квадратурных формул на классах $S_p(A)$, хорошо обобщались на n-мерные квадратурные формулы на классах $S_p(A_{i_1, \ldots i_s})$. В этом месте, однако, появляется существенное различие: неравенства (2.32) позволили легко построить наилучшие формулы, для которых $\varphi_q = N^{1/q}$, а неравенства (4.41), представляющие собой прямое обобщение (2.32), не позволяют этого сделать. Ибо при $n \geqslant 2$, по-видимому, не существует такой сетки Σ, у которой $\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) = N^{1/q}$ одновременно для всех возможных наборов $i_1, \ldots, i_s$ (это утверждение доказано лишь при $q = \infty$). И это затрудняет нахождение наилучших сеток интегрирования.

Ниже в гл. 6 построены семейства сеток, для которых $\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) \leqslant CN^{-1/q}$ при любых $i_1, \ldots, i_s$. Очевидно, такие сетки обеспечивают наилучший возможный порядок сходимости квадратур $R = O(N^{-1/p})$ на классах $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$.

Неравномерности. Числа $\Phi_\infty^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma)$ мы будем называть *неравномерностями сетки Σ на гранях $K_{i_1 \ldots i_s}$*. В соответствии с (4.35)

$$\Phi_\infty^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) = \sup_k |S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)|, \tag{4.42}$$

где верхняя грань берется по всем двоичным параллелепипедам Π_k (иначе говоря, и по всем разбиениям m, и по всем параллелепипедам каждого разбиения j).

Из вспомогательного неравенства (9.3) (стр. 279) видно, что если $1 < q < q' < \infty$, то

$$\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma) \leqslant \Phi_{q'}^{i_1\ldots i_s}(\Sigma) \leqslant \Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma). \tag{4.43}$$

Очевидно, $\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$ может принимать только целочисленные значения и $1 \leqslant \Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma) \leqslant N$.

Л е м м а 6. *Для любой сетки Σ при любых $i_1, \ldots, i_s$ справедливы неравенства*

$$\Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma) \leqslant N^{1/q}\left[\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)\right]^{1/p}. \tag{4.44}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно,

$$\sum_j |S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)|^q \leqslant (\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s})^{q-1} \sum_j S_N^i(\Pi_k) =$$
$$= N(\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s})^{q-1},$$

откуда сразу вытекает (4.44).

Оценка погрешности на классах $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$. Пусть $f(P) \in H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$. Тогда $f(P) \in S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ при $p > 1/\alpha$ и по теореме 1 ряд (4.6) сходится абсолютно и равномерно. Обозначим разноразмерные слагаемые в (4.6) через $f^{i_1\ldots i_s}(P)$:

$$f(P) = c_1 + \hat{\sum} f^{i_1\ldots i_s}(P).$$

Так как функционал (4.30) линейный, то

$$\delta(f) = \hat{\sum} \delta(f^{i_1\ldots i_s}). \tag{4.45}$$

Рассмотрим отдельно функцию $f^{i_1\ldots i_s}$. Если $p > 1/\alpha$, то $f^{i_1\ldots i_s} \in S_p(A'_{i'_1\ldots i'_s})$, где все $A'_{i'_1\ldots i'_s}(f)$, за исключением одного $A'_{i_1\ldots i_s} = A_p^{i_1\ldots i_s}(f^{i_1\ldots i_s}) = A_p^{i_1\ldots i_s}(f)$, равны нулю. По теореме 3

$$|\delta(f^{i_1\ldots i_s})| \leqslant \frac{1}{N} A_p^{i_1\ldots i_s}(f)\,\Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma).$$

Воспользуемся оценками леммы 6 и теоремы 2:

$$|\delta(f^{i_1\ldots i_s})| \leqslant N^{-1/p}[\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)]^{1/p} L_{i_1\ldots i_s}(2^{1+\alpha}-2^{1+1/p})^{-s}.$$

Последнее неравенство справедливо при любом $p > 1/\alpha$. Будем считать, что N достаточно велико ($N > e^{s/\alpha}$), и выберем p так, чтобы $1/p = \alpha - (s/\ln N)$. Тогда

$$2^\alpha - 2^{1/p} = 2^\alpha[1 - e^{-(s/\log_2 N)}] = (2^\alpha s/\log_2 N)[1+O(\ln^{-1} N)],$$

$$(\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}/N)^{1/p} = (\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}/N)^\alpha e^{s(1-\ln\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}/\ln N)} \leqslant e^s(\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}/N)^\alpha.$$

Подставив эти выражения в последнее неравенство, получим оценку

$$|\delta(f^{i_1\ldots i_s})| \leqslant L_{i_1\ldots i_s}[\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)/N]^\alpha(\overline{B}_s \log_2 N)^s,$$

где

$$\overline{B}_s = [e/(2^{1+\alpha}s)][1 + O(\ln^{-1} N)]. \tag{4.46}$$

Наконец, используя (4.45), выведем окончательную оценку и сформулируем доказанную теорему.

Теорема 4. *Какова бы ни была сетка* $\Sigma = \{P_0, \ldots, P_{N-1}\}$, *для погрешности квадратурной формулы* (4.29) *на классе функций* $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ *справедлива оценка*

$$R \leqslant \hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}(\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}/N)^\alpha(\overline{B}_s \log_2 N)^s, \tag{4.47}$$

где $\overline{B}_s \to e/(2^{1+\alpha}s)$, когда $N \to \infty$.

Замечание. При $n = 1$ из (4.47) вытекает (2.29), где, как мы видели, отбросить $\log_2 N$ нельзя.

Квадратурные формулы с неравными весами. Точно так же, как это было сделано в гл. 2 для случая одной переменной, можно вместо квадратурной формулы (4.29) рассмотреть формулу (4.1). Вместо (4.37) получим для погрешности формулы (4.1) на классе $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ выражение

$$R = \hat{\sum} A_{i_1\ldots i_s}\Psi_q^{i_1\ldots i_s},$$

а функции $\Psi_q^{i_1\ldots i_s}$ зависят и от $P_0, \ldots, P_{N-1}$, и от $C_0, \ldots, C_{N-1}$. Явное выражение для $\Psi_q^{i_1\ldots i_s}$ вполне аналогично формуле (4.35) для $\Phi_q^{i_1 \dots i_s}$:

$$\Psi_q^{i_1 \dots i_s} = \sup_{m_1, \dots, m_s} \left\{ \sum_{j_1, \dots, j_s} | \sigma^{i_1 \dots i_s} (V_k^+) - \sigma^{i_1 \dots i_s} (V_k^-) |^q \right\}^{1/q},$$

где $\sigma^{i_1 \dots i_s} (V)$ — сумма весов, соответствующих тем узлам, проекции которых на $K_{i_1 \dots i_s}$ принадлежат V.

Из вспомогательного неравенства (9.4) (стр. 280) нетрудно вывести оценку снизу: *для любой формулы* (4.1)

$$\Psi_q^{i_1 \dots i_s} \geqslant \left\{ \sum_{\mu=0}^{N-1} (C_\mu)^q \right\}^{1/q} \geqslant N^{-1/p},$$

совпадающую с нижней границей для $\Phi_q^{i_1 \dots i_s}/N$. Отсюда следует, что применение более общих квадратурных формул вида (4.1) не может улучшить порядка сходимости квадратур на $S_p (A_{i_1 \dots i_s})$.

Понятно теперь, почему мы ограничились рассмотрением формул вида (4.29) с равными весами: их исследование аналитически проще и в то же время позволяет построить сетки, реализующие этот наилучший порядок сходимости $R = O (N^{-1/p})$. К тому же для практического применения формулы с равными весами значительно удобнее, особенно при больших N.

§ 3. Величины $\varphi_q (\Sigma)$ в n-мерном случае

Определение. Рассмотрим произвольную сетку $\Sigma = \{P_0, \dots, P_{N-1}\}$ в K^n. Назовем $\varphi_q (\Sigma)$ наибольшую среди всех $\Phi_q^{i_1 \dots i_s} (\Sigma)$:

$$\varphi_q (\Sigma) = \max_{i_1, \dots, i_s} \Phi_q^{i_1 \dots i_s}(\Sigma), \tag{4.48}$$

где максимум берется по всем системам отмеченных индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_s \leqslant n$, $s = 1, 2, \dots, n$.

Погрешность формулы (4.29) на линейных пространствах S_p и H_α. Рассмотрим разность (4.30) на пространстве S_p. Из теоремы 3 и формул (4.26) и (4.48) следует, что если $f(P) \in S_p$, то

$$|\delta(f)| \leqslant \frac{1}{N} \varphi_q(\Sigma) \|f\|_{S_p}.$$

Нетрудно доказать, что оценка эта точная. В самом деле, как показывает (4.48), можно найти такую грань $K_{i_1 \ldots i_s}$, что $\varphi_q(\Sigma) = \Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma)$. Затем так же, как при доказательстве теоремы 3, можно построить функцию $g(P)$, для которой все $A_p^{i'_1 \ldots i'_s}(g) = 0$, за исключением $A_p^{i_1 \ldots i_s}(g)$, и для которой справедливо равенство (4.38). Так как в этом случае $\|g\|_{S_p} = A_p^{i_1 \ldots i_s}(g)$, то из (4.38) вытекает равенство

$$\delta(g) = \frac{1}{N} \varphi_q(\Sigma) \|g\|_{S_p}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Т е о р е м а 3'. *Какова бы ни была сетка* $\Sigma = \{P_0, \ldots \ldots, P_{N-1}\}$, *норма функционала* (4.30) *на пространстве* S_p *равна*

$$\|\delta\| = \frac{\varphi_q(\Sigma)}{N}. \tag{4.49}$$

Пусть теперь $f(P) \in H_\alpha$. Выберем для $f(P)$ наименьшие возможные определяющие постоянные $L_{i_1 \ldots i_s}$ (см. стр. 143) и воспользуемся теоремой 4. Получим неравенство

$$|\delta(f)| \leqslant \|f\|_{H_\alpha} (\varphi_\infty/N)^\alpha \sum (\bar{B}_s \log_2 N)^s,$$

где $\bar{B}_s$ определяется формулой (4.46).

Главный член в сумме, стоящей справа,— это член с $s = n$. Поэтому оценку $\|\delta\|$ на пространстве H_α можно записать так:

Т е о р е м а 4'. *Какова бы ни была сетка* $\Sigma = \{P_0, \ldots \ldots, P_{N-1}\}$, *норма функционала* (4.30) *на пространстве* H_α

$$\|\delta\| \leqslant [\varphi_\infty(\Sigma)/N]^\alpha (\bar{B}_n \log_2 N)^n, \tag{4.50}$$

где $\bar{B}_n \to e^{\prime}(2^{1+\alpha} n)$ *при* $N \to \infty$.

Некоторые свойства $\varphi_q(\Sigma)$. Следующие свойства вытекают непосредственно из определения (4.48) и соответствующих свойств $\Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$.

1°.

$$\varphi_q(\Sigma) = \max_i \sup_m \left\{ \sum_j | S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)|^q \right\}^{1/q}.$$

2°. Существует хотя бы одна такая грань $K_{i_1\ldots i_s}$ и хотя бы одно разбиение m этой грани такое, что

$$\varphi_q(\Sigma) = \left\{ \sum_j | S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)|^q \right\}^{1/q}.$$

3°. Для любой сетки Σ, состоящей из N точек,

$$N^{1/q} \leqslant \varphi_q(\Sigma) \leqslant N, \tag{4.51}$$

однако при $n \geqslant 2$ оценка (4.51) снизу не является точной*).

4°. Для любой сетки Σ, состоящей из N точек,

$$\varphi_q(\Sigma) \leqslant N^{1/q} [\varphi_\infty(\Sigma)]^{1/p}, \tag{4.52}$$

где $\varphi_\infty(\Sigma)$ принимает только целочисленные значения:

$$\varphi_\infty(\Sigma) = \max_i \sup_k | S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)|.$$

Величину $\varphi_\infty(\Sigma)$ мы будем называть *неравномерностью* сетки Σ.

---

*) В то же время неравенство (4.51) нельзя заменить неравенством

$$(1+\varepsilon) N^{1/q} \leqslant \varphi_q(\Sigma) \leqslant N,$$

какова бы ни была постоянная $\varepsilon > 0$.

В самом деле, в гл. 6 построены сетки (названные Π_τ-сетками) со сколь угодно большим числом точек $N = 2^\nu$, для которых $\varphi_\infty \leqslant 2^{n-1+\tau}$. Постоянная τ от N не зависит. Для таких сеток согласно (4.52)

$$\varphi_q \leqslant N^{1/q} 2^{(n-1+\tau)/p},$$

Если выбрать q достаточно близким к 1, то $p = (1 - q^{-1})^{-1}$ будет сколь угодно большим и $2^{(n-1+\tau)/p} < 1 + \varepsilon$.

5°. Если $1 < q < q' < \infty$, то

$$\varphi_\infty(\Sigma) \leqslant \varphi_{q'}(\Sigma) \leqslant \varphi_q(\Sigma). \tag{4.53}$$

Назовем сетку $\Sigma = \{P_0, \ldots, P_{N-1}\}$ *сеткой общего положения*, если проекции всех P_μ на каждую из координатных осей различны: $x_{\mu i} \neq x_{\nu i}$ при $\mu \neq \nu$.

6°. Для любой сетки Σ можно указать натуральные числа $M_1, \ldots, M_n$ такие, что при любом сдвиге узлов P_μ, если только все координаты $x_{\mu s}$ останутся в тех же двоичных отрезках $l_{M_s j}$, значение $\varphi_q(\Sigma)$ не увеличится; если Σ — сетка общего положения, то значение $\varphi_q(\Sigma)$ не изменится.

Для доказательства этих утверждений можно использовать такие же рассуждения, как при доказательстве леммы 4. Находим наименьшие существенные разбиения и соответствующие им Π_k; значения $S_N^i(V_k^+)$ для более крупных Π_k от наших сдвигов не изменятся, а для более мелких Π_k разность $|S_N^i(V_k^+) - S_N^i(V_k^-)|$ может только уменьшиться, если раздвинутся совпадающие проекции. В случае сетки общего положения уменьшение этой величины тоже невозможно.

Доказанное свойство можно назвать *устойчивостью* $\varphi_q(\Sigma)$. Из него, в частности, вытекает, что наилучшие сетки можно искать среди сеток, у которых координаты всех точек двоично рациональны.

О плоских сетках ($n = 2$). Выше упоминалось, что при $n \geqslant 2$, по-видимому, нет таких сеток, для которых $\varphi_q(\Sigma) = N^{1/q}$. Чтобы доказать это утверждение, достаточно доказать, что таких сеток нет при $n = 2$. Мы докажем это для случая $q = \infty$.

Теорема 5. *Для любой сетки Σ в квадрате K^2 с числом точек $N \geqslant 2$*

$$\varphi_\infty(\Sigma) \geqslant 2. \tag{4.54}$$

Доказательство. Во-первых, рассмотрим случай, когда среди точек сетки найдутся $N_1 \geqslant 2$ точек с одинаковыми абсциссами (случай одинаковых ординат рассматривается так же). Выберем двоичный прямоугольник вида $l_{mj} \times [0, 1]$ так, чтобы он не содержал никаких точек сетки, кроме упомянутых N_1 точек (рис. 4.6). Рассмотрим проекции сетки на ось Ox_1. В отрезок l_{mj} попадут только N_1 совпадающих проекций, так что $|S_N^1(l_{mj}^+) - S_N^1(l_{mj}^-)| = N_1 \geqslant 2$. Но тогда $\Phi_\infty^1(\Sigma) \geqslant 2$ и $\varphi_\infty(\Sigma) \geqslant 2$.

Рассмотрим теперь сетку общего положения. Выделим последовательность двоичных разбиений типа $(m, 1)$ (то

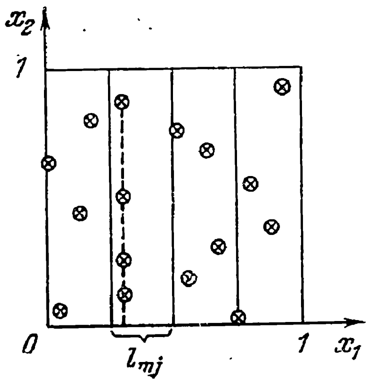

Рис. 4.6.

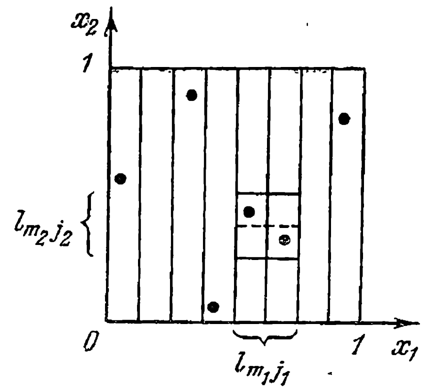

Рис. 4.7.

есть состоящих из прямоугольников $l_{mj} \times [0, 1]$, $1 \leqslant j \leqslant 2^{m-1}$) при $m = 1, 2, \ldots$ При всех достаточно больших m каждый прямоугольник такого разбиения либо пуст, либо содержит одну точку сетки. Обозначим через $m_1 + 1$ наименьшее m, обладающее таким свойством. Тогда хотя бы один из прямоугольников разбиения $(m_1, 1)$ должен содержать две точки (рис. 4.7). Более того, из этих двух точек одна лежит в левой, а другая — в правой половине $l_{m_1 j_1}$.

Рассмотрим двоичные прямоугольники типа $l_{m_1, j_1} \times l_{mj}$ и выберем среди них наименьший $\Pi_{k_1k_2}$, содержащий обе точки. Очевидно (рис. 4.7) обе точки окажутся в одноименных квадрантах $\Pi_{k_1k_2}$, так что $|S_N^{12}(V_{k_1k_2}^+) - S_N^{12}(V_{k_1k_2}^-)| = 2$. Но тогда $\Phi_\infty^{12}(\Sigma) \geqslant 2$ и $\varphi_\infty(\Sigma) \geqslant 2$.

Пример 1. Выберем сетку, состоящую из $N = 13$ точек с координатами $x_{\mu 1} = \mu/13$, $x_{\mu 2} = 8\mu/13 \pmod 1$, $0 \leqslant \mu \leqslant 12$. Она построена на рис. 4.8. Здесь же нанесены прямые $x_2 = 8x_1 \pmod 1$, на которых все эти точки расположены, и прямые $x_1 = j_1/8$ и

$x_2 = j_2/8$, позволяющие без труда рассмотреть все существенные для подсчета φ_q двоичные разбиения. Очевидно, $\Phi_q^1 = 13^{1/q}$, $\Phi_q^2 = 13^{1/q}$.

Значение Φ_q^{12} определяется двумя разбиениями: типа (1, 2) и типа (4,1). В разбиении (1, 2) всего два прямоугольника:

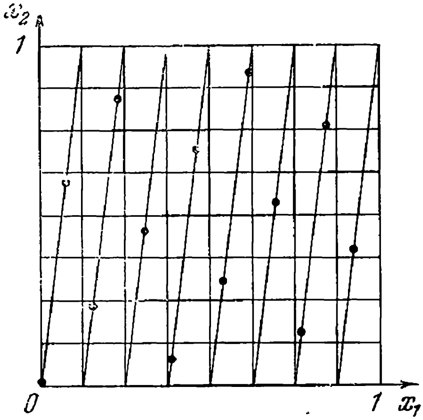

Рис. 4.8.

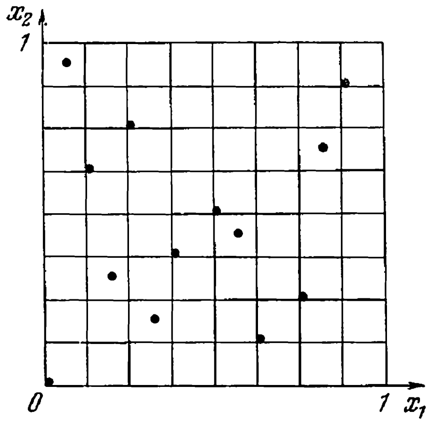

Рис. 4.9.

$\Pi_{23} = [0, 1]\times[0, 1/2)$ и $\Pi_{24} = [0, 1]\times[1/2, 1]$. Для этого разбиения

$$|S_N^{12}(V_{23}^+) - S_N^{12}(V_{23}^-)|^q + |S_N^{12}(V_{24}^+) - S_N^{12}(V_{24}^-)|^q = 3^q + 2^q.$$

В разбиении (4, 1) всего 8 прямоугольников $\Pi_{(j)} = l_{4j} \times [0, 1]$; для этого разбиения

$$\sum_{j=1}^{8} |S_N^{12}(V_{(j)}^+) - S_N^{12}(V_{(j)}^-)|^q = 5\cdot 2^q + 3.$$

Неравномерности по всем другим разбиениям меньше, чем по этим двум разбиениям. Поэтому

$$\Phi_q^{12} = \max\,[(3^q + 2^q)^{1/q};\quad (5\cdot 2^q + 3)^{1/q}].$$

А так как $5\cdot 2^q + 3 > 13$ при $q > 1$, то $\varphi_q = \Phi_q^{12}$.

При всех достаточно больших q (начиная с $q = 3{,}570$) величина $\varphi_q = (3^q + 2^q)^{1/q}$, откуда следует, что $\varphi_\infty = 3$. Впрочем, в этом легко убедиться, рассмотрев прямоугольник $\Pi_{23} = [0, 1] \times [0, 1/2)$, для которого $|S_N^{12}(V_{23}^+) - S_N^{12}(V_{23}^-)| = 3$.

Пример 2. Выберем сетку, состоящую из $N = 13$ точек с координатами $x_{\mu 1} = p(\mu)$, $x_{\mu 2} = q(\mu)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 12$ (см. таблицу на стр. 127). Эта сетка построена на рис. 4.9, на котором нанесены также прямые $x_1 = j_1/8$ и $x_2 = j_2/8$, позволяющие рассмотреть все существенные для подсчета φ_q двоичные разбиения. И в этом примере $\Phi_q^1 = \Phi_q^2 = 13^{1/q}$.

При оценке Φ_q^{12} оказывается, что четыре разбиения — (1,4), (2, 3), (3, 2) и (4, 1) — дают одинаковый результат:

$$\sum_j |S_N^{12}(V_k^+) - S_N^{12}(V_k^-)|^q = 5\cdot 2^q + 3.$$

Следовательно, в этом примере $\varphi_q = (5\cdot 2^q + 3)^{1/q}$ и $\varphi_\infty = 2$.

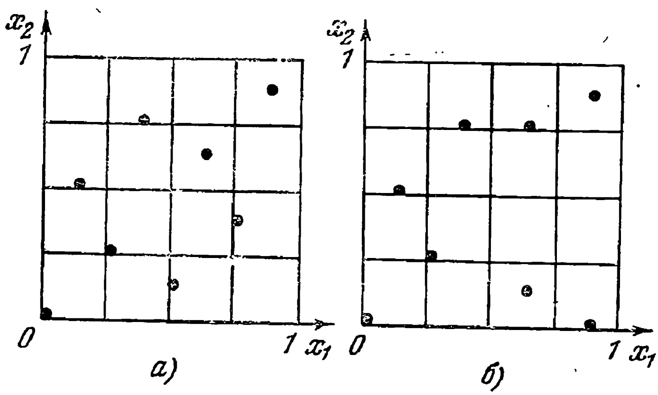

Рис. 4.10.

Пример 3. Выберем сетку, состоящую из $N = 8$ точек с координатами $x_{\mu 1} = \mu/N$, $x_{\mu 2} = p(\mu)$, $0 \leqslant \mu \leqslant 7$, изображенную на рис. 4.10, *а*. Легко проверить, что для этой сетки $\Phi_q^1 = \Phi_q^2 = 8^{1/q}$, $\Phi_q^{12} = 2\cdot 4^{1/q}$, так что $\varphi_q = 2\cdot 4^{1/q}$.

Изменим теперь положение точек в правой половине квадрата и рассмотрим сетку, изображенную на рис. 4.10, *б*. Значения Φ_q^1 и Φ_q^2 стали хуже: $\Phi_q^1 = \Phi_q^2 = (2\cdot 2^q + 4)^{1/q}$. Однако значение Φ_q^{12} улучшилось: $\Phi_q^{12} = (2\cdot 2^q + 4)^{1/q}$ (см. разбиение типа (2.3)). Значит, $\varphi_q = (2\cdot 2^q + 4)^{1/q} < 2\cdot 4^{1/q}$.

В этом примере улучшение φ_q при $q < \infty$ достигнуто ценой некоторого ухудшения одномерных проекций.

По отношению к сетке, изображенной на рис. 4.10, *а*, «худшая», функция — это $g(x_1, x_2) = \sum_{j_1, j_2 = 1}^{2} \chi_{2j_1}(x_1)\chi_{2j_2}(x_2)$. Для этой функции $\| g \|_{S_p} = 2\cdot 4^{1/p}$, а погрешность ее

$$\delta(g) = (1/8) \sum_{\mu=0}^{7} g(x_{\mu 1}, x_{\mu 2}) = 2.$$

По отношению к сетке рис. 4.10, *б* «худшая» функция другая:

$$g(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{j+1} \chi_{21}(x_1)\chi_{3j}(x_2) + \\ + 2^{q-1}\chi_{22}(x_1)[-\chi_{31}(x_2) + \chi_{34}(x_2)].$$

Для нее $\| g \|_{S_p} = 2^{3/2}(4 + 2\cdot 2^q)^{1/p}$, а погрешность ее

$$\delta(g) = (1/8) \sum_{\mu=0}^{7} g(x_{\mu 1}, x_{\mu 2}) = 2^{-3/2}(4 + 2\cdot 2^q).$$

Из этого примера видно, что минимизировать φ_q при $q < \infty$ не так-то просто.

Неравномерность и отклонение. Рассмотрим произвольную сетку Σ, состоящую из N точек куба K^n. Пусть

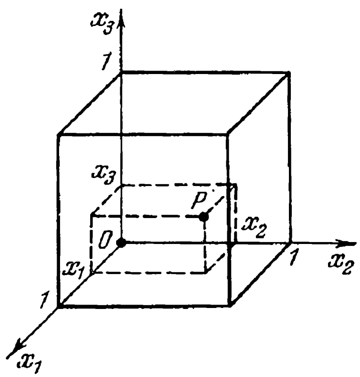

Рис. 4.11.

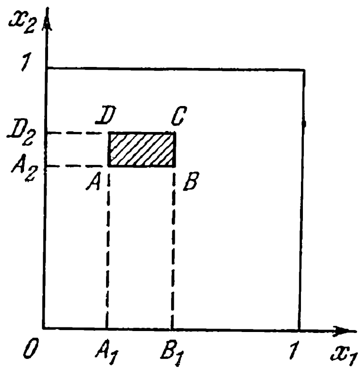

Рис. 4.12.

$S_N(x_1, \ldots, x_n)$ — число точек сетки, принадлежащих параллелепипеду $[0, x_1)\times \ldots \times[0, x_n)$ (если $x_s = 1$, то вместо $[0, x_s)$ берем $[0, 1]$) (рис. 4.11). *Отклонением* сетки Σ

называется величина

$$D(\Sigma)=\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in K^n}|S_N(x_1,\ldots,x_n)-Nx_1\ldots x_n|. \quad (4.55)$$

Лемма 7. *Для любой сетки Σ в K^n*

$$\varphi_\infty(\Sigma)\leqslant 4^n D(\Sigma). \quad (4.56)$$

Доказательство. Произвольный параллелепипед Π с ребрами, параллельными координатным осям, можно представить в виде алгебраической суммы 2^n параллелепипедов типа $[0, x_1)\times\ldots\times[0, x_n)$; например, на рис. 4.12 (где $n=2$)

$$ABCD=OB_1CD_2-OB_1BA_2-OA_1DD_2+OA_1AA_2.$$

Объем Π можно записать в виде такой же алгебраической суммы объемов этих 2^n параллелепипедов; на рис. 4.12

$$V_{ABCD}=V_{OB_1CD_2}-V_{OB_1BA_2}-V_{OA_1DD_2}+V_{OA_1AA_2}.$$

Поэтому для любого Π

$$S_N(\Pi)-N|\Pi|=\sum_{j=1}^{2^n}[S_N(\Pi_{(j)})-N|\Pi_{(j)}|],$$

где каждый $\Pi(j)$ — это параллелепипед типа $[0, x_1)\times\ldots$ $\ldots\times[0, x_n)$. Отсюда следует, что $S_N(\Pi)=N|\Pi|+\eta$, где $|\eta|\leqslant 2^n D(\Sigma)$.

Последняя оценка справедлива для каждого из 2^n октантов заданного двоичного параллелепипеда Π_k. Значит,

$$S_N(V_k^+)-S_N(V_k^-)=\frac{1}{2}N|\Pi_k|+\sum\eta^+-\frac{1}{2}N|\Pi_k|-\sum\eta^-,$$

откуда

$$|S_N(V_k^+)-S_N(V_k^-)|\leqslant 2^n|\eta|\leqslant 4^n D(\Sigma).$$

Мы доказали, таким образом, что $\Phi_\infty^{12\ldots n}(\Sigma)\leqslant 4^n D(\Sigma)$.

Точно таким же образом можно рассмотреть проекцию сетки на грань $K_{i_1\ldots i_s}$ и доказать, что $\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)\leqslant 4^s D(\Sigma)$. А так как $s\leqslant n$, то тем самым лемма доказана.

Критерии равномерного распределения (р.р.). Мы ограничимся формулировками трех теорем, представляющих собой обобщение теорем 1—3 из гл. 3 (ссылки на литературу см. там же).

Рассмотрим произвольную последовательность точек $P_0, P_1, \ldots, P_\mu, \ldots$ в K^n. Обозначим Σ_N начальный участок этой последовательности: $\Sigma_N = \{P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}\}$. Пусть S_N (П) — число точек участка Σ_N, принадлежащих П.

Определение. Последовательность $\{P_\mu\}$ называется *р. р.* в K^n, если для любого П (с ребрами, параллельными координатным осям)

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N(\Pi)}{N} = |\Pi|.$$

Теорема 6. *Если $\{P_\mu\}$ р. р., то для любой интегрируемой по Риману функции $f(P)$*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} f(P_\mu) = \int_{K^n} f(P)\,dP; \tag{4.57}$$

если соотношение (4.57) справедливо для любой интегрируемой по Риману функции $f(P)$, то $\{P_\mu\}$ р. р.

Теорема 7. *Для того чтобы $\{P_\mu\}$ была р. р., необходимо и достаточно, чтобы*

$$D(\Sigma_N) = o(N).$$

Теорема 8. *Если $\{P_\mu\}$ р. р., то при всех $1 < q \leqslant \infty$*

$$\varphi_q(\Sigma_N) = o(N); \tag{4.58}$$

если (4.58) справедливо при каком-либо q, то $\{P_\mu\}$ р. р.

Заметим, что из соответствующего результата, приведенного в гл. 3, следует, что для любой последовательности $\limsup\limits_{N\to\infty} D(\Sigma_N) = \infty$. Однако в гл. 6 построены такие последовательности, для которых $\varphi_\infty(\Sigma_N) = O(1)$.

Глава 5

Оценки погрешности для различных сеток

В этой главе получены оценки погрешности квадратурной формулы

$$\int\limits_{K^n} f(P)\,dP \approx \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} f(P_\mu) \tag{5.1}$$

на пространствах функций S_p и H_α для различных типов сеток. Равномерные сетки, рассмотренные в § 1, оказались плохими сетками при больших n. Зато все остальные сетки, изученные в §§ 2 и 3, обеспечивают почти наилучшие порядки сходимости формулы (5.1).

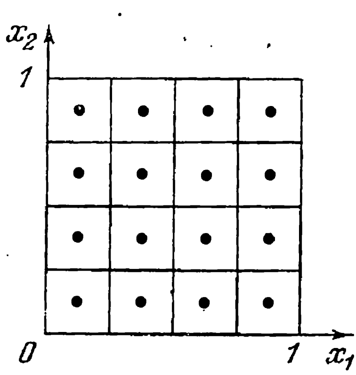

Рис. 5.1.

§ 1. Равномерные сетки

Равномерной сеткой Σ_0 мы называем сетку, состоящую из $N = M^n$ точек с координатами

$$\left(\frac{r_1+\beta_1}{M}, \ldots, \frac{r_n+\beta_n}{M}\right),$$

где $r_1, \ldots, r_n$ пробегают независимо друг от друга все целые значения от 0 до $M-1$ включительно; величины β_ν фиксированы: $0 \leqslant \beta_\nu < 1$. На рис. 5.1 изображена равномерная сетка на квадрате K^2 с $M=4$, $\beta_1=\beta_2={}^1/_2$.

Вычисление неравномерностей сетки Σ_0. Выберем какое-нибудь разбиение $(m_1, \ldots, m_s)$ грани $K_{i_1 \ldots i_s}$. Так как для сетки Σ_0

$$\sum_{\mu=0}^{N-1} \operatorname{sgn} [\chi_{k_1}(x_{\mu i_1}) \cdots \chi_{k_s}(\chi_{\mu i_s})] =$$

$$= \sum_{r_1, \ldots, r_n = 0}^{M-1} \operatorname{sgn} \left[\chi_{k_1} \left(\frac{r_{i_1} + \beta_{i_1}}{M} \right) \cdots \chi_{k_s} \left(\frac{r_{i_s} + \beta_{i_s}}{M} \right) \right] =$$

$$= M^{n-s} \prod_{\nu=1}^{s} \sum_{r_{i_\nu}=0}^{M-1} \operatorname{sgn} \chi_{k_\nu} \left(\frac{r_{i_\nu} + \beta_{i_\nu}}{M} \right),$$

то

$$\left\{ \sum_j \left| \sum_{\mu=0}^{N-1} \operatorname{sgn} \prod_{\nu=1}^{s} \chi_{k_\nu}(x_{\mu i_\nu}) \right|^q \right\}^{1/q} =$$

$$= M^{n-s} \prod_{\nu=1}^{s} \left\{ \sum_{j_\nu=1}^{2^{m_\nu}-1} \left| \sum_{r_{i_\nu}=0}^{M-1} \operatorname{sgn} \chi_{k_\nu} \left(\frac{r_{i_\nu} + \beta_{i_\nu}}{M} \right) \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Взяв верхнюю грань по всевозможным разбиениям $(m_1, \ldots, m_s)$, получим

$$\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma_0) =$$

$$= M^{n-s} \prod_{\nu=1}^{s} \sup_{m_\nu} \left\{ \sum_{j_\nu=1}^{2^{m_\nu}-1} \left| \sum_{r_{i_\nu}=0}^{M-1} \operatorname{sgn} \chi_{k_\nu} \left(\frac{r_{i_\nu} + \beta_{i_\nu}}{M} \right) \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Нетрудно заметить, что стоящие справа после знака Π величины — это значения φ_q для одномерных равномерных сеток, состоящих из M точек $x_{i_\nu} = (r_{i_\nu} + \beta_{i_\nu}) M^{-1}$, $0 \leqslant r_{i_\nu} \leqslant M - 1$ (см., например, рис. 2.7 на стр. 79). В гл. 2 доказано, что для таких сеток $\varphi_q = M^{1/q}$. Поэтому

$$\Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma_0) = M^{n-s+s/q} = M^{n-s/p} = N^{1-\frac{s}{pn}}.$$

Таким образом, нами доказан следующий результат:

Теорема 1. *Для любой равномерной сетки* Σ_0, *состоящей из* N *точек в* K^n, *имеют место равенства*

$$\Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma_0) = N^{1-\frac{s}{pn}}. \tag{5.2}$$

Следствие 1. *Для любой равномерной сетки* Σ_0, *состоящей из* N *точек в* K^n, *имеет место равенство*

$$\varphi_q(\Sigma_0) = N^{1-\frac{1}{pn}}. \tag{5.3}$$

Следствие 2. *Для любой равномерной сетки* Σ_0, *состоящей из* N *точек в* K^n, *имеет место равенство*

$$\Phi_q^{12\ldots n}(\Sigma_0) = N^{1/q}. \tag{5.4}$$

Сравнивая (5.3) с (4.51), мы видим, что равномерные сетки при $n = 1$ являются наилучшими сетками ($\varphi_q = N^{1/q}$), но с увеличением n приближаются к наихудшим ($\varphi_q = N$). Этот результат легко объяснить. Если в качестве частного случая подинтегральной функции $f(P)$ выбрать функцию от одной переменной, скажем $f(x_1)$, то из общего числа $N = M^n$ узлов сетки Σ_0 подавляющее большинство ($M^n - M$ узлов) «пропадает зря»: фактически интеграл от $f(x_1)$ вычисляется лишь по M различным точкам. Произвольная функция $f(P)$, вообще говоря, содержит одномерные слагаемые (см. (4.6)), и поэтому интеграл от нее при большом n также плохо вычисляется по сетке Σ_0.

Хуже всего по сетке Σ_0 интегрируются одномерные слагаемые в (4.6). А вот «существенно n-мерная» часть $f^{12\ldots n}(P)$, как показывает формула (5.4), интегрируется по сетке Σ_0 наилучшим образом. Если бы мы могли эффективно разложить $f(P)$ на разноразмерные слагаемые, то каждое $f^{i_1\ldots i_s}$ можно было бы проинтегрировать наилучшим образом по равномерной сетке в $K_{i_1\ldots i_s}$. К сожалению, разложение (4.6) нельзя осуществить, не зная $c_1 = \int\limits_{K^n} f(P)\,dP$.

Теорема 1 подсказывает в общих чертах, как надо изменить сетку Σ_0, чтобы она стала лучше: надо «немного подвигать» все узлы так, чтобы сетка по возможности сохранила значение $\Phi_q^{12\ldots n}$, но чтобы все точки имели различные проекции на все координатные оси и чтобы проекции на всех гранях $K_{\ldots i_{s1}i}$ были (по возможности) равномерно расположены (рис. 5.2).

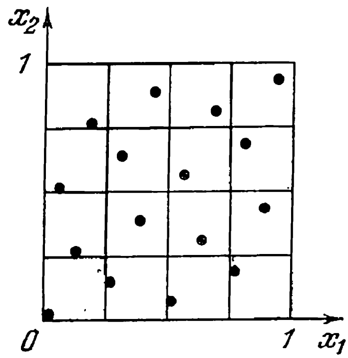

Рис. 5.2.

Неудивительно, что почти все случайные сетки в K^n лучше, чем равномерные сетки при больших n, так как для случайных сеток «пропадание узлов» практически мало вероятно.

Из (5.3) и (4.49) вытекает, что *норма функционала* (4.30) *на пространстве* S_p *в случае сетки интегрирования* Σ_0 *есть*

$$\| \delta \| = N^{-1/pn}.$$

Порядок сходимости равномерных сеток на пространствах H_α. Из (4.47) и (5.2) сразу следует оценка погрешности формулы (5.1) на классах функций H_α $(L_{i_1\ldots i_s})$:

$$| \delta(f) | \leqslant \hat{\Sigma} L_{i_1\ldots i_s} (\bar{B}_s N^{-\alpha/n} \log_2 N)^s, \tag{5.5}$$

где $\bar{B}_s$ определена формулой (4.46). При $n = 1$ (5.5) переходит в оценку (2.30).

Выберем для $f(P)$ из H_α наименьшие определяющие постоянные $L_{i_1\ldots i_s}$ (чтобы $\| f \|_{H_\alpha} = \max\limits_{i_1,\ldots,i_s} L_{i_1\ldots i_s}$). Главными членами в (5.5) при $N \to \infty$ являются члены, соответствующие $s = 1$. Выделяя их, запишем

$$| \delta(f) | \leqslant \| f \|_{H_\alpha} n \bar{B}_1 N^{-\alpha/n} \log_2 N$$

(множитель $1 + O(N^{-\alpha/n})$ можно включить в $\bar{B}_1$). Отсюда следует, что норма функционала (4.30) на пространстве

H_α в случае сетки интегрирования Σ_0 есть

$$\| \delta \| = O\left(N^{-\alpha/n} \ln N\right). \tag{5.6}$$

Порядок оценки (5.6) почти точный: он лучше, чем $N^{-(\alpha/n)+\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$, а в действительности $\| \delta \| = O\left(N^{-\alpha/n}\right)$.

Чтобы доказать последнее утверждение, разделим K^n на N равных кубов с ребром $1/M$, изображенных на рис. 5.1. Каждому из маленьких кубов принадлежит одна точка сетки Σ_0. Рассмотрим один такой куб $K_{0\mu}$ и его точку P_μ:

$$K_{0\mu} = \left[\frac{r_1}{M}, \frac{r_1+1}{M}\right) \times \ldots \times \left[\frac{r_n}{M}, \frac{r_n+1}{M}\right),$$

$$P_\mu = \left(\frac{r_1+\beta_1}{M}, \ldots, \frac{r_n+\beta_n}{M}\right).$$

Легко видеть, что ошибка (4.30) равна

$$\delta(f) = \sum_{\mu=0}^{N-1} \int_{K_{0\mu}} [f(P) - f(P_\mu)]\, dP.$$

Воспользуемся леммой 1 гл. 4:

$$f(P) - f(P_\mu) = \hat{\sum} \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P_\mu),$$

где $\xi_i = x_i - (r_i + \beta_i) M^{-1}$. Так как $f(P) \in H_\alpha$, то

$$\int_{K_{0\mu}} | f(P) - f(P_\mu) |\, dP \leqslant \hat{\sum} L_{i_1 \ldots i_s} \int_{K_{0\mu}} | \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s} |^\alpha\, dP =$$

$$= \hat{\sum} L_{i_1 \ldots i_s} \left(\frac{1}{M}\right)^{n-s} \prod_{\nu=1}^{s} \int_{\frac{r_{i_\nu}}{M}}^{\frac{r_{i_\nu}+1}{M}} \left| x_{i_\nu} - \frac{r_{i_\nu} + \beta_{i_\nu}}{M} \right|^\alpha dx_{i_\nu}.$$

Последние интегралы легко вычисляются:

$$\int_{\frac{r}{M}}^{\frac{r+1}{M}} \left| x - \frac{r+\beta}{M} \right|^\alpha dx = \int_0^{\frac{1}{M}} \left| x - \frac{\beta}{M} \right|^\alpha dx = \frac{\beta^{\alpha+1} + (1-\beta)^{\alpha+1}}{(\alpha+1) M^{\alpha+1}}.$$

Значит,

$$\int\limits_{K_{0\mu}} |f(P)-f(P_\mu)|\,dP \leqslant \frac{1}{N}\hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}\varkappa_{i_1}\ldots\varkappa_{i_s}M^{-\alpha s},$$

где через $\varkappa_i$ обозначены постоянные

$$\varkappa_i=(\alpha+1)^{-1}[\beta_i^{\alpha+1}+(1-\beta_i)^{\alpha+1}]. \tag{5.7}$$

От номера выбранного куба $K_{0\mu}$ эта оценка не зависит. Поэтому, складывая N таких оценок, получим

$$|\delta(f)|\leqslant\hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}\varkappa_{i_1}\ldots\varkappa_{i_s}N^{-\frac{\alpha s}{n}}. \tag{5.8}$$

Оценка (5.8) и есть требуемое уточнение оценки (5.5). Из (5.8) следует, что на H_α порядок $\|\delta\|=O(N^{-\alpha/n})$.

Легко также доказать, что этот порядок точный. Положим $\varkappa=(\alpha+1)^{-1}2^{-\alpha}$, и пусть

$$g(P)=f_1(x_1)+\ldots+f_n(x_n),$$

где все $f_i(x_i)\in H_\alpha(L)$. Очевидно,

$$\delta(g)=\sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_0^1 f_i(x)\,dx-\frac{1}{M}\sum_{r_i=0}^{M-1} f_i\left(\frac{r_i+\beta_i}{M}\right)\right].$$

Из теоремы 3 гл. 2 следует, что можно выбрать функции $f_i(x)$ типа $f_*(x)$ так, чтобы каждая квадратная скобка была не меньше, чем $\varkappa LM^{-\alpha}$, и при этом $\sup\limits_{x,\xi}\{|\Delta_\xi f(x)|\,|\xi|^{-\alpha}\}=L$. Тогда $\|g\|_{H_\alpha}=L$ и $\delta(g)\geqslant n\varkappa LN^{-\alpha/n}$.

Решетчатые сетки. Назовем *решетчатой* сетку, состоящую из $N=M^n$ точек с координатами $(\xi_{1r_1},\ldots,\xi_{nr_n})$, где каждая величина ξ_{ir_i} принимает M различных значений $\xi_{i0},\xi_{i1},\ldots,\xi_{i,M-1}$ (рис. 5.3).

Легко доказать, что использование квадратурной формулы (4.1) с решетчатыми сетками и любыми весами не улучшает порядка сходимости $N^{-\alpha/n}$ на пространстве H_α.

В самом деле, пусть

$$\delta(f)=\int\limits_{K^n} f(P)\,dP-\sum_{r_1,\ldots,r_n=0}^{M-1} C_{r_1\ldots r_n}f(\xi_{1r_1},\ldots,\xi_{nr_n}),$$

где сумма всех $C_{r_1 \ldots r_n}$ равна 1. Положим

$$C'_{r_i} = \sum_{r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_n = 0}^{M-1} C_{r_1 \ldots r_n},$$

так что $\sum\limits_{r_i=0}^{M-1} C'_{r_i} = 1$. Снова выберем $g(P) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$.

Тогда

$$\delta(g) = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_0^1 f_i(x)\, dx - \sum_{r_i=0}^{M-1} C'_{r_i} f_i(\xi_{ir_i}) \right].$$

И в этом случае теорема 3 гл. 2 позволяет выбрать функции $f_i(x)$ так, чтобы

$$\|g\|_{H_\alpha} = L \text{ и } \delta(g) \geqslant n\varkappa L N^{-\alpha/n}.$$

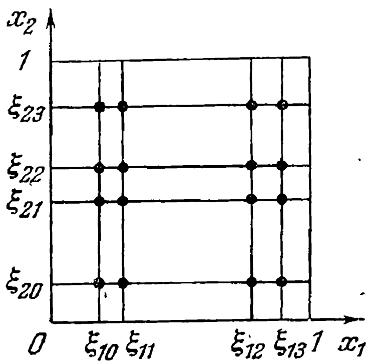

Рис. 5.3.

Для того чтобы вычислить интеграл (5.1), можно его рассматривать как повторный интеграл

$$\int_{K^n} f(P)\, dP = \int_0^1 dx_n \int_0^1 dx_{n-1} \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1$$

и по каждой переменной использовать какую-нибудь одномерную квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 f(x_s)\, dx_s \approx \sum_{r_s=0}^{M-1} C_{sr_s} f(\xi_{sr_s}).$$

Этот метод всегда приводит к квадратурным формулам в K^n с решетчатыми сетками:

$$\int_{K^n} f(P)\, dP \approx \sum_{r_1, \ldots, r_n=0}^{M-1} C_{1r_1} \ldots C_{nr_n} f(\xi_{1r_1}, \ldots, \xi_{nr_n}).$$

Порядки сходимости таких сеток на S_p и H_α не лучше, чем $N^{-1/pn}$ и $N^{-\alpha/n}$. Поэтому при $n > 1$ эти сетки надо считать плохими·

В следующих параграфах указаны сетки, порядки сходимости которых на S_p и H_α лучше, чем $N^{(-1/p)+\varepsilon}$ и $N^{-\alpha+\varepsilon}$ со сколь угодно малым $\varepsilon > 0$.

Наилучшие равномерные сетки. Среди равномерных сеток Σ_0 наилучшими являются сетки с $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 1/2$ (рис. 5.1): при таких β_ν значения $\varkappa_\nu$ минимальны. Если же рассматривать более узкие классы функций, дифференцируемых по всем переменным не менее двух раз [57, 106], то при $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 1/2$ даже порядок сходимости равномерных сеток окажется улучшенным: $\rho = N^{-2/n}$ (вместо $\rho = N^{-1/n}$ для $\beta_\nu \neq 1/2$).

Конечно, при больших n такой порядок сходимости тоже плох. Однако при $n = 2$ (и даже при $n = 3$) наилучшие сетки Σ_0 часто оказываются приемлемыми для практики, особенно если значения N не очень велики и порядок сходимости еще не сказывается решающим образом. (Ср. численный пример на стр. 229, где при $N = 2^8$ точность сетки Σ_0 не уступает точности «хороших» сеток, но становится значительно хуже при бо́льших N.)

§ 2. Параллелепипедальные сетки

Параллелепипедальные сетки были построены Н. М. Коробовым [88] и независимо от него Э. Хлавкой [114]. Исследованием различных свойств этих сеток занимались многие авторы *). Результаты и литература по этому вопросу приведены в [89].

Параллелепипедальная сетка Σ_Π состоит из точек P_μ, $0 \leqslant \mu \leqslant N-1$, с координатами

$$P_\mu = \left(\left\{\frac{a_1\mu}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_n\mu}{N}\right\}\right). \tag{5.9}$$

Число $N > 3$ простое. Числа $a_1, \ldots, a_n$ целые; $\{z\}$ означает дробную часть z.

Для того чтобы Σ_Π представляла собой хорошую сетку интегрирования (для квадратурной формулы (5.1)), надо в качестве $a_1, \ldots, a_n$ выбрать так называемые оптимальные коэффициенты (по модулю N). Справедлива следующая теорема, которую мы приводим без доказательства:

---

*) В том числе К. И. Бабенко, Н. С. Бахвалов, О. В. Бруштлинская, Ван Юань, Я. М. Жилейкин, В. С. Рябенький, А. И. Салтыков, С. А. Смоляк, И. М. Соболь, В. М. Солодов, Хуа Ло-ген, Н. Н. Ченцов, И. Ф. Шарыгин, Ю. Н. Шахов.

Теорема 2 [89]. *Существует такая постоянная $C = C(n)$, что для любой сетки Σ_Π с оптимальными коэффициентами* *)

$$D(\Sigma_\Pi) \leqslant C \ln^n N. \tag{5.10}$$

Из (5.10) и (4.56) вытекает, что для сеток Σ_Π с оптимальными коэффициентами

$$\varphi_\infty(\Sigma_\Pi) \leqslant B_1 \ln^n N. \tag{5.11}$$

Из теорем 3′ и 4′ гл. 4 сразу следует, что в случае сетки интегрирования Σ_Π на S_p

$$\|\delta\| = O(N^{-1/p} \ln^{n/p} N),$$

а на H_α

$$\|\delta\| = O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha n + n} N).$$

Так как наилучшие порядки сходимости на этих классах функций не меньше, чем $N^{-1/p}$ и $N^{-\alpha}$ (даже в одномерном случае), то порядки полученных оценок можно считать почти наилучшими: они лучше, чем $N^{-(1/p)+\varepsilon}$ и $N^{-\alpha+\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$.

Формула (5.11) была впервые доказана в 1959 году (см. [92]) без использования теоремы 2. При этом была получена оценка константы B_1:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}} [\varphi_\infty(\Sigma_\Pi) \ln^{-n} N] \leqslant 2n(2 + 8/\pi)^n.$$

На рис. 4.8 построена сетка Σ_Π с оптимальными коэффициентами, для которой $\varphi_\infty(\Sigma_\Pi) = 3$. Этот пример показывает, что значение $\varphi_\infty(\Sigma_\Pi)$ не обязано быть минимальным.

Некоторые особенности параллелепипедальных сеток. Сетки Σ_Π обладают большим преимуществом перед другими известными сетками в том случае, когда требуется вычислять интегралы от гладких периодических функций. Если рассматривается множество функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенных при всех $x_1, \ldots, x_n$, с периодом 1 по каждой

*) Теорема относится к оптимальным коэффициентам, построенным в лемме 20 книги [89].

из переменных и непрерывными частными производными вида

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \text{ где } 0 \leqslant \alpha_\nu \leqslant \alpha, \quad 0 \leqslant s \leqslant n\alpha$$

(то есть со всеми производными, содержащими не более чем α дифференцирований по каждой из переменных), то сетки Σ_Π с оптимальными коэффициентами обеспечивают оценку

$$|\delta(f)| = O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha n} N), \tag{5.12}$$

которая тем лучше, чем больше число производных $\alpha > 1$.

Вследствие этого в некоторых случаях, когда подынтегральная функция достаточно гладкая, но не периодическая, может оказаться выгодным периодизировать ее (заменой переменных), а уже потом вычислять интеграл.

Неизвестно, обладают ли свойством (5.12) какие-нибудь другие из исследованных в настоящее время многомерных сеток.

В таблице 5.1 приведены по два набора оптимальных коэффициентов в трехмерном кубе ($n = 3$), соответствующих нескольким значениям N.

Таблица 5.1

N	a_1	a_2	a_3	N	a_1	a_2	a_3
101	1	40	85	101	1	48	82
199	1	30	104	199	1	73	155
523	1	78	331	523	1	114	444
1069	1	136	323	1069	1	338	930
2129	1	359	1141	2129	1	937	821
4001	1	722	1154	4001	1	1934	3422

Вычислять точки (5.9) на ЭВМ очень легко. Основное неудобство, связанное с применением параллелепипедальных сеток,— это зависимость $a_1, \ldots, a_n$ от N.

§ 3. Сетки Хэммерсли и последовательности Холтона

В работах [79, 57] с помощью последовательности $\{p(i)\}$ (см. гл. 2) были построены «хорошие» сетки в квадрате K^2. Они состояли из $N = 2^m$ точек с координатами $x_{\mu 1} = p(\mu)$, $x_{\mu 2} = \mu/N$, $0 \leqslant \mu \leqslant N-1$ (см. рис. 4.10, *а*). Дж. Хэммерсли [111] предложил обобщить эту конструкцию на многомерный куб K^n с помощью последовательностей $\{p_r(i)\}$, представляющих собой обобщение $\{p(i)\}$. Он рекомендовал выбрать попарно простые числа $r_1, \ldots, r_{n-1}$ и построить в K^n сетку Σ_H, состоящую из точек P_μ, $0 \leqslant \mu \leqslant N-1$, с координатами

$$(p_{r_1}(\mu), \ldots, p_{r_{n-1}}(\mu), \mu/N). \tag{5.13}$$

Дж. Холтон [110] предложил выбрать n попарно простых чисел $r_1, \ldots, r_n$, построить в K^n последовательность точек $P_0^*, P_1^*, \ldots, P_\mu^*, \ldots$ с координатами

$$P_\mu^* = (p_{r_1}(\mu), \ldots, p_{r_n}(\mu)) \tag{5.14}$$

и в качестве сеток интегрирования Σ^* использовать начальные участки этой последовательности $P_0^*, \ldots, P_{N-1}^*$.

Для сеток Σ_H и Σ^* в [110] были получены оценки отклонения D, а в [94, 97, 113] — оценки погрешности на некоторых классах функций.

Последовательности $\{p_r(i)\}$. Фиксируем натуральное число $r \geqslant 2$. Следующие три определения чисел $p_r(i)$ эквивалентны.

Определение 1. Если в r-ичной системе $i = e_m e_{m-1} \ldots e_1$, то (снова в r-ичной системе) $p_r(i) = 0, e_1 e_2 \ldots e_m$.

Здесь все e_j — r-ичные цифры, то есть могут принимать значения $0, 1, \ldots, r-1$. В десятичной системе

$$i = e_1 + e_2 r + \ldots + e_m r^{m-1},$$
$$p_r(i) = e_1 r^{-1} + e_2 r^{-2} + \ldots + e_m r^{-m}.$$

Определение 2, рекуррентное по группам, состоит из двух правил:

1°. $p_r(0) = 0$; $p_r(r_s) = r^{-(s+1)}$.

2°. Если

$$r^s < i < r^{s+1},$$

то

$$p_r(i) = p_r(r^s) + p_r(i - r^s).$$

Определение 3, рекуррентное. Если в r-ичной системе

$$p_r(i) = 0,\ e_1 e_2 \ldots e_{m-1} e_m,$$

то для получения $p_r(i+1)$ необходимо найти наименьший номер k такой, что $e_k < r - 1$; затем заменить e_k на $1 + e_k$, а все цифры с меньшими номерами (если они есть) заменить нулями; цифры с номерами, большими чем k, остаются без изменения. Значение $p_r(0) = 0$ задано.

Правило вычисления $p_r(i+1)$ по $p_r(i)$ может быть записано в виде формулы:

$$p_r(i+1) = p_r(i) + r^{-(k-1)} + r^{-k} - 1.$$

Сравнивая приведенные определения с определениями $\{p(i)\}$ из гл. 2, легко обнаружить, что $p(i) \equiv p_2(i)$. Доказательство эквивалентности этих трех определений вполне аналогично доказательству из гл. 2 для случая $r = 2$. Поэтому мы его не приводим.

Пример.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$i_{\text{троичное}}$	0	1	2	10	11	12	20	21	22	...
$p_3(i)_{\text{троичное}}$	0	0,1	0,2	0,01	0,11	0,21	0,02	0,12	0,22	...
$p_3(i)$	0	$1/3$	$2/3$	$1/9$	$4/9$	$7/9$	$2/9$	$5/9$	$8/9$	...

На рис. 5.4 приведена блок-схема программы для независимого вычисления любого значения $p_r(i)$ по определению 1, а на рис. 5.5 — блок-схема рекуррентного вычисления $p_r(i)$ по $p_r(i-1)$ (см. определение 3). В обоих случаях предполагаются известными числа r и $1/r$ (ε — произвольное малое положительное число, нужное только

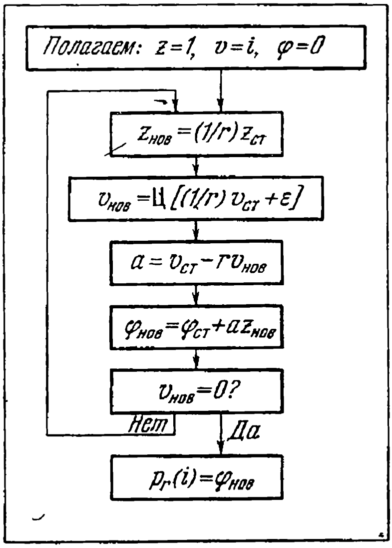

Рис. 5.4.

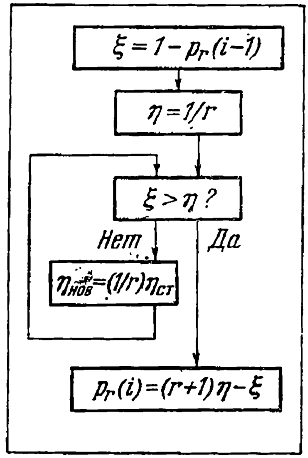

Рис. 5.5

в таких ЭВМ, в которых целое число может оказаться записанным в виде «бесконечной» периодической дроби).

Оценка отклонения сетки Σ^*.

Т е о р е м а 3. *Рассмотрим сетку* $\Sigma^* = \{P_0^*, \ldots, P_{N-1}^*\}$. *Отклонение такой сетки*

$$D(\Sigma^*) \leqslant \prod_{s=1}^{n} (\beta_s \ln N + \gamma_s), \tag{5.15}$$

где $\beta_s = (r_s - 1)/\ln r_s$, $\gamma_s = 2r_s - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о [110]. 1. Выберем произвольное иррациональное число x из $[0, 1]$, так что в r-ичной системе $x = 0, a_0a_1 \ldots a_m \ldots$ и как угодно далеко найдутся $a_m \neq 0$. (Напоминаем, что все a_m — это r-ичные цифры: $0, 1, \ldots, r-1$.) Мы хотим найти все такие μ, что $p_r(\mu) < x$.

Рассмотрим натуральные числа $m = 1, 2, \ldots$ Каждому m поставим в соответствие числа $p_m = b_{m-1}a_{m-2} \ldots a_1a_0$, где b_{m-1} принимает значения $0, 1, \ldots, a_{m-1} - 1$. Очевидно, количество таких p_m — назовем их *допустимыми* — равно a_{m-1}. (Если $a_{m-1} = 0$, то число допустимых p_m равно нулю.)

Рассмотрим теперь сравнение

$$\mu = p_m \pmod{r^m}. \tag{5.16}$$

Если μ удовлетворяет (5.16), то в r-ичной системе оно запишется в виде

$$\mu = \mu_M \ldots \mu_m b_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0;$$

тогда согласно определению

$$p_r(\mu) = 0,\ a_0 a_1 \ldots a_{m-2} b_{m-1} \mu_m \ldots \mu_M < x.$$

Легко показать, что решения сравнений (5.16) при различных $(m,\ p_m)$ не повторяются. В самом деле, пусть μ' — решение сравнения

$$\mu' \equiv p_{m'} \pmod{r^{m'}}.$$

Если $m' > m$, то в r-ичной записи числа μ' будет стоять a_{m-1} там, где в записи μ стоит b_{m-1}. А если $m' = m$, но $p_{m'} \neq p_m$, то в r-ичной записи μ' будет стоять b'_{m-1}, отличное от b_{m-1}.

Докажем теперь, что каждое число μ, для которого $p_r(\mu) < x$, удовлетворяет сравнению (5.16) при каком-то m и допустимом p_m. Пусть в r-ичной системе

$$\mu = \mu_M \ldots \mu_1 \mu_0$$

и $p_r(\mu) = 0,\ \mu_0 \mu_1 \ldots \mu_M < x$. Тогда имеются две возможности.

а) Найдется такое m, что

$$\mu_0 = a_0,\ \mu_1 = a_1,\ \ldots,\ \mu_{m-2} = a_{m-2},\ \mu_{m-1} < a_{m-1}.$$

Положим $p_m = \mu_{m-1} a_{m-2} \ldots a_1 a_0$. Очевидно, μ удовлетворяет сравнению (5.16) с этими m и p_m.

б) Вторая возможность:

$$\mu_0 = a_0,\ \mu_1 = a_1,\ \ldots,\ \mu_M = a_M.$$

Пусть a_{M+k} — первая среди цифр $a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots,$ отличная от нуля. Тогда значению $m_0 = M + k + 1$ отвечает допустимое $p_{m_0} = b_{M+k}a_{M+k-1} \ldots a_1a_0$ с $b_{M+k} = 0$. Очевидно, $p_{m_0} = a_M \ldots a_1a_0 = \mu$ и, конечно, удовлетворяет (5.16) при $m = m_0$.

Итак, множество значений μ таких, что $p_r(\mu) < x$, совпадает с множеством всех решений сравнений (5.16), когда $m = 1, 2, \ldots$, а p_m принимают всевозможные допустимые значения.

2. Чтобы вычислить для сетки Σ^* значение $S_N(x_1, \ldots, x_n)$, выберем в K^n произвольную точку $P = (x_1, \ldots, x_n)$, все координаты которой иррациональны, и найдем все μ такие, что одновременно

$$p_{r_1}(\mu) < x_1, \ldots, p_{r_n}(\mu) < x_n. \tag{5.17}$$

Координату x_s можем записать в r_s-ичной системе:

$$x_s = 0, a_0^{(s)} a_1^{(s)} \ldots a_m^{(s)} \ldots, \tag{5.18}$$

где все $a_m^{(s)}$ могут принимать значения $0, 1, \ldots, r_s - 1$. Исследование предыдущего пункта показывает, что числа μ, удовлетворяющие условиям (5.17),— это решения системы сравнений типа (5.16):

$$\left.\begin{array}{l} \mu \equiv p_{m_1} \pmod{r_1^{m_1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mu \equiv p_{m_n} \pmod{r_n^{m_n}}. \end{array}\right\} \tag{5.19}$$

Так как в (5.19) модули $r_1^{m_1}, \ldots, r_n^{m_n}$ попарно простые, то по известной теореме ([82], стр. 123) эта система сравнений имеет одно решение, представляющее собой класс по модулю $R = r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}$ *). Среди чисел $0, 1, \ldots, N-1$ найдется либо Ц (N/R), либо $1 +$ Ц (N/R) чисел, принадлежащих этому классу (рис. 5.6). Запишем это количество в виде Ц $(N/R) + h$, где h либо 0, либо 1. Тогда

$$S_N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1, \ldots, m_n} \sum_{p_{m_1}, \ldots, p_{m_n}} \left[Ц\left(\frac{N}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}}\right) + h \right], \tag{5.20}$$

*) То есть все решения даются формулой $\mu = \bar{\mu} + tR$ с любыми целыми t, где $\bar{\mu}$ — какое-нибудь из решений.

и, чтобы получить хорошую оценку для $S_N(x_1, \ldots, x_n)$, надо указать разумные пределы изменения всех m_s и p_{m_s}.

3. Пусть $M_s = \text{Ц}(\log_{r_s} N)$. Тогда $r_s^{M_s} \leqslant N < r_s^{M_s+1}$. И если $\mu \leqslant N-1$, то в r_s-ичной системе число μ будет не более чем (M_s+1)-значным:

$$\mu = \mu_{M_s}^{(s)} \ldots \mu_1^{(s)} \mu_0^{(s)},$$

так что нам достаточно учесть только такие сравнения

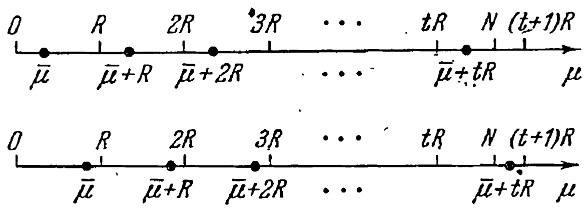

Рис. 5.6.

(5.19), в которых $m_s \leqslant M_s + 1$, и еще возможный случай

$$\mu_0^{(s)} = a_0^{(s)}, \ldots, \mu_{M_s}^{(s)} = a_{M_s}^{(s)},$$

который мы условно будем считать случаем $m_s = M_s + 2$ с одним допустимым значением $p_{M_s+2} = a_{M_s}^{(s)} \ldots a_1^{(s)} a_0^{(s)}$.

Пусть $\bar{a}_{m_s-1}^{(s)} = a_{m_s-1}^{(s)}$ при всех $1 \leqslant m_s \leqslant M_s + 1$, а в случае $m_s = M_s + 2$ значение $\bar{a}_{m_s-1}^{s} = 1$. Тогда количество p_{m_s}, соответствующих данному m_s, равно $\bar{a}_{m_s-1}^{(s)}$. Из (5.20) следует, что

$$S_N(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \sum_{m_1=1}^{M_1+2} \ldots \sum_{m_n=1}^{M_n+2} \left(\prod_{s=1}^{n} \bar{a}_{m_s-1}^{(s)} \right) \left[\text{Ц}\left(\frac{N}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}} \right) + \theta_{m_1 \ldots m_n} \right],$$

где $0 \leqslant \theta_{m_1 \ldots m_n} \leqslant 1$.

Однако легко заметить, что если $m_s \geqslant M_s + 1$, то $N/r^{m_s} < 1$ и $\text{Ц}(N r_1^{-m_1} \ldots r_n^{-m_n}) = 0$. Поэтому последнее равенство можно переписать так:

$$S_N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{m_n=1}^{M_n} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{m_s-1}^{(s)} \right) Ц \left(\frac{N}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}} \right) + \\ + \sum_{m_1=1}^{M_1+2} \cdots \sum_{m_n=1}^{M_n+2} \left(\prod_{s=1}^{n} \bar{a}_{m_s-1}^{(s)} \right) \theta_{m_1 \ldots m_n}. \quad (5.21)$$

4. Формула (5.18) в десятичной системе означает, что

$$x_s = \sum_{m_s=1}^{\infty} a_{m_s-1}^{(s)} r_s^{-m_s}. \quad (5.22)$$

Поэтому

$$N x_1 \ldots x_n = \sum_{m_1, \ldots, m_n=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{m_s-1}^{(s)} \right) \frac{N}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}} = \\ = \sum_{m_1, \ldots, m_n=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{m_s-1}^{(s)} \right) Ц \left(\frac{N}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}} \right) + \\ + \sum_{m_1, \ldots, m_n=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{m_s-1}^{(s)} \right) \xi_{m_1 \ldots m_n},$$

где $\xi_{m_1 \ldots m_n} = \{N r_1^{-m_1} \ldots r_n^{-m_n}\}$ — дробная часть числа, так что $0 \leqslant \xi_{m_1 \ldots m_n} < 1$. Снова используя тот факт, что $Ц(N r_1^{-m_1} \ldots r_n^{-m_n}) = 0$, если какое-нибудь из $m_s \geqslant M_s + 1$, перепишем последнее равенство в виде

$$N x_1 \cdots x_n = \sum_{m_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{m_n=1}^{M_n} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{m_s-1}^{(s)} \right) Ц \left(\frac{N}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}} \right) + \\ + \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=1}^{\infty} \left(\prod_{s=1}^{n} a_{m_s-1}^{(s)} \right) \xi_{m_1 \ldots m_n}. \quad (5.23)$$

5. Рассмотрим теперь отдельно два возможных случая.

Первый случай: $S_N(x_1, \ldots, x_n) \geqslant N x_1 \ldots x_n$. В этом случае, вычитая (5.23) из (5.21), получим, что

$$S_N(x_1, \ldots, x_n) - N x_1 \ldots x_n \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m_1=1}^{M_1+2} \cdots \sum_{m_n=1}^{M_n+2} \left(\prod_{s=1}^{n} \bar{a}^{(s)}_{m_s-1} \right) \theta_{m_1 \ldots m_n} \leqslant \prod_{s=1}^{n} \sum_{m_s=1}^{M_s+2} \bar{a}^{(s)}_{m_s-1}.$$

Второй случай: $S_N(x_1, \ldots, x_n) \leqslant N x_1 \ldots x_n$. В этом случае «округлим» дробь (5.22):

$$x_s \leqslant \sum_{m_s=1}^{M_s+2} \tilde{a}^{(s)}_{m_s-1} r_s^{-m_s},$$

где $\tilde{a}^{(s)}_{m_s-1} = a^{(s)}_{m_s-1}$ при всех $1 \leqslant m_s \leqslant M_s + 1$ и лишь в случае $m_s = M_s + 2$ значение $\tilde{a}^{(s)}_{m_s-1} = a^{(s)}_{m_s-1} + 1$. Повторяя рассуждение, приведшее от (5.22) к (5.23), выведем неравенство

$$N x_1 \ldots x_n \leqslant \sum_{m_1=1}^{M_1} \cdots \sum_{m_n=1}^{M_n} \left(\prod_{s=1}^{n} a^{(s)}_{m_s-1} \right) \text{Ц}\left(\frac{N}{r_1^{m_1} \ldots r_n^{m_n}} \right) +$$
$$+ \sum_{m_1=1}^{M_1+2} \cdots \sum_{m_n=1}^{M_n+2} \left(\prod_{s=1}^{n} \tilde{a}^{(s)}_{m_s-1} \right) \xi_{m_1 \ldots m_n}. \qquad (5.24)$$

Вычитая из (5.24) равенство (5.21), получим

$$N x_1 \ldots x_n - S_N(x_1, \ldots, x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m_1=1}^{M_1+2} \cdots \sum_{m_n=1}^{M_n+2} \left(\prod_{s=1}^{n} \tilde{a}^{(s)}_{m_s-1} \right) \xi_{m_1 \ldots m_n} \leqslant \prod_{s=1}^{n} \sum_{m_s=1}^{M_s+2} \tilde{a}^{(s)}_{m_s-1}.$$

Заметив, что $\bar{a}^{(s)}_{m_s-1} \leqslant \tilde{a}^{(s)}_{m_s-1}$, можем утверждать, что последняя оценка справедлива в обоих рассмотренных случаях. Следовательно,

$$|S_N(x_1, \dots, x_n) - Nx_1 \dots x_n| \leqslant \prod_{s=1}^{n} \sum_{m_s=1}^{M_s+2} \tilde{a}^{(s)}_{m_s-1}.$$

Далее,

$$\sum_{m_s=1}^{M_s+2} \tilde{a}^{(s)}_{m_s-1} \leqslant (r_s - 1)(M_s + 1) + r_s \leqslant$$
$$\leqslant (r_s - 1)\log_{r_s} N + 2r_s - 1,$$

и, таким образом,

$$|S_N(x_1, \dots, x_n) - Nx_1 \dots x_n| \leqslant \prod_{s=1}^{n} \left[(r_s - 1)\frac{\ln N}{\ln r_s} + 2r_s - 1\right],$$

откуда следует (5.15). (Переход от точек P с иррациональными координатами к любым точкам P достаточно очевиден.) Итак, теорема 3 доказана.

Оценка отклонения сетки Σ_H. Теорема 4. *Рассмотрим сетку* Σ_H (см. (5.13)). *Отклонение этой сетки*

$$D(\Sigma_H) \leqslant \sum_{s=1}^{n-1} (\beta_s \ln N + \gamma_s), \tag{5.25}$$

где значения β_s *и* γ_s *те же, что в теореме* 3.

Доказательство [110]. Точка (5.13) удовлетворяет неравенствам

$$p_{r_1}(\mu) < x_1, \dots, p_{r_{n-1}}(\mu) < x_{n-1}, \qquad \mu/N < x_n$$

тогда и только тогда, когда $(n - 1)$-мерная точка (5.14) удовлетворяет неравенствам

$$p_{r_1}(\mu) < x_1, \dots, \quad p_{r_{n-1}}(\mu) < x_{n-1}$$

и в то же время $\mu < Nx_n$. Поэтому мы можем записать, что

$$|S_N(x_1, \dots, x_n) - Nx_1 \dots x_n| =$$
$$= |S'_z(x_1, \dots, x_{n-1}) - zx_1 \dots x_{n-1}|,$$

где $S'_z(x_1, \ldots, x_{n-1})$ относится к $(n-1)$-мерной сетке Σ^* вида (5.14) и $z = Nx_n$. Число z, вообще говоря, не целое, и в соответствии с нашими обозначениями следовало бы писать $S'_{\text{Ц}(z)}$, а не S'_z. Нетрудно, однако, заметить, что если бы мы в доказательстве теоремы 3 вместо N писали z, предполагая, что $N \leqslant z < N+1$, то пришли бы к тому же результату (другими были бы только $\theta_{m_1 \ldots m_n}$ и $\xi_{m_1 \ldots m_n}$, а все M_s остались бы прежними). Поэтому

$$|S_z'(x_1, \ldots, x_{n-1}) - zx_1 \ldots x_{n-1}| \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{s=1}^{n-1} [\beta_s \ln \text{Ц}(z) + \gamma_s] = \prod_{s=1}^{n-1} (\beta_s \ln N + \gamma_s),$$

откуда следует требуемая оценка (5.25).

З а м е ч а н и е. В [110] рассматриваются сетки (5.13) и (5.14) с $1 \leqslant \mu \leqslant N$. Оценки (5.15) и (5.25) для них остаются теми же.

Оценки неравномерностей. Из (4.56), (5.15) и (5.25) вытекает, что

$$\varphi_\infty(\Sigma_H) \leqslant 4^n \prod_{s=1}^{n-1} (\beta_s \ln N + \gamma_s), \tag{5.26}$$

а

$$\varphi_\infty(\Sigma^*) \leqslant 4^n \prod_{s=1}^{n} (\beta_s \ln N + \gamma_s). \tag{5.27}$$

Подставляя эти значения в (4.49) и (4.50), легко получить оценки погрешностей для сеток Σ^* и Σ_H на пространствах функций S_p и H_α. Для сетки Σ^* на S_p и H_α соответственно

$$\|\delta\| = O(N^{-1/p} \ln^{n/p} N) \quad \text{и} \quad \|\delta\| = O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha n + n} N),$$

а для сетки Σ_H

$$\|\delta\| = O(N^{-1/p} \ln^{(n-1)/p} N) \quad \text{и} \quad \|\delta\| = O(N^{-\alpha} \ln^{\alpha(n-1)+n} N).$$

Все выписанные порядки можно считать почти наилучшими (в смысле, указанном на стр. 172).

Хотя порядок (5.27) на $\ln N$ хуже, чем порядок (5.26), в вычислительной практике удобнее использовать точки

P_μ^*, координаты которых не зависят от N (ср. начало § 4 гл. 2).

Оценку (5.27) перепишем в виде

$$\varphi_\infty(\Sigma^*) \leqslant B_2 \ln^n N.$$

Постоянная B_2 зависит от $r_1, \ldots, r_n$. Как выгоднее выбирать $r_1, \ldots, r_n$, строго говоря, неизвестно. Формула (5.27)

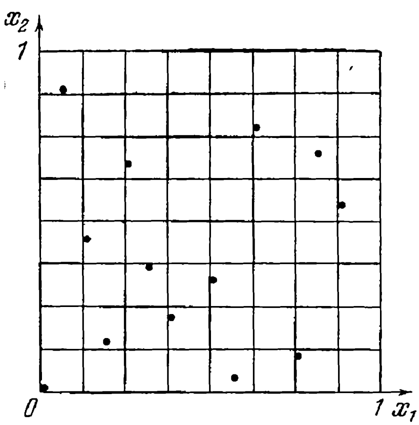

Рис. 5.7.

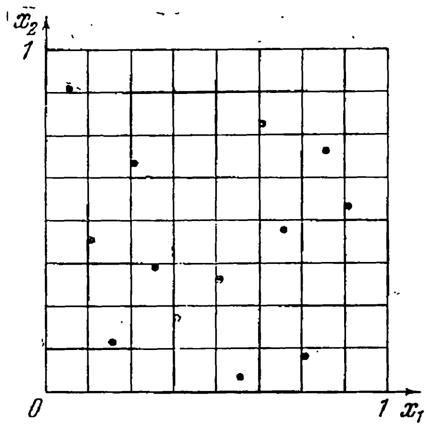

Рис. 5.8.

позволяет предположить, что выгоднее небольшие значения r_s.

Рассмотрим сетку Σ^* в случае, когда в качестве r_s используются все простые числа подряд: $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$, $r_4 = 7$, ... Тогда из (5.27) можно получить оценку константы B_2:

$$\varlimsup_{N\to\infty} [\varphi_\infty(\Sigma^*) \ln^{-n} N] \leqslant \prod_{s=1}^{n} \frac{4(r_s - 1)}{\ln r_s}.$$

По известному асимптотическому закону распределения простых чисел ([82], стр. 341) при $n \to \infty$ отношение $(r_n/\ln r_n) \sim n$. Поэтому при больших n правая часть последнего соотношения есть $O(4^n n!)$.

В гл. 7 нам понадобится несколько более точный результат, чем (5.27). Легко заметить, что проекция Σ^* на

$K_{i_1 \ldots i_s}$ представляет собой s-мерную сетку того же типа, что и (5.14). Поэтому из теоремы 3 при $n = s$ следует, что

$$\Phi_\infty^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma^*) \leqslant \prod_{\nu=1}^{s} (4\beta_{i_\nu} \ln N + 4\gamma_{i_\nu}). \tag{5.28}$$

Примеры. На рис. 5.7 и 5.8 изображены сетки, состоящие из $N = 13$ точек $P_0^*, \ldots, P_{12}^*$ и $P_1^*, \ldots, P_{13}^*$. В обоих случаях $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Нетрудно рассмотреть все существенные двоичные прямоугольники и убедиться в том, что для первой сетки $\varphi_\infty = 3$, а для второй $\varphi_\infty = 4$ (худшим в обоих случаях оказывается прямоугольник $[0, 1) \times [0, 1/4)$).

Глава 6

Π_τ-сетки и $Л\Pi_\tau$-последовательности

Мы видели в гл. 4, что «качество» сетки интегрирования на классах функций S_p зависит от величины неравномерности φ_∞. Структура φ_∞ подсказывает, что узлы хороших сеток должны в каком-то смысле равномерно распределяться по всем достаточно крупным двоичным параллелепипедам. Именно это геометрическое требование навело на мысль о построении Π_τ-сеток, а затем и $Л\Pi_\tau$-последоавтельностей [67, 95, 98].

В § 1 изучаются важнейшие свойства таких сеток и последовательностей, вытекающие из их определений. Однако вопрос о существовании Π_τ-сеток и $Л\Pi_\tau$-последовательностей в K^n при любом n в этом параграфе не решен. Это сделано ниже, в § 3, где указан вполне эффективный способ их построения.

В § 4 рассмотрены возможности применения $Л\Pi_\tau$-последовательностей в вычислительной практике. Приведена таблица 6.4, с помощью которой можно вычислять многомерные интегралы.

В § 5 для изучаемых сеток и последовательностей оцениваются отклонения D, а § 2 носит вспомогательный характер: исследуются некоторые свойства линейных разностных операторов в конечном поле, которые используются в § 3.

§ 1. Определения и основные свойства

Π_τ-сетки. В § 3 гл. 3 введено понятие Π_0-сеток, которое естественно обобщить на n-мерный случай следующим образом: сетка Σ, состоящая из $N = 2^\nu$ точек куба K^n, называется Π_0-сеткой, если каждому двоичному параллелепипеду Π_k с объемом $|\Pi_k| = 1/N$ принадлежит одна точка сетки.

Например, двумерные сетки, изображенные на рис. 4.10, *а* и 5.2, суть Π_0-сетки, а сетки, изображенные на рис. 4.10, *б* и 5.1, таковыми не являются (так как в этих сетках, в частности, прямоугольники $[4/8, 5/8)\times[0, 1]$ не содержат ни одной точки сетки).

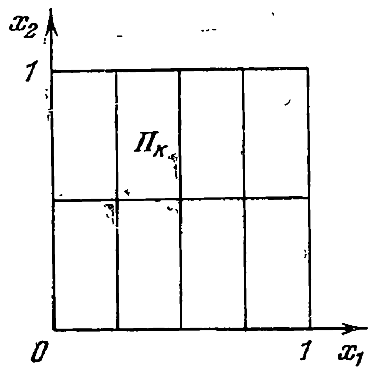

Рис. 6.1.

К сожалению, Π_0-сетки существуют только в K^1, K^2 и K^3: в лемме 2 будет доказано, что уже в K^4 Π_0-сетку построить нельзя. Образно выражаясь, количество двоичных параллелепипедов в K^n при $n \geqslant 4$ слишком велико.

Чтобы рассматривать аналогичные сетки в K^n при любых n, пришлось ослабить требования к распределению точек сетки по всевозможным Π_k.

Определение. Сетка, состоящая из $N = 2^\nu$ точек куба K^n, называется Π_τ-*сеткой*, если каждому двоичному параллелепипеду Π_k с объемом $|\Pi_k| = 2^{\tau-\nu}$ принадлежат 2^τ точек сетки. При этом всегда предполагается, что $\nu > \tau$.

Заметим, что в этом определении достаточно потребовать, чтобы число точек в каждом Π_k с объемом $|\Pi_k| = 2^{\tau-\nu}$ было не меньше (не больше) чем 2^τ. Дело в том, что к каждому такому Π_k можно подобрать еще $2^{\nu-\tau}-1$ равновеликих Π_k, которые в сумме составят весь куб K^n (рис. 6.1). И число точек в Π_k по необходимости окажется равным 2^τ.

Легко видеть, что каждая Π_τ-сетка является в то же время $\Pi_{\tau+1}$-сеткой (если только $\nu > \tau + 1$), так как каждый Π_k с объемом $2^{\tau+1-\nu}$ есть сумма двух Π_k с объемами $2^{\tau-\nu}$ и, следовательно, содержит $2\cdot 2^\tau = 2^{\tau+1}$ точек сетки.

Если некоторая Π_τ-сетка не является $\Pi_{\tau-1}$-сеткой, то мы будем говорить, что *значение* τ для нее *точное*.

Пример 1. 16-точечная сетка, изображенная на рис. 6.2, есть Π_2-сетка: в каждом Π_k с площадью $1/4$ содержатся 4 точки сетки. Эта же сетка не есть Π_1-сетка, так как прямоугольник $[0, 1/4) \times [0, 1/2)$ не содержит двух точек. Значит, значение $\tau = 2$ для этой сетки точное.

Лемма 1. *Предположим, что в K^n задана Π_τ-сетка. Проекции точек этой сетки на какую-либо грань $K_{i_1\ldots i_s}$ куба образуют s-мерную Π_τ-сетку (состоящую из того же количества точек).*

Доказательство. Обозначим количество точек сетки через 2^ν. Выберем в $K_{i_1\ldots i_s}$ какой-нибудь s-мерный $\Pi_k = l_{k_{i_1}} \times \ldots \times l_{k_{i_s}}$ с объемом $2^{\tau-\nu}$ и рассмотрим в K^n двоичный параллелепипед $\Pi'_k = l'_{k_1} \times \ldots \times l'_{k_n}$, где $l'_{k_i} = l_{k_i}$ при $i = i_1, \ldots, i_s$; $l'_{k_i} = [0, 1]$ при $i \neq i_1, \ldots, i_s$.

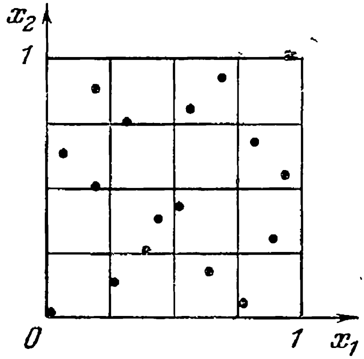

Рис. 6.2.

Очевидно, $|\Pi'_k| = |\Pi_k| = 2^{\tau-\nu}$ и Π'_k содержит 2^τ точек сетки. Проекции этих и только этих точек сетки принадлежат Π_k. Таким образом, Π_k содержит 2^τ проекцией, что и требовалось доказать.

Заметим, что проекции Π_τ-сетки с точным значением τ не обязаны быть Π_τ-сеткой с точным значением τ. В самом деле, проекции точек Π_2-сетки из примера 1 (рис. 6.2) на ось Ox_2 образуют равномерную Π_0-сетку.

Теорема 1. *В K^n для любой Π_τ-сетки справедлива оценка неравномерности*

$$\varphi_\infty \leqslant 2^{n-1+\tau}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Число точек сетки пусть будет $N = 2^\nu$. Выберем в K^n произвольный Π_k и обозначим объем его октантов *) через 2^{-m}.

*) Когда мы говорим об октантах произвольного Π_k, мы (так же как в гл. 4) предполагаем, что начало координат перенесено в центр Π_k и координатные плоскости разбивают Π_k на 2^n n-мерных октантов. Новые координаты обозначены $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

а) Если $m \leqslant \nu - \tau$, то $2^{-m} \geqslant 2^{\tau-\nu}$. В этом случае каждый октант состоит из одинакового числа Π_k' с объемами $2^{\tau-\nu}$. Значит, каждый такой октант содержит одинаковое число точек сетки и $|S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)| = 0$.

б) Если $m > \nu - \tau$, то объем каждого из октантов меньше $2^{\tau-\nu}$. Значит, каждый октант есть часть некоторого Π_k' с объемом $2^{\tau-\nu}$ и содержит не более чем 2^τ точек сетки. Поэтому $0 \leqslant S_N(V_k^+) \leqslant 2^{n-1+\tau}$, $0 \leqslant S_N(V_k^-) \leqslant 2^{n-1+\tau}$ и тем более их разность $|S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)| \leqslant 2^{n-1+\tau}$.

Из определения (4.42) вытекает, что для нашей сетки $\Phi_\infty^{12\ldots n} \leqslant 2^{n-1+\tau}$.

Предыдущая лемма избавляет нас от необходимости рассматривать проекции сетки на всевозможные грани $K_{i_1\ldots i_s}$ и позволяет сразу (используя уже доказанное неравенство) записать оценку:

$$\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s} \leqslant 2^{s-1+\tau}. \tag{6.2}$$

Так как $\varphi_\infty = \max \Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}$, то из (6.2) вытекает (6.1). Теорема доказана.

Отметим важнейшую особенность оценки (6.1): она не зависит от числа точек N. Если выбрать любую последовательность Π_τ-сеток в K^n с одним и тем же τ и с неограниченно возрастающим количеством точек N, то можно сказать, что для этих сеток $\varphi_\infty = O(1)$, когда $N \to \infty$.

Очевидно также, что при $N \leqslant 2^{n-1+\tau}$ оценка (6.1) тривиальна.

Теорема 2. *Пусть* $N \geqslant 2^{n-1}$. *При* $n = 1, 2, 3$ в K^n *для любой* Π_0-*сетки*

$$\varphi_\infty = 2^{n-1}. \tag{6.3}$$

Прежде чем переходить к доказательству утверждения теоремы, рассмотрим октанты куба K^n. Назовем октант, в котором все $x_i < 1/2$, октантом нулевого ранга. Соседние с ним $\binom{n}{1}$ октантов характеризуются тем, что в каждом из них какая-нибудь одна координата $x_s \geqslant 1/2$, а все остальные $x_i < 1/2$. Эти октанты будем считать октантами 1-го ранга. Затем выделим $\binom{n}{2}$ октантов 2-го ранга, соседних с октантами 1-го ранга, и так далее. Наконец, останется один октант n-го ранга, в котором все $x_i \geqslant 1/2$ (рис. 6.3 для $n = 3$).

Легко видеть, что если перенести начало координат в центр K^n, то все октанты четного ранга окажутся положительными, а все октанты нечетного ранга — отрицательными.

Точно так же можно классифицировать октанты любого Π_k. Причем за исходный октант нулевого ранга можно выбрать любой из октантов: все равно после переноса начала координат в центр Π_k во всех октантах четного ранга знак $\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ будет один, а во всех октантах нечетного ранга знак $\xi_1\xi_2\ldots\xi_n$ будет другой (ср. рис. 4.5).

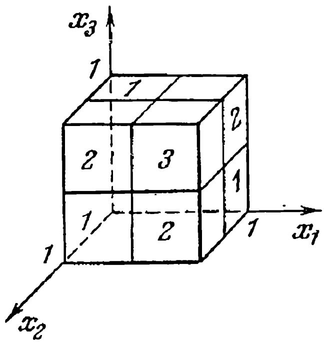

Рис. 6.3.

Рассмотрим теперь произвольную Π_0-сетку в K^n. Выберем Π_k с объемом $|\Pi_k| = 2^{n-1}/N$. Он содержит 2^{n-1} точек сетки. Объем каждого октанта Π_k равен $1/(2N)$. Фиксируем какой-нибудь октант, который будем считать октантом нулевого ранга, и число содержащихся в нем точек обозначим через p. Ясно, что либо $p = 0$, либо $p = 1$.

Так как исходный октант в сумме с каждым из октантов 1-го ранга составляет Π_k' с объемом $1/N$, то каждая такая сумма содержит одну точку сетки. Значит, каждый из октантов 1-го ранга содержит по $1 - p$ точек. Точно так же доказывается, что каждый октант 2-го ранга содержит по p точек. И вообще каждый октант четного ранга содержит по p точек, каждый октант нечетного ранга — по $1 - p$ точек. Поэтому $|S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)| = 2^{n-1}|1 - 2p|$. И при $p = 0$, и при $p = 1$ отсюда следует, что $\varphi_\infty \geqslant 2^{n-1}$. А из (6.1) при $\tau = 0$ вытекает, что $\varphi_\infty \leqslant 2^{n-1}$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 видно, что для Π_0-сеток оценка (6.1) точная. Пример 1 показывает, что при $\tau > 0$ оценка (6.1) уже не обязательно точная. Легко убедиться в том, что для этой Π_2-сетки $\varphi_\infty = 4$ («худший» прямоугольник

$[0, 1/2) \times [0, 1])$, в то время как из (6.1) при $n = \tau = 2$ следует лишь $\varphi_\infty \leqslant 8$.

Постоянные $\tau(n)$.

Определение. Наименьшее значение τ такое, что в K^n существуют Π_τ-сетки со сколь угодно большим числом точек, назовем $\tau(n)$.

Очевидно, $\tau(n)$ — это геометрическая характеристика куба K^n. Утверждение о конечности $\tau(n)$ равносильно утверждению о том, что в K^n можно построить Π_τ - сетки (состоящие из как угодно большого числа точек). Из § 3 гл. 3 вытекает, что $\tau(1) = 0$.

Некоторые значения $\tau(n)$ и асимптотическая оценка (при $n \to \infty$) будут получены в § 3. Здесь мы докажем только, если можно так сказать, нетривиальность $\tau(n)$: из леммы 2 вытекает, что $\tau(4) > 0$.

Лемма 2. *В K^4 невозможно построить Π_0-сетку с числом точек $N \geqslant 4$.*

Доказательство от противного. Предположим, что мы такую сетку построили. Выберем любой Π_k с объемом $|\Pi_k| = 4/N$. Он содержит четыре точки сетки, которые мы назовем P_0, P_1, P_2, P_3. Докажем, что любое размещение четырех точек в Π_k противоречит определению Π_0-сетки.

Для этого рассмотрим октанты *) Π_k. Объем каждого октанта равен $1/(4N)$. Октант, содержащий точку P_0, назовем октантом нулевого ранга. Больше точек сетки он содержать не может. Точка P_1 не может оказаться в октанте 1-го ранга, так как каждый такой октант в сумме с октантом нулевого ранга составляет Π_k' с объемом $1/(2N) < 1/N$. Точно так же точка P_1 не может оказаться в октанте 2-го ранга, ибо каждый такой октант вместе с октантом нулевого ранга принадлежат одному Π_k' с объемом $1/N$. Если допустить, что P_1 принадлежит октанту 4-го ранга, то (по тем же соображениям) некуда будет поместить точку P_2.

Остается последняя возможность: точки P_1, P_2 и P_3 размещаются в октантах 3-го ранга. Однако любые два

*) Вместо громоздкого «гексадекант» мы будем писать «октант», имея в виду, что таких октантов всего 16. Распределение их по рангам можно выразить формулой $1 + 4 + 6 + 4 + 1$.

таких октанта могут быть включены в Π_k' с объемом $1/N$, так что снова получаем противоречие с определением Π_0-сетки.

ЛП$_\tau$-последовательности.

Определение. Последовательность точек P_0, $P_1, \ldots, P_i, \ldots$ куба K^n назовем ЛП$_\tau$-*последовательностью*, если каждый ее двоичный участок, содержащий не менее $2^{\tau+1}$ точек, представляет собой Π_τ-сетку. (Определение двоичного участка см. в начале § 3 гл. 3.)

Если ЛП$_\tau$-последовательность не является ЛП$_{\tau-1}$-последовательностью, то мы будем говорить, что *значение* τ для нее *точное*.

Из леммы 1 вытекает, что проекции точек ЛП$_\tau$-последовательности на какую-нибудь координатную грань $K_{i_1 \ldots i_s}$ куба K^n образуют s-мерную ЛП$_\tau$-последовательность. Однако точное значение τ для проекций может уменьшиться.

Теорема 3. *Для произвольного начального участка любой* ЛП$_\tau$-*последовательности в* K^n *справедлива оценка* (6.1).

Доказательство. Фиксируем произвольный участок последовательности $0 \leqslant i \leqslant N-1$ и выберем произвольный Π_k. Обозначим объем октантов Π_k через 2^{-m}, и пусть $\nu = m + \tau$.

Разобьем наш участок на участки длиной 2^ν:

$$0 \leqslant i < 2^\nu, \quad 2^\nu \leqslant i < 2 \cdot 2^\nu, \ldots, \quad (j-1)\, 2^\nu \leqslant i < j\, 2^\nu,$$
$$j\, 2^\nu \leqslant i < N.$$

Каждый из первых j участков есть Π_τ-сетка. Так как $2^{-m} = 2^{\tau-\nu}$, то любой из октантов Π_k содержит ровно 2^τ точек из каждого такого участка и не более чем 2^τ точек из последнего участка (который есть часть участка $j2^\nu \leqslant i < (j+1)\, 2^\nu$, также представляющего собой Π_τ-сетку). Значит, число точек в каждом октанте не меньше, чем $j2^\tau$, и не больше, чем $(j+1)\, 2^\tau$.

Так как число положительных (а также число отрицательных) октантов равно 2^{n-1}, то $j\, 2^{n-1+\tau} \leqslant S_N(V_k^\pm) \leqslant (j+1)\, 2^{n-1+\tau}$. Отсюда вытекает, что справедлива оценка $|S_N(V_k^+) - S_N(V_k^-)| \leqslant 2^{n-1+\tau}$.

Рассматривать проекции точек на всевозможные $K_{i_1 \ldots i_s}$ не нужно по тем же причинам, что в теореме 1.

Следствие. *Любая* ЛП_τ-*последовательность равномерно распределена в* K^n (см. теорему 8 гл. 4).

Лемма 3. *Если точки* P_0, $P_1, \ldots, P_i, \ldots$ *с координатами* $P_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$ *образуют* ЛП_τ-*последовательность в* K^n, *то сетка, состоящая из* $N = 2^\nu$ *точек* P'_0, $P'_1, \ldots, P'_{N-1}$ *с координатами* $P'_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in}, i/N)$, *есть* Π_τ-*сетка в* K^{n+1}.

Доказательство. Выберем в K^{n+1} произвольный $\Pi'_k = l_{k_1} \times \ldots \times l_{k_{n+1}}$ с объемом $|\Pi'_k| = 2^{\tau-\nu}$. Пусть $l_{k_{n+1}} = l_{m+1,j}$. Так как $|l_{m+1,j}| = 2^{-m}$, то $0 \leqslant m \leqslant \nu - \tau$. Обозначим $s = \nu - m$. Тогда n-мерный объем параллелепипеда $\Pi_k = l_{k_1} \times \ldots \times l_{k_n}$ равен $2^{\tau-s}$.

Выделим участки последовательности $\{P_i\}$ с номерами $0 \leqslant i < 2^s$, $2^s \leqslant i < 2 \cdot 2^s, \ldots, (2^m - 1)\, 2^s \leqslant i < 2^\nu$. Если $s \geqslant \tau + 1$, то каждый из этих участков есть Π_τ-сетка и Π_k принадлежит по 2^τ точек из каждого участка. Однако в Π'_k попадут лишь 2^τ точек P'_i, соответствующих точкам P_i из j-го участка, ибо неравенство $(j-1)\, 2^s \leqslant i < j 2^s$ равносильно неравенству $(j-1)\, 2^{-m} \leqslant i/N < j 2^{-m}$, а последнее эквивалентно требованию $i/N \in l_{m+1,j}$.

В случае $s = \tau$ легко видеть, что $\Pi_k = K^n$ и в Π'_k попадут все 2^τ точек, соответствующих j-му участку.

Следствие 1. *В* K^3 *невозможно построить* ЛП_0-*последовательность.*

Доказательство. Построив такую последовательность, мы смогли бы методом леммы 3 построить Π_0-сетки в K^4, что по лемме 2 невозможно.

Следствие 2. *Значение* $\tau(2) = 0$.

Доказательство. Из ЛП_0-последовательностей в K^1, которые были построены в § 3 гл. 3, методом леммы 3 можно построить Π_0-сетки в K^2.

§ 2. О линейных разностных операторах в поле Z_2

Поле Z_2, с которым мы уже встречались в § 3 гл. 3, состоит из двух элементов: 0 и 1. Правила умножения обычные: $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Правила сложения: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, $1 + 1 = 0$.

В этом параграфе буквами a, b, c, u, v с различными индексами мы будем обозначать элементы Z_2.

Рассмотрим линейное разностное уравнение m-го порядка с постоянными коэффициентами

$$Lu_i = 0, \tag{6.4}$$

где разностный оператор L определен выражением

$$Lu_i \equiv u_{i+m} + a_{m-1}u_{i+m-1} + \ldots + a_1 u_{i+1} + u_i; \tag{6.5}$$

все u_i и a_j принадлежат Z_2.

Решением уравнения (6.4) назовем последовательность

$$\ldots,\ u_{-2},\ u_{-1},\ u_0,\ u_1,\ u_2,\ \ldots,$$

определенную при всех $-\infty < i < \infty$ и удовлетворяющую (6.4) при каждом i. Чтобы не путать решение с отдельными значениями u_i, мы будем иногда обозначать решение $\{u_i\}$. Индекс i всюду в этом параграфе играет роль независимой переменной (аргумента).

Каждое решение однозначно определяется заданием начальных условий $(u_1, \ldots, u_m)$. Если все начальные значения $u_1 = \ldots = u_m = 0$, то получаем *тривиальное решение*, состоящее из одних нулей: $\{u_i\} = 0$. Так как существуют всего 2^m различных групп $(u_1, \ldots, u_m)$, состоящих из нулей и единиц, то уравнение (6.4) имеет всего 2^m различных решений. Число нетривиальных решений этого уравнения равно $2^m - 1$.

Циклы. Фиксируем какое-нибудь нетривиальное решение $\{u_i\}$ уравнения (6.4) и рассмотрим группы значений $(u_1, \ldots, u_m)$, $(u_2, \ldots, u_{m+1})$, $(u_3, \ldots, u_{m+2})\ldots$ Так как существуют всего $2^m - 1$ различных нетривиальных групп, состоящих из нулей и единиц, то найдется группа $(u_{\omega+1}, \ldots, u_{\omega+m})$, совпадающая с $(u_1, \ldots, u_m)$. В силу (6.4) все значения $u_{\omega+i} \equiv u_i$. Таким образом, решение $\{u_i\}$ оказывается периодическим, причем его наименьший период $\omega_1 \leqslant 2^m - 1$.

Допустим, что $\omega_1 < 2^m - 1$. Тогда найдется группа $(u'_1, \ldots, u'_m)$, отличная от всех групп вида $(u_{i+1}, \ldots, u_{i+m})$. Выбрав эту группу в качестве начальных значений, мы получим другое решение $\{u'_i\}$ того же уравнения, период которого обозначим ω_2. Очевидно, все группы вида

$(u'_{i+1}\ \ldots,\ u'_{i+m})$ встречающиеся на втором решении, отличны от всех групп вида $(u_{i+1}, \ldots, u_{i+m})$, которые встречались на первом решении (ибо совпадение двух каких-либо групп в силу (6.4) вызвало бы совпадение всех групп).

Если $\omega_1 + \omega_2 < 2^m - 1$, то найдется группа $(u''_1, \ldots$ $\ldots, u''_m)$, отличная и от всех $(u_{i+1}, \ldots, u_{i+m})$ и от всех $(u'_{i+1}, \ldots, u'_{i+m})$. Выбрав ее в качестве начальных значений, найдем третье решение $\{u''_i\}$, на котором все группы $(u''_{i+1}, \ldots, u''_{i+m})$ отличны от всех уже встречавшихся групп.

Процесс этот закончится тогда, когда мы исчерпаем все возможные 2^m-1 групп. В результате мы получим конечное число p решений, причем $\omega_1 + \ldots + \omega_p = 2^m - 1$.

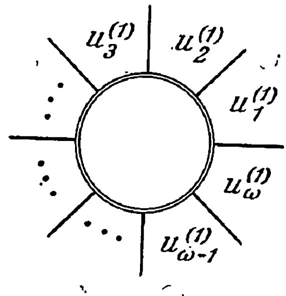

Рис. 6.4.

Назовем *циклом* уравнения (6.4) совокупность решений, отличающихся друг от друга сдвигом нумерации. Другими словами, если $\{u_i^{(1)}\}$ — какое-нибудь решение, то цикл образуют все решения $\{u_i\}$, для которых $u_i \equiv u_{i+\alpha}^{(1)}$, где сдвиг $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Очевидно, все решения из одного цикла имеют один и тот же наименьший период, так что можно говорить о *периоде цикла*. Выбор названия «цикл» поясняет рис. 6.4: для получения любого решения из данного цикла надо назначить в качестве u_1 какое-либо из указанных значений; тогда $u_2, u_3, \ldots$ можно будет прочесть против хода часовой стрелки.

Так как каждое решение вполне определяется начальной группой $(u_1, \ldots, u_m)$, то предыдущее рассмотрение показывает, что уравнение (6.4) имеет конечное число циклов, сумма периодов которых равна $2^m - 1$.

Определение. Уравнение (6.4) и оператор (6.5) назовем *моноциклическими*, если уравнение (6.4) имеет решение с наименьшим периодом $\omega = 2^m - 1$.

Легко видеть, что моноциклическое уравнение (6.4) имеет всего один цикл. Все нетривиальные решения моноциклического уравнения различаются только сдвигами нумерации. Период такого решения содержит по одному разу любые наборы нулей и единиц вида $(u_1, \ldots, u_m)$, за исключением группы из m нулей подряд.

Пример 2. Рассмотрим три уравнения 4-го порядка:

а) $u_{i+4} + u_{i+3} + u_{i+2} + u_{i+1} + u_i = 0.$

Это уравнение имеет три цикла с периодами $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 5$:

$\{u_i\} = \ldots,\ 1, 0, 0, 0, 1, \ldots;$ $\{u_i\} = \ldots,\ 1, 0, 0, 1, 0, \ldots;$ $\{u_i\} = \ldots,\ 1,\ 1,\ 1, 1, 0, \ldots;$

б) $u_{i+4} + u_{i+3} + u_{i+2} + u_i = 0.$

Это уравнение имеет два цикла с периодами $\omega_1 = \omega_2 = 7$ и один цикл с периодом $\omega_3 = 1$:

$\{u_i\} = \ldots, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, \ldots;$ $\{u_i\} = \ldots, 1, \ldots;$

$\{u_i\} = \ldots, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, \ldots;$

в) $u_{i+4} + u_{i+1} + u_i = 0.$

Это уравнение имеет один цикл с периодом $\omega = 15$:

$\{u_i\} = \ldots, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots$

Следовательно, из трех этих уравнений только последнее уравнение моноциклическое.

Легко установить следующее необходимое условие моноцикличности: если оператор L моноциклический, то его нельзя представить в виде произведения $L = L_2L_1$ двух операторов более низкого порядка (под произведением двух операторов подразумевается, как обычно, результат последовательного применения этих операторов; всегда $L_1L_2 = L_2L_1$).

В самом деле, если $L = L_2L_1$, то каждое решение уравнения $L_1u_i = 0$ удовлетворяет также уравнению $Lu_i = 0$. Однако период этого решения не превосходит $2^{m_1}-1$ (где m_1 — порядок L_1) и заведомо меньше, чем 2^m-1.

Линейные разностные уравнения в конечном поле исследовались в работе Н. Цирлера [116], где имеется также литература по этому вопросу. В [116] решения моноциклических уравнений называются M-последовательностями и используются для построения псевдослучайных чисел. Они находят также применение в теории кодирования (или передачи сообщений) *).

Оператору (6.5) можно поставить в соответствие формальный многочлен над полем Z_2:

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + 1. \tag{6.6}$$

При этом произведению операторов соответствует произведение многочленов. Приведенное выше необходимое условие моноцикличности означает, что моноциклическому оператору (6.5) соответствует неприводимый многочлен (6.6). Однако это условие не является достаточным: например, многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ неприводим (в поле Z_2), однако соответствующий ему оператор (см. пример 2, уравнение а)) не моноциклический.

В [116] доказано, что необходимым и достаточным условием моноцикличности оператора (6.5) является примитивность многочлена (6.6). А многочлен (6.6) будет примитивным тогда, когда он неприводим, служит делителем двучлена $x^\omega + 1$, но не является делителем ни одного двучлена вида $x^s + 1$ степени $s < \omega$ **).

Из теории многочленов над конечным полем [105] вытекает что число примитивных многочленов порядка m равно $\varphi(2^m - 1)/m$, где $\varphi(k)$ — известная теоретико-числовая функция Эйлера, равная количеству натуральных чисел, меньших чем k и взаимно простых с k (включая 1).

Для наших целей важно знать, что существует всего $\varphi(2^m-1)/m$ моноциклических операторов порядка m. Первые шесть моноциклических операторов:

$$u_{i+1} + u_i,\quad u_{i+3} + u_{i+1} + u_i,\ u_{i+4} + u_{i+1} + u_i,$$
$$u_{i+2} + u_{i+1} + u_i,\quad u_{i+3} + u_{i+2} + u_i,\ u_{i+4} + u_{i+3} + u_i.$$

Таблица всех моноциклических операторов порядка $m \leqslant 9$. Таблица 6.1 составлена с помощью таблицы неприводимых многочленов Р. Марша (см. [105]). Каждый оператор (6.5) можно закодировать двоичным числом $1a_{m-1}\ldots a_1 1$, которое записано в таблице в восьмеричной системе (тройки двоичных цифр, начиная с

---

*) К. А. Мешковский, Н. Е. Кириллов, Кодирование в технике связи, «Связь», М., 1966 (§ 5.5).

**) Для пояснения последнего условия заметим, что если бы многочлен (6.6) был делителем двучлена $x^s + 1$, то оператор $Mu_i \equiv u_{i+s} + u_i$ разлагался бы в произведение $M = LL_1$. Тогда каждое решение уравнения $Lu_i = 0$ удовлетворяло бы уравнению $Mu_i = 0$ и имело бы период s.

Последнее условие как раз нарушено для оператора (а) в примере 2. В самом деле, $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x + 1) = x^5 + 1$, так что $s = 5$, в то время как $\omega = 2^4 - 1 = 15$.

правого конца, записываются одной восьмеричной цифрой). Например, при $m = 7$ оператору $u_{i+7} + u_{i+4} + u_{i+3} + u_{i+2} + u_i$ отвечает двоичное число 10011101, которое в восьмеричной форме записано в таблице 6.1 как 235 (ибо 101 — это 5, 011 — это 3, 10 — это 2).

Необходимо иметь в виду, что вместе с оператором $1a_{m-1}\dots$ $\dots a_1 1$ моноциклическим будет также взаимный оператор $1a_1\dots a_{m-1}1$. Из двух взаимных операторов в таблице указан лишь один, так что, как правило, каждому коду в таблице отвечают два оператора. Случаи, когда взаимные операторы совпадают, отмечены знаком $=$.

Таблица 6.1

m	L	m	L	m	L	m	L	m	L
1	3=	7	207	8	435	9	1055	9	1267
2	7=		211		453		1063		1275
3	13		217		455		1131		1317
4	23		235		515		1137		1333
5	45		247		537		1157		1423
	57		253		543		1167		1437
	67		277		607		1175		1473
6	103		313		717		1207		1517
	133		357				1225		1533
	147			9	1021		1243		1577
					1033		1257		1617

Некоторые свойства моноциклических операторов.

Лемма 4. *Два различных моноциклических уравнения $L_1u_i = 0$ и $L_2u_i = 0$ не имеют общих решений.*

Доказательство. Если порядки L_1 и L_2 различны, то максимальные серии из нулей, встречающиеся в решениях этих уравнений, имеют различные длины. А если L_1 и L_2 одного порядка, то можно выбрать группу $(u_1, \dots, u_m)$ так, чтобы оба уравнения определяли различные значения u_{m+1}.

В самом деле, пусть L_1 определен формулой (6.5), а $L_2u_i \equiv u_{i+m} + a'_{m-1}u_{i+m-1} + \dots + a'_1u_{i+1} + u_i$. Так как $L_2 \neq L_1$, то найдется коэффициент $a'_k \neq a_k$. Достаточно выбрать начальные значения, состоящие из $(m-1)$-го нуля и одной единицы $u_{k+1} = 1$, и мы получим разные u_{m+1}.

Следствие. Если $L_1 u_i = 0$ и $L_2 \neq L_1$, то $L_2 u_i = u_{i+\alpha_{1,2}}$. Действительно, пусть $v_i = L_2 u_i$. Тогда $L_1 v_i = L_1 L_2 u_i = L_2 L_1 u_i = 0$, так что $\{v_i\}$ — тоже решение. По лемме 4 случай $\{v_i\} = 0$ невозможен. А так как оператор L_1 моноциклический, то $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$ принадлежит одному циклу: $v_i = u_{i+\alpha_{1,2}}$.

Мы будем писать $\alpha_{1,\,2}$, так что первый индекс соответствует уравнению, а второй — преобразованию. Значение этой постоянной от выбора $\{u_i\}$ не зависит: если бы мы выбрали другое решение $\{u'_i\}$ уравнения $L_1 u'_i = 0$, то (из-за моноцикличности оператора L_1) $u'_i \equiv u_{i+\beta}$; тогда $L_2 u'_i = L_2 u_{i+\beta} = u_{i+\beta+\alpha_{1,2}} = u'_{i+\alpha_{1,2}}$.

Так как $u_i \equiv u_{i+\lambda\omega_1}$, то значение $\alpha_{1,2}$ определено с точностью до периода цикла: $\alpha_{1,2} = \alpha^0_{1,2} + \lambda\omega_1$, где λ — любое целое число. Этот произвол в выборе $\alpha_{1,2}$ мы в дальнейшем используем.

Лемма 5. *Рассмотрим два различных моноциклических оператора L_1 и L_2. Если порядки этих операторов m_1 и m_2 удовлетворяют условию $m_2 \geqslant m_1$, то $\alpha_{2,1} \neq 0$.*

Доказательство. Допустим противное: существует решение $\{u_i\} \neq 0$ такое, что $L_2 u_1 = 0$, $L_1 u_i = u_i$. Рассмотрим новый оператор $M u_i \equiv L_1 u_i + u_i$. Так как $u_i + u_i \equiv 0$, то порядок оператора M не превосходит $m_1 - 1 \leqslant m_2 - 1$.

На решении $\{u_i\}$, которое удовлетворяет моноциклическому уравнению $L_2 u_i = 0$, найдется серия из $m_2 - 1$ нулей подряд. А так как это же решение удовлетворяет уравнению $M u_i = 0$, то должно быть $\{u_i\} = 0$. Получаем противоречие.

Пример 3, показывающий, что при выполнении условий леммы 5 случай $\alpha_{1,2} = 0$ возможен.

Пусть $L_1 u_i \equiv u_{i+2} + u_{i+1} + u_i = 0$, $L_2 v_i = v_{i+4} + v_{i+1} + v_i = 0$. Решения: $\{u_i\} = \ldots, 1, 0, 1, \ldots$; $\{v_i\} = \ldots, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots$ Преобразованные решения: $\{L_2 u_i\} = \ldots, 1, 0, 1, \ldots$; $\{L_1 v_i\} = \ldots, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, \ldots$ Сравнивая преобразованные решения с исходными, найдем, что $\alpha_{1,2} = 0 + 3\lambda$, $\alpha_{2,1} = 10 + 15\lambda$.'

Пусть заданы n различных моноциклических операторов $L_1, \ldots, L_n$, порядки которых $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_n$. Условимся формально считать, что $\alpha_{s,s} = 0$ при любом s (хотя это и не согласуется с определением $\alpha_{k,s}$).

Лемма 6. *Можно выбрать $\alpha_{k,s}$ при $k < s$ так, чтобы*

$$\delta_n \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство проведем по индукции. Во-первых, $\delta_2 = -\alpha_{2,1}\cdot\alpha_{1,2}$, где $\alpha_{2,1} \neq 0$. Достаточно выбрать $\alpha_{1,2} \neq 0$, и окажется $\delta_2 \neq 0$.

Допустим теперь, что лемма справедлива для δ_{n-1}. Разложим δ_n по элементам последнего столбца:

$$\delta_n = \alpha_{1,n}A_{1,n} + \ldots + \alpha_{n-1,\,n}A_{n-1,\,n}.$$

Если какое-нибудь из дополнений $A_{k,n} \neq 0$, то можно выбрать $\alpha_{k,n}$ так, чтобы δ_n было отлично от нуля. В то же время нетрудно доказать, что случай $A_{1,n} = \ldots = A_{n-1,n} = 0$ невозможен, так как это повлекло бы за собой $\delta_{n-1} = 0$.

В самом деле, фиксируем номер k. Если $A_{k,n} = 0$, то строки этого дополнения линейно зависимы: при всех $1 \leqslant s \leqslant n-1$

$$\gamma_1\alpha_{1,s} + \ldots + \gamma_{k-1}\alpha_{k-1,s} + \gamma_{k+1}\alpha_{k+1,s} + \ldots + \gamma_n\alpha_{n,s} = 0 \tag{6.7}$$

и в (6.7) не все γ_j равны нулю.

Если $\gamma_n = 0$, то из (6.7) следует наличие линейной зависимости между строками определителя δ_{n-1}, и, стало быть, $\delta_{n-1} = 0$.

Будем считать, что $\gamma_n \neq 0$. Если все остальные γ_j в (6.7) равны нулю, то из (6.7) вытекает, что $\alpha_{n,s} = 0$, а это противоречит лемме 5. Поэтому будем считать, что среди γ_j есть хотя бы одно, назовем его γ_p, отличное от нуля. Из (6.7) следует, что при всех $1 \leqslant s \leqslant n-1$

$$\alpha_{n,s} = -\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n-1\\ j\neq k}} (\gamma_j/\gamma_n)\,\alpha_{j,s}.$$

Рассмотрим теперь $A_{p,n}$. Если $A_{p,n} = 0$, то, повторяя такие же рассуждения, придем к равенству

$$\alpha_{n,s} = - \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n-1 \\ j \neq p}} (\gamma_j'/\gamma_n') \alpha_{j,s}.$$

Исключив $\alpha_{n,s}$ из двух последних равенств, мы все-таки получим линейную зависимость между строками определителя δ_{n-1}, так что $\delta_{n-1} = 0$. И лемма 6 доказана.

О линейно независимых решениях моноциклических уравнений. Так же, как в общей теории линейных дифференциальных (или разностных) уравнений [102], решения $\{u_{i1}\}, \ldots, \{u_{ik}\}$ уравнения (6.4) называются *линейно зависимыми* (в поле Z_2), если можно указать такие $c_1, \ldots, c_k$, не все равные нулю, что при всех i

$$c_1 u_{i1} + \ldots + c_k u_{ik} = 0.$$

Совокупность m линейно независимых решений $\{u_{ij}\}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, уравнения (6.4) образует *фундаментальную систему решений* этого уравнения. Любое другое решение $\{u_i\}$ может быть получено как линейная комбинация решений фундаментальной системы

$$u_i = b_1 u_{i_1} + \ldots + b_m u_{im}.$$

Определитель

$$\det |u_{i+k,j}|_1^m \equiv \begin{vmatrix} u_{i+1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{i+1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{i+m,1} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{i+m,m} \end{vmatrix},$$

столбцы которого образованы из различных решений уравнения, играет роль вронскиана. Значение его не зависит от i. Для линейно зависимых решений $\det \equiv 0$, а для каждой фундаментальной системы $\det \equiv 1$.

На доказательстве этих предложений мы останавливаться не будем.

Рассмотрим теперь n различных моноциклических операторов $L_1, \ldots, L_n$, порядки которых равны $m_1, \ldots, m_n$. Положим $m = m_1 + \ldots + m_n$.

Лемма 7. *Если известны фундаментальные системы решений $\{u_{ij}^{(k)}\}$, $1 \leqslant j \leqslant m_k$, каждого из уравнений*

$L_k u_i = 0$, *то совокупность всех этих решений при* $1 \leqslant k \leqslant n$) *образует фундаментальную систему решений уравнения* m*-го порядка*

$$L_1 L_2 \ldots L_n u_i = 0. \qquad (6.8)$$

Доказательство. Очевидно, что все эти m решений удовлетворяют уравнению (6.8). Нужно доказать, что они в совокупности линейно независимы.

Допустим противное: существуют числа c_{kj}, не все равны нулю (для определенности $c_{11} = 1$), такие, что при всех i

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{m_k} c_{kj} u_{ij}^{(k)} = 0.$$

Рассмотрим линейные комбинации

$$v_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} u_{ij}^{(k)}.$$

Очевидно, $L_k v_i^{(k)} = 0$, причем $\{v_i^{(1)}\} \neq 0$. Применяя к тождеству $v_i^{(1)} + \ldots + v_i^{(n)} = 0$ операторы $L_2, \ldots, L_n$, получим, что при всех i

$$L_2 \ldots L_n v_i^{(1)} = v_{i+\alpha_{1,2}+\ldots+\alpha_{1,n}}^{(1)} = 0,$$

откуда следует, что $\{v_i^{(1)}\} = 0$. Противоречие!

Лемма 8. *Фиксируем по одному нетривиальному решению* $\{u_i^{(k)}\}$ *каждого из уравнений* $L_k u_i = 0$. *Для любого участка* i *длины* $m - 1$ (*то есть для* $i_0 + 1 \leqslant i \leqslant i_0 + m - 1$) *можно указать такие натуральные* $\beta_1, \ldots, \beta_n$, *что на этом участке*

$$u_{i+\beta_1}^{(1)} + \ldots + u_{i+\beta_n}^{(n)} \equiv 0. \qquad (6.9)$$

С точностью до слагаемого, кратного ω_k, *значение* β_k *единственное. На участке* i *длины* m *тождество вида* (6.9) *невозможно.*

Доказательство. Рассмотрим решение $\{u_i\}$ уравнения (6.8), удовлетворяющее начальным условиям

$$u_{i_0+1} = \ldots = u_{i_0+m-1} = 0, \quad u_{i_0+m} = 1.$$

Из леммы 7 следует, что $\{u_i\}$ представимо в виде суммы

$$u_i = v_i^{(1)} + \ldots + v_i^{(n)}, \tag{6.10}$$

где $\{v_i^{(k)}\}$ — какое-то решение: $L_k v_i^{(k)} = 0$.

Если допустить, что $\{v_i^{(k)}\} = 0$, то окажется, что $\{u_i\}$ удовлетворяет уравнению $L_1 \ldots L_{k-1} L_{k+1} \ldots L_n u_i = 0$, порядок которого $m - m_k \leqslant m - 1$, и имеет $m - 1$ нулей подряд. Значит, $\{v_i^{(k)}\} \neq 0$. И так как уравнение $L_k u_i = 0$ моноциклическое, то $v_i^{(k)} \equiv u_{i+\beta_k}^{(k)}$, причем β_k определяется с точностью до периода ω_k. Подставив все такие выражения $v_i^{(k)}$ в (6.10), получим тождество

$$u_i = u_{i+\beta_1}^{(1)} + \ldots + u_{i+\beta_n}^{(n)},$$

которое при $i_0 + 1 \leqslant i \leqslant i_0 + m - 1$ обращается в (6.9).

Лемма 7 показывает, что решения $u_{i+\beta_1}^{(1)}, \ldots, u_{i+\beta_n}^{(n)}$ могут быть включены в фундаментальную систему уравнения m-го порядка(6.8). Поэтому тождество (6.9) на участке i длины m невозможно.

П р и м е р 4. Для иллюстрации леммы 8 рассмотрим операторы L_1 и L_2 из примера 3. Здесь $m = 2 + 4 = 6$. На участке $1 \leqslant i \leqslant 5$ имеет место тождество $u_{i+1} + v_{i+6} = 0$, так как $u_{i+1} = \ldots, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots$, $v_{i+6} = \ldots, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, \ldots$ А на участке $3 \leqslant i \leqslant 7$ имеет место тождество $u_{i+2} + v_{i+4} = 0$, так как $u_{i+2} = \ldots, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots$, $v_{i+4} = \ldots, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$

§ 3. Построение ЛП$_\tau$-последовательностей

ДР-последовательности, принадлежащие моноциклическому оператору. Рассмотрим произвольный моноциклический оператор (6.5) в поле Z_2, порядок которого равен m. Определим направляющие числа (см. § 3 гл. 3) $V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots$ с помощью уравнения

$$V_{i+m} * a_{m-1} V_{i+m-1} * \ldots * a_1 V_{i+1} * V_i = 2^{-m} V_i, \tag{6.11}$$

иными словами, $LV_i = 2^{-m} V_i$, причем в L надо вместо знака $+$ использовать знак $*$.

Начальные значения $V_1, \ldots, V_m$ для уравнения (6.11) могут быть различными. Однако мы требуем, чтобы они удовлетворяли следующему условию: если в двоичной системе

$$V_i = 0,\ v_{i1}v_{i2}\ldots v_{ij}\ldots, \tag{6.12}$$

то все $v_{ii} = 1$, а при $j > i$ все $v_{ij} = 0$. В частности, можно полагать $V_i = 2^{-i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Во всяком случае матрица

$$B = \begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1m} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ v_{m1} & \ldots & v_{mm} \end{pmatrix} \tag{6.13}$$

треугольная и невырожденная: на главной диагонали стоят единицы, а выше нее — нули.

Условимся говорить, что ДР-последовательность $\{r(i)\}$ с такими направляющими числами $\{V_i\}$ *принадлежит оператору* L. Нетрудно сосчитать, что оператору порядка m принадлежат $2^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ различных ДР-последовательностей.

Уравнение (6.11) эквивалентно системе уравнений в поле Z_2, определяющих значения v_{ij} в каждом из двоичных раздрядов:

$$Lv_{ij} = 0, \qquad \text{если} \quad 1 \leqslant j \leqslant m; \tag{6.14}$$

$$Lv_{ij} = v_{i,j-m}, \quad \text{если } m < j < \infty. \tag{6.15}$$

Рассмотрим направляющую матрицу (см. § 3 гл. 3) произвольной ДР-последовательности, принадлежащей оператору L. С учетом правила выбора начальных V_i эту матрицу можно записать так:

$$(v_{ij}) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & \\ v_{21} & 1 & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & \\ v_{31} & v_{32} & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\ v_{m1} & v_{m2} & \ldots & & 1 & 0 & \ldots & \\ \hline v_{m+1,1} & v_{m+1,2} & \ldots & & & v_{m+1,m+1} & \ldots & \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & & & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \end{array}\right)$$

Лемма 9. *В направляющей матрице* (v_{ij}) *все* $v_{jj} = 1$, *а при* $j > i$ *все* $v_{ij} = 0$.

Доказательство. Для столбцов с номерами $1 \leqslant j \leqslant m$ утверждение леммы очевидно. Фиксируем $j > m$. Допустим, что утверждение леммы верно для всех столбцов с номерами, меньшими чем j, и докажем его для j-го столбца.

Во-первых, $v_{ij} = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ в силу начальных условий. Далее, до тех пор, пока $v_{i,j-m} = 0$, то есть пока $i < j - m$, уравнение (6.15) фактически однородное: $Lv_{ij} = 0$. Поэтому $v_{ij} = 0$ при $i = m + 1, m + 2, \ldots$ $\ldots, j - m - 1$. Наконец, при $i = j - m$ значение $v_{j-m,j-m} = 1$, и уравнение (6.15) с учетом уже доказанных равенств превращается в $v_{jj} = 1$.

Следствие. *ДР-последовательность, принадлежащая любому моноциклическому оператору, есть одномерная* ЛП$_0$-*последовательность.* (Это вытекает из леммы 9 и теоремы 7 гл. 3.)

Построение ЛП$_\tau$-последовательностей.

Теорема 4. *Пусть* $L_1, \ldots, L_n$ — *различные моноциклические операторы, порядки которых равны* $m_1, \ldots, m_n$. *Обозначим* $\{p^{(k)}(i)\}$ *какую-нибудь ДР-последовательность, принадлежащую оператору* L_k. *Последовательность точек* $P_0, P_1, \ldots, P_i, \ldots$ *с координатами*

$$P_i = (p^{(1)}(i), \ldots, p^{(n)}(i))$$

есть ЛП$_\tau$-*последовательность в* K^n *со значением*

$$\tau = \sum_{k=1}^{n} (m_k - 1). \tag{6.16}$$

Доказательство. 1. Фиксируем произвольный двоичный участок последовательности $\{P_i\}$, длина которого 2^ν больше, чем 2^τ. Любой номер i из такого участка записывается двоичными числами вида

$$i = c_\sigma c_{\sigma-1} \ldots c_{\nu+1} e_\nu e_{\nu-1} \ldots e_1,$$

где двоичные цифры e_j любые, а c_j фиксированы.

Выберем произвольный двоичный параллелепипед П с объемом $2^{\tau-\nu}$. В двоичной записи этот параллелепипед задается системой неравенств ($k = 1, 2, \ldots, n$)

$$0, b_1^{(k)} \ldots b_{\mu_k}^{(k)} \leqslant x_k < 0, b_1^{(k)} \ldots b_{\mu_k}^{(k)} + 0,\underbrace{0 \ldots 01}_{\mu_k},$$

где μ_k — любые неотрицательные целые числа такие, что

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n = \nu - \tau$$

(ср. с доказательством теоремы 7 в гл. 3).

Если двоичное разложение

$$p^{(k)}(i) = 0, g_{i1}^{(k)} g_{i2}^{(k)} \ldots g_{ij}^{(k)} \ldots,$$

то условие принадлежности точки P_i к П сводится к $\nu - \tau$ уравнениям

$$g_{ij}^{(k)} = b_j^{(k)}, \text{ где } 1 \leqslant j \leqslant \mu_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

Обозначим через $(v_{ij}^{(k)})$ направляющую матрицу, по которой строится $\{p^{(k)}(i)\}$. Тогда из определения $\{p^{(k)}(i)\}$ (ср. (3.31) и (6.12)) следует, что

$$g_{ij}^{(k)} = e_1 v_{1j}^{(k)} * e_2 v_{2j}^{(k)} * \ldots * e_\sigma v_{\sigma j}^{(k)}.$$

Подставив это выражение в последнюю систему и перенеся все известные величины вправо, получим систему линейных уравнений в поле Z_2, состоящую из $\nu - \tau$ уравнений с ν неизвестными $e_1, \ldots, e_\nu$:

$$e_1 v_{1j}^{(k)} + \ldots + e_\nu v_{\nu j}^{(k)} = b_j^{(k)} + e_{\nu+1} v_{\nu+1,j}^{(k)} + \ldots + e_\sigma v_{\sigma j}^{(k)}.$$

Здесь $1 \leqslant j \leqslant \mu_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$; вместо $*$ можно писать $+$, если иметь в виду, что складываются элементы Z_2.

Правые части этой системы — произвольные двоичные цифры. Мы докажем, что ранг матрицы коэффициентов этой системы равен $\nu - \tau$ и, следовательно, система при любых правых частях имеет 2^τ решений.

2. Для удобства записи заменим эту матрицу транспонированной и обозначим ее элементы через w_{ij}:

$$(w_{ij})=\begin{pmatrix} v_{11}^{(1)} & v_{12}^{(1)} \ldots v_{1\mu_1}^{(1)} & v_{11}^{(2)} \ldots v_{1\mu_2}^{(2)} \ldots v_{11}^{(n)} \ldots v_{1\mu_n}^{(n)} \\ v_{21}^{(1)} & v_{22}^{(1)} \ldots v_{2\mu_1}^{(1)} & v_{21}^{(2)} \ldots v_{2\mu_2}^{(2)} \ldots v_{21}^{(n)} \ldots v_{2\mu_n}^{(n)} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_{\nu 1}^{(1)} & v_{\nu 2}^{(1)} \ldots v_{\nu\mu_1}^{(1)} & v_{\nu 1}^{(2)} \ldots v_{\nu\mu_2}^{(2)} \ldots v_{\nu 1}^{(n)} \ldots v_{\nu\mu_n}^{(n)} \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Обозначим через μ_k' остаток от деления μ_k на m_k, так что

$$\mu_k = \rho_k m_k + \mu_k'.$$

Предположим (для определенности), что $\rho_1 \geqslant 1$ (если все $\rho_k = 0$, то последующее рассуждение заметно упрощается).

Оставим в (6.17) первые m_1 строк без изменения, а остальные (начиная с последней) будем заменять линейными комбинациями строк: вместо $w_{i+m_1, j}$ запишем $L_1 w_{ij}$, $i = \nu - m_1, \nu - m_1 - 1, \ldots, 1$ (оператор L_1 действует по i). С учетом (6.14) и (6.15) получим эквивалентную (6.17) матрицу

$$\left(\begin{array}{c|cc} \begin{matrix} v_{11}^{(1)} \ldots v_{1m_1}^{(1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v_{m_1 1}^{(1)} \ldots v_{m_1 m_1}^{(1)} \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{w_{ij}} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} v_{11}^{(1)} & \ldots\ldots & v_{1,\mu_1-m_1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ v_{\nu-m_1, 1}^{(1)} & \ldots & v_{\nu-m_1, \mu_1-m_1}^{(1)} \end{matrix} & L_1 w_{ij} \end{array}\right). \tag{6.18}$$

В верхнем левом углу здесь стоит треугольная невырожденная матрица B_1 вида (6.13).

Если $\rho_1 > 1$, то в нижней части матрицы (6.18) снова повторяем то же преобразование. И поступаем так всего ρ_1 раз. Если $\mu_1' > 0$, то после этих преобразований останутся еще μ_1' столбцов с элементами $v_{ij}^{(1)}$; перенесем их в конец матрицы. Тогда получим следующую матрицу, эквивалентную (6.17):

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\boxed{B_1} & & & \\
 & \ddots & & \\
 & & \boxed{B_1} & \\
\hline
0 & & \dot v_{11}^{(2)} \ldots \dot v_{1\mu_2}^{(2)} \ldots \dot v_{11}^{(n)} \ldots \dot v_{1\mu_n}^{(n)} & v_{11}^{(1)} \ldots v_{1\mu_1}^{(1)} \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right). \tag{6.19}$$

Элементы (6.19), стоящие над чертой, нас интересовать не будут. Из-за линейности оператора *) $L_1^{\rho_1}$ все $\dot v_{ij}^{(k)}$, стоящие под чертой, по-прежнему удовлетворяют (6.14) и (6.15) (со своим номером k). Более того, так как $\dot v_{ij}^{(2)}$ при $1 \leqslant j \leqslant m_2$ удовлетворяют моноциклическому уравнению вида (6.14), то эти столбцы отличаются от исходных $v_{ij}^{(2)}$ лишь сдвигом номеров по i. Поэтому, обозначив

$$B_2 = \begin{pmatrix} \dot v_{11}^{(2)} \ldots \dot v_{1m_2}^{(2)} \\ \ldots\ldots \\ \dot v_{m_2 1}^{(2)} \ldots \dot v_{m_2 m_2}^{(2)} \end{pmatrix},$$

мы можем утверждать, что определитель этой матрицы

$$\det |B_2| = \det |v_{ij}^{(2)}|_1^{m_2} = 1.$$

Проделаем теперь (если $\rho_2 \geqslant 1$) в части матрицы (6.19), расположенной под чертой, такие же преобразования с помощью L_2, какие мы делали с помощью L_1. И снова оставшиеся μ_2' столбцов перенесем в конец матрицы.

*) Степень оператора понимается в обычном смысле: $L_1^2 = L_1 L_1$ и т. д.

Проделав такие преобразования со всеми L_k, приведем матрицу (6.17) к виду

$$\begin{pmatrix} B_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & B_1 & & & & \\ & & & B_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & 0 & & & B_n & \\ & & & & & & \begin{matrix} w_{11}^{(1)} \dots w_{1\mu_1'}^{(1)} \dots w_{11}^{(n)} \dots w_{1\mu_n'}^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_{\nu'1}^{(1)} \dots w_{\nu'\mu_1'}^{(1)} \dots w_{\nu'1}^{(n)} \dots w_{\nu'\mu_n'}^{(n)} \end{matrix} \end{pmatrix}, \tag{6.20}$$

где $\nu' = \mu_1' + \ldots + \mu_n' + \tau$, все определители $\det |B_k| = 1$, а элементы «остаточной матрицы»

$$w_{ij}^{(k)} = L_1^{\rho_1} \ldots L_{k-1}^{\rho_{k-1}} L_{k+1}^{\rho_{k+1}} \ldots L_n^{\rho_n} v_{ij}^{(k)}. \tag{6.21}$$

Легко видеть, что если бы все $\rho_k = 0$, то матрица (6.17) уже была бы остаточной матрицей вида (6.20).

3. Так как в (6.21) все j меньше соответствующих m_k (ибо $j \leqslant \mu_k' < m_k$), то $L_k w_{ij}^{(k)} = 0$. Значит, столбцы остаточной матрицы суть решения моноциклических уравнений.

Предположим, что среди чисел μ_k' всего s чисел, отличных от нуля, и обозначим их $\mu'_\varkappa$, $1 \leqslant \varkappa \leqslant s$. Все решения $w_{ij}^{(\varkappa)}$, отвечающие одному $\varkappa$, линейно независимы: они отличаются общим сдвигом номеров по i от исходных $v_{ij}^{(\varkappa)}$. Так как

$$\nu' = \sum_{k=1}^{n} (m_k - 1) + \sum_{\varkappa=1}^{s} \mu_\varkappa' \geqslant \sum_{\varkappa=1}^{s} (m_\varkappa + \mu_\varkappa' - 1) \geqslant \sum_{\varkappa=1}^{s} m_\varkappa,$$

то из леммы 7 следует, что все столбцы остаточной матрицы линейно независимы. Значит, ранг ее равен $\mu_1' + \ldots + \mu_n'$. А ранг всей матрицы (6.20) равен

$$m_1\rho_1 + \ldots + m_n\rho_n + \mu_1' + \ldots + \mu_n' = \nu - \tau,$$

что и требовалось доказать.

Результат этой теоремы можно несколько усилить, если использовать также последовательность $\{p(i)\}$, введенную в гл. 2.

Теорема 4'. *Пусть выполнены все условия теоремы 4. Тогда последовательность точек $Q_0, Q_1, \ldots, Q_i, \ldots$ с координатами*

$$Q_i = (p(i), p^{(1)}(i), \ \ldots, \ p^n(i))$$

есть ЛП$_\tau$-последовательность в K^{n+1} со значением τ, определяемым (6.16).

Доказательство. Так как $\{p(i)\}$ представляет собой ДР-последовательность с единичной направляющей матрицей ($v_{ij}^{(0)} = \delta_{ij}$ — символу Кронекера), то, повторяя рассуждения п. 1 в доказательстве теоремы 4 (с очевидными изменениями, связанными с присутствием μ_0, $v_{ij}^{(0)}$ и т. п.), придем к матрице, вполне аналогичной (6.17):

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \ldots & 0 & v_{11}^{(1)} & v_{12}^{(1)} & \ldots & v_{1\mu_n}^{(n)} \\
0 & 1 & \ldots & 0 & v_{21}^{(1)} & v_{22}^{(1)} & \ldots & v_{2\mu_n}^{(n)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 1 & v_{\mu_0 1}^{(1)} & v_{\mu_0 2}^{(1)} & \ldots & v_{\mu_0\mu_n}^{(n)} \\
\hline
0 & 0 & \ldots & 0 & v_{\mu_0+1,1}^{(1)} & v_{\mu_0+1,2}^{(1)} & \ldots & v_{\mu_0+1,\mu_n}^{(n)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \ldots & 0 & v_{\nu 1}^{(1)} & v_{\nu 2}^{(1)} & \ldots & v_{\nu\mu_n}^{(n)}
\end{array}\right). \qquad (6.17')$$

Легко видеть, что для выделения остаточной матрицы достаточно проделать те же преобразования, что в п. 2 доказательства теоремы 4: в (6.20) окажется еще один «ящик» B_0, содержащий единичную матрицу порядка μ_0, а в (6.21) вместо $v_{ij}^{(k)}$ будет фигурировать $v_{i+\mu_0,j}^{(k)}$. Ранг остаточной матрицы снова окажется равным $\mu_1' + \ldots + \mu_n'$, а ранг всей матрицы (6.17) будет равен

$$\mu_0 + m_1\rho_1 + \ldots + m_n\rho_n + \mu_1' + \ldots + \mu_n' = \nu - \tau.$$

З а м е ч а н и е. Если считать, что ДР-последовательность $\{p(i)\}$ принадлежит некоторому моноциклическому оператору L_0 порядка $m_0 = 1$, то теорема 4' окажется частным случаем теоремы 4: в формулу (6.16) добавится слагаемое $m_0 - 1$, равное нулю. В качестве такого оператора L_0 следует выбрать оператор $L_0 u_i \equiv u_{i+1}$. Этот оператор не принадлежит к типу (6.5), и говорить о его моноцикличности можно только условно. Однако соответствующее ему уравнение (6.11) правильно определяет направляющие числа для $\{p(i)\}$: из $V_{i+1} = 2^{-1} V_i$ с начальным значением $V_1 = 2^{-1}$ следует, что все $V_i = 2^{-i}$.

Предложенное определение L_0 имеет еще одну особенность: соответствующий L_0 многочлен (6.6) есть просто x и представляет собой неприводимый многочлен 1-й степени.

О точности формулы (6.16) для τ. Ниже приведен пример 5, показывающий, что значение τ, гарантированное теоремой 4, не всегда является точным.

Т е о р е м а 5. *Предположим, что все условия теоремы 4 выполнены, и обозначим* $\delta_n = \det \| \alpha_{k,s} \|_1^n$. *Если можно выбрать все* $\alpha_{k,s}$ *так, чтобы любой из периодов* $\omega_k = 2^{m_k} - 1$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *был взаимно простым с* δ_n, *то значение* τ, *определяемое формулой* (6.16), *точное для последовательности* $\{P_i\}$ *в* K^n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем значение $\check{\tau} = \tau - 1$ и рассмотрим такие μ_k, что все $\mu_k' = 1$:

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n = \nu - \check{\tau}, \quad \mu_k = \rho_k m_k + 1.$$

В этом случае остаточная матрица в (6.20) будет содержать n столбцов и $\nu' = n + \check{\tau} = m - 1$ строк. Лемма 8 гарантирует существование такого набора чисел $\beta_1, \ldots, \beta_n$, что решения $\left\{v_{i+\beta_1,1}^{(1)}\right\}, \ldots, \left\{v_{i+\beta_n,1}^{(n)}\right\}$ линейно зависимы при $1 \leqslant i \leqslant \nu'$.

Из (6.21) вытекает, что в остаточной матрице все $w_{ij}^{(k)}$ равны $v_{i+t_k,j}^{(k)}$ со сдвигом $t_k = \sum\limits_{s=1}^{n} \rho_s \alpha_{k,s}$ (напомним, что мы условились считать $a_{k,k}=0$). Если мы сумеем выбрать целые неотрицательные $\rho_1, \ldots, \rho_n$ так, чтобы при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\sum_{s=1}^{n} \rho_s a_{k,s} \equiv \beta_k \pmod{\omega_k}, \tag{6.22}$$

то столбцы остаточной матрицы будут линейно зависимы и ранг ее окажется не больше, чем $n-1$. Тогда ранг всей матрицы (6.20) будет не больше, чем

$$n-1+\sum_{k=1}^{n} \rho_k m_k = -1+\sum_{k=1}^{n} \mu_k = \nu-\check{\tau}-1.$$

Следовательно, $\{P_i\}$ не может быть ЛП$_{\check{\tau}}$-последовательностью.

Остается доказать существование целых неотрицательных $\rho_1, \ldots, \rho_n$, удовлетворяющих системе сравнений (6.22).

Во-первых, можно выбрать ([82], стр. 113) целые числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ так, чтобы

$$\delta_n \xi_k \equiv \beta_k \pmod{\omega_k}.$$

Здесь как раз существенно, что ω_k взаимно просты с δ_n.

Затем можно решить систему уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \rho_s a_{k,s} = \delta_n \xi_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{6.23}$$

определитель которой $\delta_n \neq 0$ и которая имеет единственное целочисленное решение $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

Наконец, можно сделать все ρ_k положительными, добавляя к ним (если нужно) члены вида $\lambda\omega_1 \ldots \omega_n$: сравнения (6.22) от этого не нарушатся.

Следствие. *Предположим, что все условия теоремы 4 выполнены. Если $n>1$ и все периоды $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — простые числа, то значение τ, определяемое формулой* (6.16), *точное для последовательности $\{P_i\}$ в K^n.*

В самом деле, лемма 6 позволяет выбрать $a_{k,s}$ так, что $\delta_n \neq 0$. Тогда все условия теоремы 5 окажутся выполненными.

Т е о р е м а 5'. *Предположим, что все условия теоремы 4 выполнены, и обозначим* $\delta_n = \det \| \alpha_{k,s} \|_1^n$. *Если можно выбрать все* $\alpha_{k,s}$ *так, чтобы любой из периодов* ω_k, *кроме, быть может, одного, был взаимно простым с* δ_n, *то значение* τ, *определяемое формулой* (6.16), *точное для последовательности* $\{Q_i\}$ *в* K^{n+1}.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 5, мы вместо (6.22) получим систему сравнений

$$\mu_0 + \sum_{s=1}^{n} \rho_s \alpha_{k,s} \equiv \beta_k \pmod{\omega_k}, \tag{6.24}$$

и вопрос сведется к подбору $(n+1)$-го целого числа μ_0 $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Если ω_{k_0} не взаимно просто с δ_n, то положим $\mu_0 = \beta_{k_0}$, $\xi_{k_0} = 0$, а остальные ξ_k найдем из сравнений

$$\delta_n \xi_k \equiv \beta_k - \mu_0 \pmod{\omega_k}.$$

Затем решим систему (6.23) и найдем $\rho_1, \ldots, \rho_n$, которые вместе с μ_0 удовлетворяют (6.24).

С л е д с т в и е. *Предположим, что все условия теоремы 4 выполнены и* $n > 1$. *Если среди периодов* $\omega_1, \ldots, \omega_n$ *по крайней мере* $n-1$ *простых чисел, то значение* τ, *определяемое формулой* (6.16), *точное для последовательности* $\{Q_i\}$ *в* K^{n+1}.

П р и м е р 5. Рассмотрим операторы L_1 и L_2 из примера 3. Так как $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, то формула (6.16) дает $\tau = 4$. На рис. 6.5 нанесены первые 64 точки последовательности $\{P_i\}$, построенной по ДР-последовательностям, принадлежащим этим операторам (начальные направляющие числа $V_i = 2^{-i}$). Эти точки образуют П$_3$-сетку. Можно проверить все варианты остаточных матриц и убедиться, что в действительности $\{P_i\}$ — это ЛП$_3$-последовательность.

В этом примере

$$\delta_2 = -\alpha_{1,2} \cdot \alpha_{2,1} = -3\lambda(10 + 15\lambda') \equiv 0 \pmod{15},$$

в то время как $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 15$. Условия теоремы 5 не выполнены.

Данные, приведенные в примере 4, позволяют явно записать систему (6.22) ($\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 6$) так, что

$$3\lambda\rho_2 \equiv 1 \pmod 3,$$

$$(10 + 15\lambda')\rho_1 \equiv 6 \pmod{15}.$$

Очевидно, первое из этих сравнений неразрешимо.

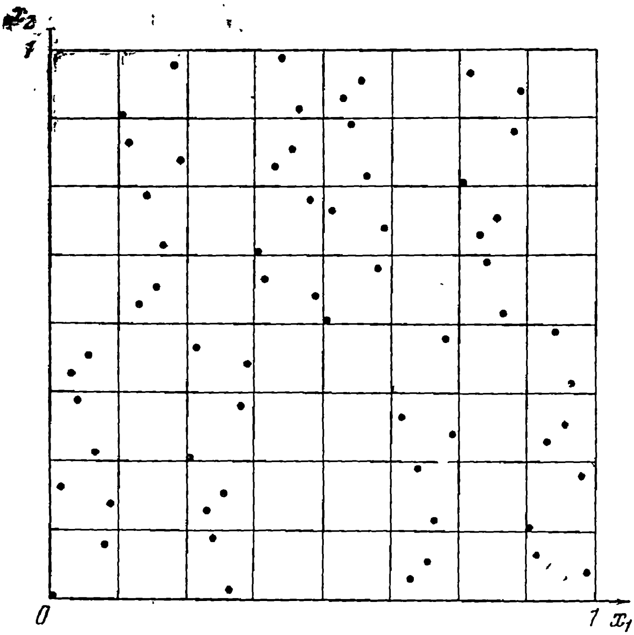

Рис. 6.5.

Однако соответствующие этим же двум ДР-последовательностям точки $\{Q_i\}$ образуют $\Lambda\Pi_4$-последовательность в K^3, ибо условия теоремы 5′ выполнены. Систему (6.24) можно записать (выбрав $\alpha_{1,2} = 0$, $\alpha_{2,1} = 10$) в форме

$$\mu_0 \equiv 1 \pmod 3,$$

$$\mu_0 + 10\rho_1 \equiv 6 \pmod{15},$$

откуда $\mu_0 = 1$, $\rho_1 = 2$, ρ_2 — любое.

Поставим вопрос: существует ли бесконечно много последовательностей $\{P_i\}$ и $\{Q_i\}$, для которых (6.16) дает точное значение τ? Из теорем 5 и 5′ вытекает, что ответ на этот вопрос будет положительным, если существует бесконечно много простых периодов ω_k. Последнее утверждение равносильно хорошо известной в теории чисел нерешенной проблеме о бесконечности множества простых чисел Мерсенна — так называются числа вида $2^m - 1$ ([115]; [82], стр. 37).

Наименьшее значение τ в формуле (6.16). Чем меньше τ, тем лучше распределены точки ЛП$_\tau$-последовательности. Поэтому особенно интересно рассмотреть точки $\{Q_i\}$, получающиеся при использовании моноциклических операторов возможно низких порядков.

Обозначим через n_s количество моноциклических операторов, порядки которых $m \leqslant s$. Очевидно,

$$n_s = \sum_{m=1}^{s} m^{-1}\varphi(2^m - 1). \tag{6.25}$$

Если $n_s \leqslant n \leqslant n_{s+1}$, то наименьшее значение τ_{n+1}, которое можно получить по формуле (6.16), равно

$$\tau_{n+1} = \sum_{m=1}^{s} (m-1)\, m^{-1}\varphi(2^m - 1) + (n - n_s)\, s,$$

или

$$\tau_{n+1} = \sum_{m=1}^{s} \varphi(2^m - 1) + (n - n_s)(s+1) - n. \tag{6.26}$$

Некоторые значения τ_{n+1} приведены в таблице 6.2.

Таблица 6.2

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
τ_{n+1}	0	1	3	5	8	11	15	19	23	27	31	35

Есть немало работ, посвященных исследованию асимптотического поведения различных сумм, содержащих функцию Эйлера (например, [103]), однако асимптотика сумм, входящих в (6.25) и (6.26), по-видимому, неизвестна. Поэтому мы воспользуемся более грубым неравенством $\varphi(k) > Ck/\log_2 \log_2 k$ (где $C > 0$), в силу которого

$$\varphi(2^m - 1) > C(2^m - 1)/\log_2 m. \tag{6.27}$$

Теорема 6. *Для наименьшего значения* $\tau = \tau_{n+1}$ *в формуле* (6.16) *при* $n \to \infty$ *справедлива оценка*

$$\tau_{n+1} \leqslant n[\log_2 n + \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \log_2 n + O(1)]. \tag{6.28}$$

В то же время $\tau_{n+1} \geqslant C_1 n \log_2 n/\log_2 \log_2 n$, *где* $C_1 > 0$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится вспомогательная лемма:

Если $\eta(s) > 0$ *и* $\eta(s+1) \sim \eta(s)$, *когда* $s \to \infty$, *то при* $s \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{s} \frac{2^m}{\eta(m)} \sim \frac{2^{s+1}}{\eta(s)}. \tag{6.29}$$

Доказательство леммы. Обозначим

$$z_s = \eta(s) 2^{-s} \sum_{m=1}^{s} 2^m \eta^{-1}(m).$$

Умножив равенство

$$\sum_{m=1}^{s+1} \frac{2^m}{\eta(m)} - \sum_{m=1}^{s} \frac{2^m}{\eta(m)} = \frac{2^{s+1}}{\eta(s+1)}$$

на $\eta(s+1)2^{-(s+1)}$, получим

$$z_{s+1} - \frac{1}{2}[\eta(s+1)/\eta(s)] z_s = 1.$$

При $s \to \infty$ отсюда следует, что $z_s \to 2$, а это равносильно (6.29).

Перейдем к доказательству теоремы. Так как $\varphi(k) \leqslant k$, то из (6.25) и (6.29) следует

$$n \leqslant n_{s+1} \leqslant \sum_{m=1}^{s+1} \frac{2^m - 1}{m} = \frac{2^{s+2}}{s}[1 + o(1)];$$

с другой стороны, из (6.25), (6.27) и (6.29)

$$n \geqslant n_s > C \sum_{m=1}^{s} \frac{2^m - 1}{m \log_2 m} = \frac{C 2^{s+1}}{s \log_2 s} [1 + o(1)].$$

Логарифмируя оба полученных неравенства, имеем

$$s - \log_2 s - \log_2 \log_2 s + O(1) \leqslant$$
$$\leqslant \log_2 n \leqslant s - \log_2 s + 2 + o(1). \quad (6.30)$$

Из (6.30) нетрудно вывести оценки для s. Во-первых,

$$s \leqslant \log_2 n + \log_2 s + \log_2 \log_2 s + O(1).$$

Взяв логарифмы от обеих частей, получим

$$\log_2 s \leqslant \log_2 \log_2 n + o(1). \quad (6.31)$$

Подставляя (6.31) в правую часть предпоследнего неравенства, найдем

$$s \leqslant \log_2 n + \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 \log_2 n + O(1). \quad (6.32)$$

С другой стороны, из (6.30)

$$s \geqslant \log_2 n + \log_2 s - 2 + o(1),$$

а отсюда $\log_2 s \geqslant \log_2 \log_2 n + o(1)$. Подставив это соотношение в правую часть последнего неравенства, получим

$$s \geqslant \log_2 n + \log_2 \log_2 n - 2 + o(1). \quad (6.33)$$

Перейдем теперь к оценкам τ_{n+1}. Из (6.26) с учетом (6.25) получаем

$$\tau_{n+1} = ns - n_s - \sum_{m=1}^{s} (sm^{-1} - 1)\, \varphi(2^m - 1) \leqslant ns.$$

Вместе с (6.32) это даст нам требуемую оценку (6.28). С другой стороны,

$$\tau_{n+1} \geqslant \sum_{m=1}^{s} \varphi(2^m - 1) - n_s = \sum_{m=1}^{s} (1 - m^{-1})\, \varphi(2^m - 1).$$

Используя (6.27) и (6.29), получим

$$\tau_{n+1} > C \sum_{m=1}^{s} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{2^m - 1}{\log_2 m} = \frac{C 2^{s+1}}{\log_2 s} [1 + o(1)].$$

Числитель и знаменатель последнего выражения оценим с помощью (6.33) и (6.31):

$$\tau_{n+1} \geqslant \frac{C}{2} \frac{n \log_2 n}{\log_2 \log_2 n} [1 + o(1)].$$

Из последнего неравенства следует второе утверждение теоремы.

Замечание. Уточнив значение постоянной C в (6.27), можно доказать, что величина $O(1)$ в (6.32) отрицательна при $n \to \infty$.

Оценка постоянных $\tau(n)$. Из теоремы 4' и леммы 3 вытекает, что Π_τ-сетки существуют в K^n при любых n. Более того, методом леммы 3 можно построить Π_τ-сетку со значением (6.16) в K^{n+2}. Поэтому из теоремы 6 следует, что $\tau(n+2) \leqslant \tau_{n+1}$, а при $n \to \infty$

$$\tau(n) = O(n \log n).$$

Мы уже видели, что $\tau(1) = \tau(2) = 0$. Докажем теперь, что $\tau(3) = 0$. Для этого рассмотрим ДР-последовательность $\{q(i)\}$, принадлежащую моноциклическому оператору первого порядка $u_{i+1} + u_i$. (Эта последовательность уже изучалась нами в § 3 гл. 3.) По теореме 4' последовательность точек с координатами $(p(i), q(i))$ есть ЛП$_0$-последовательность на квадрате K^2. Следовательно, сетки, состоящие из точек K^3 с координатами $(p(i), q(i), i/N)$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, где $N = 2^\nu$, будут Π_0-сетками в K^3.

Пусть $\{p^{(2)}(i)\}$ — какая-нибудь ДР-последовательность, принадлежащая оператору второго порядка $u_{i+2} + u_{i+1} + u_i$. Сетки, состоящие из точек с координатами $(p(i), q(i), p^{(2)}(i), i/N)$, будут Π_1-сетками в K^4. Принимая во внимание лемму 2, получим, что $\tau(4) = 1$.

Всегда ли $\tau(n+2) = \tau_{n+1}$, как это имеет место для $n \leqslant 2$,— неизвестно.

§ 4. Использование Π_τ-сеток и $Л\Pi_\tau$-последовательностей для вычисления многомерных интегралов

Первый пункт настоящего параграфа можно читать независимо от всей книги.

Способ вычисления n-мерных интегралов. Мы используем простейшую формулу интегрирования

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \approx \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(Q_i), \qquad (6.34)$$

в которой Q_i — точки единичного n-мерного куба (или n-мерные векторы): $Q_i = (q_{i1}, \ldots, q_{in})$.

Таблица 6.3 позволяет легко вычислять точки Q_0, $Q_1, \ldots, Q_{N-1}$, которые при любом N образуют «хорошую» формулу интегрирования (6.34). Количество точек $N < 2^{21}$, размерность $n \leqslant 13$.

В таблице приведены числители координат точек $\boldsymbol{V}_s$, которые называются *направляющими точками**). Знаменатели всех координат точки $\boldsymbol{V}_s$ равны 2^s, так что, например,

$$\boldsymbol{V}_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right).$$

Если требуются точки меньшей размерности n, то следует ограничиться первыми n координатами.

Правило вычисления точек $Q_0, Q_1, \ldots, Q_i, \ldots$: если в двоичной системе **)

$$i = e_m e_{m-1} \ldots e_2 e_1,$$

то

$$Q_i = e_1 \boldsymbol{V}_1 * e_2 \boldsymbol{V}_2 * \ldots * e_m \boldsymbol{V}_m,$$

---

*) Координатами направляющих точек $\boldsymbol{V}_s$ служат направляющие числа V_s, соответствующие различным моноциклическим операторам.

**) В десятичной системе эта запись означает, что

$$i = e_1 + 2e_2 + 2^2 e_3 + \ldots + 2^{m-1} e_m,$$

где все e_k — двоичные цифры (то есть равны либо нулю, либо единице).

Таблица 6.3

n	s=1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	3	5	15	17	51	85	255	257	771	1285	3855	4369	13 107	21 845	65 535	65 537	196 611	327 685	983 055
3	1	1	7	11	13	61	67	79	465	721	823	4091	4125	4 141	28 723	45 311	53 505	250 113	276 231	326 411
4	1	3	1	5	31	29	81	147	433	149	719	3693	3841	11 523	16 641	49 925	16 671	83 229	515 921	482 707
5	1	1	5	3	15	51	125	141	177	759	267	1839	6929	16 241	16 565	17 139	82 207	50 979	252 717	851 901
6	1	3	7	7	9	11	79	63	193	707	1351	1479	6857	1 227	32 527	36 863	102 401	241 667	258 055	323 591
7	1	1	3	11	7	31	13	161	309	901	2007	1311	6235	2 915	27 745	35 885	34 225	112 177	378 387	246 491
8	1	3	3	13	23	57	11	219	101	687	449	579	3779	717	17 751	20 473	23 627	261 147	140 453	658 927
9	1	1	1	15	11	29	13	85	475	63	1233	337	6577	16 383	24 859	24 845	110 365	175 013	97 387	453 871
10	1	3	5	1	29	61	79	169	293	177	689	2259	2197	6 225	22 861	64 589	15 455	107 641	103 861	247 585
11	1	1	7	5	5	3	127	97	47	819	765	3341	3379	15 217	21 513	19 463	15 387	50 237	130 435	790 151
12	1	3	1	11	25	15	9	191	417	631	789	1327	2885	4 295	29 021	37 603	62 509	248 899	87 493	716 363
13	1	1	5	7	19	51	51	151	157	141	389	901	5889	16 131	12 039	11 055	90 495	123 227	49 489	574 417

где $*$ означает поразрядное сложение по модулю 2 в двоичной системе. Как правило, во всех ЭВМ есть специальная команда, осуществляющая операцию $*$: это так называемая команда «сравнения» (в каждом разряде числа «складываются» по правилам $0+0=1+1=0$, $0+1=1+0=1$). (Подробнее об операции $*$ сказано на стр. 119 *).)

Для разъяснения этого правила вычислим точку Q_{22} в 4-мерном кубе. В двоичной системе число 22 запишется как 10110. Значит, $Q_{22}=V_2*V_3*V_5$. Отдельные координаты точки Q_{22} таковы:

$$q_{22,1}=\frac{1}{4}*\frac{1}{8}*\frac{1}{32}=0{,}01*0{,}001*0{,}00001=0{,}01101,$$

$$q_{22,2}=\frac{3}{4}*\frac{5}{8}*\frac{17}{32}=0{,}11*0{,}101*0{,}10001=0{,}11101,$$

$$q_{22,3}=\frac{1}{4}*\frac{7}{8}*\frac{13}{32}=0{,}01*0{,}111*0{,}01101=0{,}11001,$$

$$q_{22,4}=\frac{3}{4}*\frac{1}{8}*\frac{31}{32}=0{,}11*0{,}001*0{,}11111=0{,}00011.$$

Итак, $Q_{22}=\left(\frac{13}{32},\frac{29}{32},\frac{25}{32},\frac{3}{32}\right)$.

Количество операций, затрачиваемых на ЭВМ для вычисления Q_i, растет с ростом i, но медленно, как $\log_2 i$. Используются только простейшие (логические) операции, которые выполняются на ЭВМ быстрее арифметических операций.

В самом деле, для выделения двоичного знака e_s числа i используются только сдвиг и логическое умножение $\wedge$ ($0\wedge 0=0$, $0\wedge 1=1\wedge 0=0$, $1\wedge 1=1$); если $e_s=1$, то координаты V_s «прибавляются» операцией $*$ к накапливаемым координатам Q_i, а если $e_s=0$, то координаты V_s не прибавляются.

Блок-схема программы для вычисления Q_i приведена на рис. 6.6, где предполагается, что число i записано в нормализованной форме $i=0,\ e_m e_{m-1}\dots e_1\times 2^m$ и заготовлена константа $v=1/2$, которая содержит лишь одну единицу в первом (после запятой) разряде: $v=0,100\dots\times 2^0$; индекс $1\leqslant r\leqslant n$. При $i=0$ точка $Q_0=(0,\ 0,\dots,\ 0)$.

) В машинах с плавающей запятой перед применением операции слагаемые V_s должны быть денормализованы.

Нетрудно сосчитать, что если $0 \leqslant i \leqslant 2^\nu - 1$, то на вычисление каждого Q_i в среднем затрачивается $\nu - 1$ циклов этой программы, причем «сложение» V_s осуществляется лишь в $\nu/2$ циклах (в среднем).

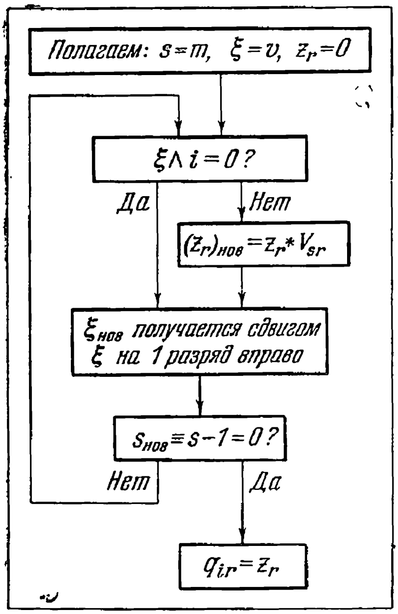

Рис. 6.6.

Различные координаты точек Q_i неравноправны: координаты с меньшими номерами распределены лучше. Поэтому переменные в подинтегральной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ полезно нумеровать так, чтобы наиболее существенные координаты имели меньшие номера. Интересно, что такая ситуация часто встречается в задачах, решаемых методом Монте-Карло: сперва моделируют наиболее сильно влияющие параметры, а затем — всё менее и менее существенные.

Пример 6. Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(P) = \lambda \int_G \beta(P') \frac{e^{-\alpha|P-P'|}}{4\pi |P-P'|^2} y(P')\, dP'$$

или, в операторной форме, $y(P) = \lambda \mathbf{K} y(P)$, где P и P' — точки, принадлежащие области G в трехмерном пространстве, dP' — элемент объема. Уравнение это называется *интегральным уравнением Пайерлса* *). Оно играет большую роль в теории ядерных реакторов, так как вопрос о критичности области G сводится к нахождению первого собственного значения $\lambda = \lambda_1$ этого уравнения.

Для вычисления λ_1 можно использовать метод последовательных приближений в форме О. Келлога [84]: выбираем произвольную функцию $\varphi_0(P) > 0$, находим ее итерации $\varphi_{k+1}(P) = \mathbf{K}\varphi_k(P)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и вычисляем

*) Здесь оно записано в упрощенной форме; считаем, что $\alpha(P) \equiv \alpha$.

скалярные произведения $(\varphi_k, \varphi_0) = \int_G \beta(P)\varphi_k(P)\,\varphi_0(P)\,dP$.

Пусть $\lambda_{(k)} = \dfrac{(\varphi_k, \varphi_0)}{(\varphi_{k+1}, \varphi_0)}$; тогда

$$\lambda_{(0)} \geqslant \lambda_{(1)} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{(k)} \geqslant \ldots \to \lambda_1.$$

В работе [85] скалярные произведения (φ_k, φ_0) вычислялись методом Монте-Карло с помощью случайных блужданий фиктивной точки $P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_k$ в области G.

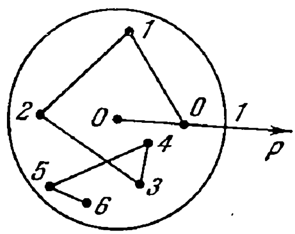

Рис. 6.7.

Рассмотрим один из примеров этой работы: пусть G — однородный шар радиуса 1, $\alpha = 1{,}279$, $\beta = h\alpha$, где $h = 1{,}724$. Значение λ_1 для этой задачи известно: $\lambda_1 = 1{,}000$ (с точностью до 0,0005).

Выберем $\varphi_0(P) \equiv 1$ и вычислим шесть приближений $\lambda_{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant 5$. Расчетные формулы из [85] (учитывающие симметрию задачи) запишем в следующем виде.

Расчет траектории номер i:

а) находим псевдослучайные числа $\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,13}$;

б) выбираем начальное положение точки $\rho_0 = \sqrt{\gamma_{i,1}}$; $M_0 = 2\pi h\alpha\rho_0$;

в) рассчитываем k-й случайный пробег, $0 \leqslant k \leqslant 5$:

$$\mu_k = 2\gamma_{i,2k+2} - 1,$$
$$l_k = -\mu_k\rho_k + \sqrt{1 - \rho_k^2(1 - \mu_k^2)},$$
$$z_k = 1 - e^{-\alpha l_k},$$
$$r_k = -(1/\alpha)\ln(1 - z_k\gamma_{i,2k+3}),$$
$$M_{k+1} = hz_kM_k,$$
$$\rho_{k+1} = \sqrt{\rho_k^2 + r_k^2 + 2\mu_k\rho_k r_k}.$$

На рис. 6.7 изображена одна траектория; положение точки P_k (с радиусом ρ_k) обозначено цифрой k.

Значения $M_k = M_k^{(i)}$, сосчитанные для каждой траектории, суммируются $(0 \leqslant i \leqslant N - 1)$. Скалярные произведения (φ_k, φ_0) приближенно равны величинам

$$(\varphi_k, \varphi_0)_N = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} M_k^{(i)}.$$

Из расчетных формул видно, что каждое значение M_{k+1} зависит от $2k+3$ чисел $\gamma_{i,r}$, другими словами, $(\varphi_{k+1}, \varphi_0)$ — $(2k+3)$-кратный интеграл. В нашем примере вычисляемые интегралы имеют кратности $1, 3, 5, \ldots, 13$.

В таблице 6.4 приведены результаты расчета этого примера *). В качестве псевдослучайных чисел использовались координаты точек Q_i (так что $\gamma_{i,r} = q_{ir}$).

Таблица 6.4

$(\varphi_k, \varphi_0)_N$	N					
	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	$2\cdot 2^{11}$	$3\cdot 2^{11}$
$k=0$	9,20851	9,22249	9,22941	9,23285	9,23456	9,23457
$k=1$	8,65795	8,64846	8,65278	8,65363	8,65353	8,65364
$k=2$	8,41019	8,42388	8,40858	8,40299	8,39932	8,40019
$k=3$	8,35104	8,33810	8,27457	8,28400	8,28367	8,28226
$k=4$	8,28948	8,24262	8,25958	8,22625	8,21091	8,20452
$k=5$	8,15434	8,12117	8,20422	8,22359	8,24665	8,21540
$k=6$	7,97718	8,05455	8,14409	8,18652	8,24667	8,19772
η_{3N}	20,2	33,7	2,3	24,0	46,7	61,4

$(\varphi_k, \varphi_0)_N$	N					
	$4\cdot 2^{11}$	$5\cdot 2^{11}$	$6\cdot 2^{11}$	$7\cdot 2^{11}$	$8\cdot 2^{11}$	DM_k
$k=0$	9,23541	9,23508	9,23542	9,23542	9,23584	10,7
$k=1$	8,65353	8,65336	8,65302	8,65328	8,65339	21,9
$k=2$	8,39828	8,39719	8,39613	8,39697	8,39682	37,5
$k=3$	8,27695	8,27606	8,27206	8,27319	8,27227	57,3
$k=4$	8,20803	8,20792	8,19511	8,19628	8,20029	81,1
$k=5$	8,18576	8,16790	8,14208	8,15790	8,16507	110,9
$k=6$	8,16580	8,15557	8,12969	8,15475	8,15261	147,0
η_{3N}	38,3	38,8	2,6	13,2	—	—

*) Расчет осуществила В. А. Красноярова.

Если бы расчет проводился по «настоящим» случайным числам $\gamma_{i,r}$, то $(\varphi_k, \varphi_0)_N$ сходились бы к (φ_k, φ_0) со скоростью $1/\sqrt{N}$. В последнем столбце таблицы 6.4 приведены полученные в ходе расчета значения дисперсии $\mathsf{D}M_k$, по которым можно оценить вероятные ошибки такого приближения: $\delta_{kN} = 0{,}675\sqrt{\mathsf{D}M_k/N}$.

В нашем расчете, по-видимому, скорость сходимости равна $1/N$. На это указывают два факта: во-первых, можно условно принять последние значения (при $N = 2^{14}$) за точные и убедиться, что с ростом N величины $\eta_{kN} = N|(\varphi_k, \varphi_0)_N - (\varphi_k,\varphi_0)_{2^{14}}|$ практически не растут (в последней строке таблицы 6.4 приведены значения η_{3N}); во-вторых, погрешность большинства значений $(\varphi_k, \varphi_0)_N$ в таблице во много раз меньше, чем соответствующие δ_{kN}.

Приближенные значения $\lambda_{(k)N} = (\varphi_k, \varphi_0)_N/(\varphi_{k+1}, \varphi_0)_N$ приведены в таблице 6.5.

Таблица 6.5

N	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	$2\cdot 2^{11}$	$3\cdot 2^{11}$
$\lambda_{(0)N}$	1,0636	1,0664	1,0666	1,0669	1,0671	1,0671
$\lambda_{(1)N}$	1,0285	1,0267	1,0290	1,0298	1,0303	1,0302
$\lambda_{(2)N}$	1,0080	1,0105	1,0162	1,0144	1,0139	1,0142
$\lambda_{(3)N}$	1,0074	1,0113	1,0018	1,0070	1,0089	1,0095
$\lambda_{(4)N}$	1,0166	1,0150	1,0067	1,0003	0,9957	0,9987
$\lambda_{(5)N}$	1,0222	1,0083	1,0074	1,0045	1,0000	1,0022

N	$4\cdot 2^{11}$	$5\cdot 2^{11}$	$6\cdot 2^{11}$	$7\cdot 2^{11}$	$8\cdot 2^{11}$
$\lambda_{(0)N}$	1,0672	1,0672	1,0673	1,0673	1,0673
$\lambda_{(1)N}$	1,0304	1,0305	1,0306	1,0305	1,0306
$\lambda_{(2)N}$	1,0147	1,0146	1,0150	1,0149	1,0150
$\lambda_{(3)N}$	1,0084	1,0083	1,0094	1,0094	1,0088
$\lambda_{(4)N}$	1,0027	1,0049	1,0065	1,0047	1,0043
$\lambda_{(5)N}$	1,0024	1,0015	1,0015	1,0004	1,0015

Пример 6 показывает, что точки Q_i выгодно использовать в качестве псевдослучайных *) точек при расчете методом Монте-Карло задач с ограниченной размерностью ($n \leqslant 13$). Количество точек $2^{21} \approx 2 \cdot 10^6$ для большинства расчетов достаточно **).

Более общая постановка вопроса о псевдослучайных точках изложена в § 1 гл. 7.

О выборе направляющих чисел. В теоремах 4 и 4' фигурируют любые ДР-последовательности, принадлежащие моноциклическим операторам. Оценка τ не зависит от того, какую ДР-последовательность, принадлежащую данному оператору, мы выберем. Однако «качество» начальных участков ЛП$_\tau$-последовательностей при $N < 2^{n-1+\tau}$, вообще говоря, зависит от выбора конкретных ДР-последовательностей. Чтобы показать это, приведем следующий пример.

Пример 7. Рассмотрим ЛП$_\tau$-последовательность на квадрате K^2, образованную точками с координатами $x_{i1} = p^{(3)}(i)$, $x_{i2} = p^{(4)}(i)$, где $p^{(3)}(i)$ и $p^{(4)}(i)$ — ДР-последовательности, принадлежащие соответственно операторам

$$u_{i+3} + u_{i+1} + u_i \text{ и } u_{i+3} + u_{i+2} + u_i.$$

Согласно (6.16) $\tau = 2(3-1) = 4$, причем значение это точное, ибо оба периода $\omega = 2^3 - 1 = 7$ простые.

Направляющие числа для $p^{(3)}(i)$ выберем следующие:

$$V_1 = 1/2; \quad V_2 = 1/4; \quad V_3 = 1/8;$$

далее

$$V_{i+3} = V_i * V_{i+1} * 2^{-3} V_i.$$

А для другого оператора рассмотрим два варианта направляющих чисел:

$$V_1 = 1/2; \quad V_2 = 1/4; \quad V_3 = 1/8;$$

*) Или квазислучайных — некоторые авторы различают эти понятия.

**) В случае надобности таблицу 6.3 легко расширить. Нужные для этого моноциклические операторы имеются в таблице 6.1. Расчет дальнейших направляющих чисел V_8 по формуле (6.11) затруднений не представляет.

далее,

$$V_{i+3} = V_i * V_{i+2} * 2^{-3} V_i;$$

$$V_1' = 1/2; \quad V_2' = 3/4; \quad V_3' = 5/8;$$

далее,

$$V'_{i+3} = V_i' * V'_{i+2} * 2^{-3} V_i'.$$

Соответствующие ДР-последовательности обозначим $p^{(4)}(i)$ и $p^{(4)'}(i)$. Значения первых 16 точек этих последовательностей приведены в таблице 6.6.

Таблица 6.6

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$p^{(3)}(i)$	0	$1/2$	$1/4$	$3/4$	$1/8$	$5/8$	$3/8$	$7/8$	$13/16$
$p^{(4)}(i)$	0	$1/2$	$1/4$	$3/4$	$1/8$	$5/8$	$3/8$	$7/8$	$11/16$
$p^{(4)'}(i)$	0	$1/2$	$3/4$	$1/4$	$5/8$	$1/8$	$3/8$	$7/8$	$3/16$

i	9	10	11	12	13	14	15
$p^{(3)}(i)$	$5/16$	$9/16$	$1/16$	$15/16$	$7/16$	$11/16$	$3/16$
$p^{(4)}(i)$	$3/16$	$15/16$	$7/16$	$9/16$	$1/16$	$13/16$	$5/16$
$p^{(4)'}(i)$	$11/16$	$15/16$	$7/16$	$9/16$	$1/16$	$5/16$	$13/16$

Сетка, состоящая из 16 точек $x_{i1} = p^{(3)}(i)$, $x_{i2} = p^{(4)}(i)$, построена на рис. 6.8, а сетка, состоящая из 16 точек $x_{i1} = p^{(3)}(i)$, $x_{i2} = p^{(4)'}(i)$, построена на рис. 6.9; первая из них — плохая сетка с $\varphi_\infty = 16$, в то время как для второй $\varphi_\infty = 4$.

Теоретически этот вопрос не исследовался. В таблице 6.3 начальные направляющие числа выбраны так, чтобы проекции ЛП$_\tau$-последовательности $\{Q_i\}$ на двух- и трехмерные грани вида $K_{i_1,\, i_1+1}$ и $K_{i_1,\, i_1+1, i_1+2}$ были хорошими при малых N.

Погрешность формулы (6.34). Из теорем 1 и 3 и формул (4.49), (4.52) следует, что если использовать в качестве сеток интегрирования П$_\tau$-сетки или, как это сделано в (6.34), начальные участки ЛП$_\tau$-последовательностей, то погрешность формулы (4.29) на линейном пространстве

S_p будет

$$\|\delta\| \leqslant \frac{2^{n-1+\tau}}{N^{1/p}}. \qquad (6.35)$$

Порядок сходимости оказывается наилучшим.

Однако для практических целей важен не только порядок сходимости, который приблизительно одинаков для всех рассмотренных в книге «хороших» сеток, но важны

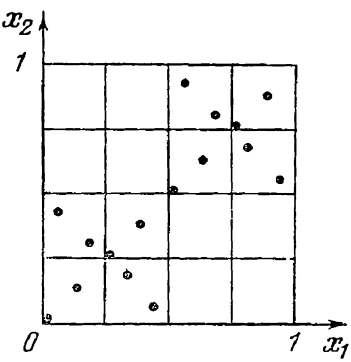

Рис. 6.8.

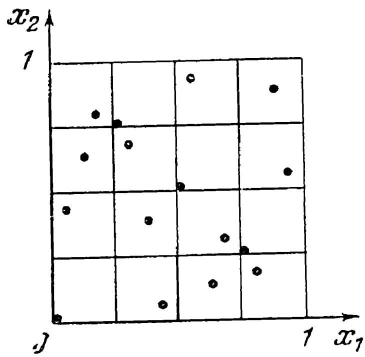

Рис. 6.9.

также значения констант. К сожалению, в оценках погрешности любых из этих сеток константы растут с ростом n.

Одно из достоинств нашей теории — то, что мы знаем нижние границы для констант. И хотя эти границы точны лишь при $n = 1$, но они позволяют нам судить о величине константы в (6.35) при небольших n. В самом деле, из (4.49) и (4.51) следует, что $\|\delta\| \geqslant 1/N^{1/p}$ при любом $n \geqslant 2$. Ясно, что значения $2^{n-1+\tau(n)}$ в (6.35), равные при $n = 2, 3, 4$ соответственно 2, 4, 16, можно считать небольшими.

Поэтому можно смело рекомендовать Π_τ-сетки и ЛП$_\tau$-последовательности как хороший метод для вычисления интегралов не слишком большой кратности ($n \leqslant 4$) от не слишком гладких функций.

Автор не сомневается, что такие сетки и последовательности полезны также при бóльших n. Это видно из примера 6. Однако численных экспериментов в этом направлении пока проведено мало и делать категорические утверждения нельзя.

Пример 8 [98]. Рассмотрим две «плохие» функции от трех переменных:

$$\varphi_1 = 4{,}5\,|x_1 - x_2|\,\sqrt{x_3},$$

$$\varphi_2 = 5{,}818605\,(x_1 - 1/10)\,\sqrt{|x_2 - 1/9|\,\sqrt{x_3 - 1/8}}.$$

Интеграл от каждой из этих функций по кубу K^3 равен 1. Приближенное вычисление интегралов осуществлялось по формуле (4.29) пятью методами — по всем сеткам, рассмотренным в гл. 5 и 6. Использовались:

а) равномерные сетки Σ_0 с $\beta_\nu = 1/2$ ($N = 216, 512, 1000, 1728, 4096$);

б) параллелепипедальные сетки Σ_Π ($N = 199, 523, 1069, 2129, 4001$);

в) отрезки последовательности Холтона Σ^* ($N = 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}$);

г) сетки Хэммерсли Σ_H ($N = 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}$);

д) Π_0-сетки ($p(i)$, $q(i)$, i/N) ($N = 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}$).

В таблице 6.7 приведены величины

$$\eta_{sN} = N\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \varphi_s\,dx_1\,dx_2\,dx_3 - \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\varphi_s(P_i)\right|.$$

В этом примере точность Π_0-сеток оказалась лучше точности других «хороших» сеток (б, в, г), хотя порядок сходимости практически тот же.

Таблица 6.7

s	$\approx\log_2 N$	а	б	в	г	д	s	$\approx\log_2 N$	а	б	в	г	д
1	8	4,9	4,2	0,1	3,1	1,6	2	8	0,6	1,6	4,8	2,3	0,2
	9	6,2	4,2	1,4	2,2	3,9		9	7,7	0,2	2,9	0,8	0,1
	10	7,5	4,1	1,4	1,2	0,5		10	6,8	0,9	5,3	2,1	0,4
	11	8,6	7,5	0,6	2,7	0,3		11	71,7	3,6	6,1	1,6	0,3
	12	10,7	7,1	0,8	3,0	0,9		12	20,7	6,1	6,9	2,5	0,6

§ 5. Оценки отклонения

Отклонение — это наиболее распространенная характеристика равномерности распределения. Оно подробно рассматривалось в гл. 3. Определение отклонения в n-мерном случае — см. стр. 161.

Отклонение Π_τ-сеток. Рассмотрим всевозможные Π_τ-сетки, состоящие из $N = 2^\nu$ точек в K^n, и обозначим через $D_{\nu,n,\tau}$ верхнюю грань отклонений D по всем таким сеткам.

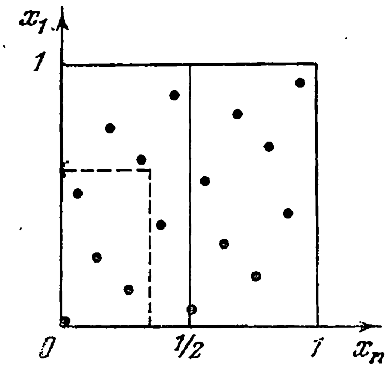

Рис. 6.10.

Теорема 7. *Если* $\nu \geqslant n-1+\tau$, *то*

$$D_{\nu,n,\tau} \leqslant 2^\tau \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\nu-\tau}{j}. \qquad (6.36)$$

Доказательство. Выберем в K^n произвольную Π_τ-сетку Σ, состоящую из $2^{\nu+1}$ точек с координатами $(x_{i1},\ldots, x_{in})$, $0 \leqslant i < 2^{\nu+1}$. Разделим эти точки на два множества: точки, у которых $x_{in} < 1/2$, и точки, у которых $x_{in} \geqslant 1/2$.

Множество точек, у которых $x_{in} < 1/2$, после преобразования координат

$$x_s' = x_s, \quad 1 \leqslant s \leqslant n-1; \qquad x_n' = 2x_n,$$

снова образует Π_τ-сетку Σ', состоящую из 2^ν точек. Если $x_n < 1/2$, то (рис. 6.10)

$$S_N(x_1,\ldots, x_n) - 2^{\nu+1}x_1\ldots x_n = S'_{N/2}(x_1',\ldots,x_n') - 2^\nu x_1'\ldots x_n'.$$

Отсюда видно, что при $x_n < 1/2$

$$|S_N(x_1, \ldots, x_n) - 2^{\nu+1}x_1\ldots x_n| \leqslant D_{\nu,n,\tau}. \qquad (6.37)$$

Пусть теперь $x_n \geqslant 1/2$. Точки сетки Σ, у которых $x_{in} \geqslant 1/2$, после преобразования координат

$$x_s'' = x_s, \quad 1 \leqslant s \leqslant n-1; \quad x_n'' = 2x_n - 1,$$

тоже образуют Π_τ-сетку Σ'', состоящую из 2^ν точек. При этом (рис. 6.11)

$$S_N(x_1,\ldots, x_n) - 2^{\nu+1}x_1\ldots x_n = [S''_{N/2}(x_1'',\ldots, x_n'') - \\ - 2^\nu x_1''\ldots x_n''] + [S'_{N/2}(x_1',\ldots, x_{n-1}', 1) - 2^\nu x_1'\ldots x_{n-1}'].$$

Последняя разность не превосходит $D_{\nu,n-1,\tau}$, ибо проекция сетки Σ' на грань $K_{12\ldots n-1}$ (или, что то же, на плоскость $x_n = 0$) есть снова Π_τ-сетка (лемма 1). Поэтому для $x_n \geqslant 1/2$

$$|S_N(x_1, \ldots, x_n) - 2^{\nu+1}x_1 \ldots x_n| \leqslant \leqslant D_{\nu,n,\tau} + D_{\nu,n-1,\tau}. \quad (6.38)$$

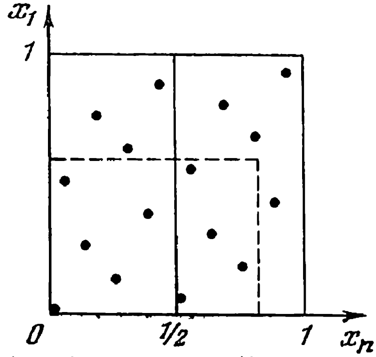

Рис. 6.11.

Из (6.37) и (6.38) следует, что

$$D_{\nu+1,n,\tau} \leqslant D_{\nu,n,\tau} + D_{\nu,n-1,\tau}. \quad (6.39)$$

Чтобы решить разностное неравенство (6.39), нужны «краевые условия».

Во-первых, докажем, что при $n = 1$ и любом $\nu > \tau$

$$D_{\nu,1,\tau} = 2^\tau. \quad (6.40)$$

В самом деле, из определения Π_τ-сетки следует, что, поделив $[0, 1]$ на $2^{\nu-\tau}$ равных частей, найдем в каждой из них по 2^τ точек сетки. Если $x = \xi 2^{\tau-\nu} + x'$, где $0 \leqslant x' < < 2^{\tau-\nu}$, то (рис. 6.12)

$$S_N(x) - Nx = (\xi 2^\tau + N') - 2^\nu x = N' - 2^\nu x'.$$

Здесь N' — число точек сетки в $[\xi 2^{\tau-\nu}, x)$,— так же как и $2^\nu x'$, заключено между 0 и 2^τ. Поэтому $|S_N(x) - Nx| \leqslant 2^\tau$, а отсюда следует, что $D_{\nu,1,\tau} \leqslant \leqslant 2^\tau$. Остается доказать, что эта оценка точная.

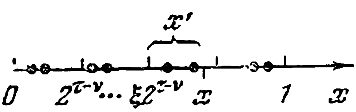

Рис. 6.12.

Поместим «последние» 2^τ точек Π_τ-сетки в точку $x = 1$. Тогда при $x = 1 - \varepsilon/N$ получим

$$|S_N(x) - Nx| = |(N - 2^\tau) - N(1 - \varepsilon/N)| = 2^\tau - \varepsilon.$$

Ясно, что $\sup |S_N(x) - Nx| = 2^\tau$.

В качестве второго краевого условия выберем тривиальное неравенство «на диагонали» (рис. 6.13):

при $\bar{\nu} = n + \tau - 1$

$$D_{\bar{\nu},n,\tau} \leqslant 2^{\bar{\nu}}. \tag{6.41}$$

Допустим, что при некотором ν $(\nu > \tau)$ и при всех $1 < n < \nu - \tau + 1$ оценка (6.36) верна. Легко видеть, что в силу (6.40) и (6.41) эта оценка будет справедлива также для $n = 1$ и $n = \nu - \tau + 1$. Но тогда для значения $\nu + 1$ при любом n, удовлетворяющем неравенствам $1 < n < \nu - \tau + 2$, из (6.39) получим

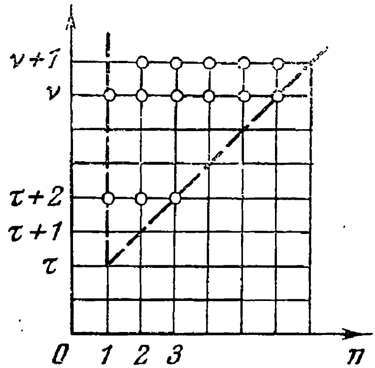

Рис. 6.13.

$$D_{\nu+1,n,\tau} \leqslant 2^\tau \left[\sum_{j=0}^{n-1} \binom{\nu-\tau}{j} + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{\nu-\tau}{j} \right] = 2^\tau \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\nu+1-\tau}{j}.$$

Для полноты доказательства по индукции остается проверить справедливость формулы (6.36) при $\nu = \tau + 2$ и $n = 2$. В этом случае $D_{\tau+2,2,\tau} \leqslant D_{\tau+1,2,\tau} + D_{\tau+1,1,\tau} \leqslant \leqslant 2^{\tau+1} + 2^\tau = 3 \cdot 2^\tau$, что и требовалось: $2^\tau \sum\limits_{j=0}^{1} \binom{2}{j} = 3 \cdot 2^\tau$.

Таким образом, теорема доказана.

Отклонение $Л\Pi_\tau$-последовательностей. Рассмотрим теперь произвольную $Л\Pi_\tau$-последовательность в K^n и обозначим через Σ_N начальный участок этой последовательности, состоящий из точек с номерами $0 \leqslant i \leqslant N - 1$.

Теорема 8. *Для произвольного начального участка любой $Л\Pi_\tau$-последовательности в K^n при $N \geqslant 2^{n-1+\tau}$ справедлива оценка отклонения*

$$D(\Sigma_N) \leqslant 2^\tau \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\nu_1 - \tau + 1}{j+1} + 2^\tau - 1, \tag{6.42}$$

где $\nu_1 = Ц(\log_2 N)$ — целая часть логарифма N.

Доказательство. Пусть

$$N = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_k} + N_k,$$

где $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_k \geqslant n - 1 + \tau$, а $0 \leqslant N_k < 2^{n-1+\tau}$. Разобьем начальный участок $0 \leqslant i < N$ на участки

$$0 \leqslant i < 2^{\nu_1}, \quad 2^{\nu_1} \leqslant i < 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2}, \ldots, N - N_k \leqslant i < N.$$

Первые k участков — это Π_τ-сетки. Очевидно,

$$S_N = S^{(1)}_{2^{\nu_1}} + S^{(2)}_{2^{\nu_2}} + \ldots + S^{(k)}_{2^{\nu_k}} + S^{(k+1)}_{N_k},$$

где различные функции $S^{(j)}$ отвечают различным участкам сетки, так что $S^{(j)}_{2^{\nu_j}}(x_1, \ldots, x_n)$ — число точек j-го участка, принадлежащих параллелепипеду $[0, x_1) \times \ldots \times [0, x_n)$. Поэтому

$$S_N(x_1, \ldots, x_n) - Nx_1 \ldots x_n =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \left(S^{(j)}_{2^{\nu_j}} - 2^{\nu_j} x_1 \ldots x_n\right) + \left(S^{(k+1)}_{N_k} - N_k x_1 \ldots x_n\right).$$

Отсюда следует, что

$$D\left(\Sigma_N\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} D_{\nu_j, n, \tau} + N_k. \tag{6.43}$$

Оценка (6.43) более точная, чем (6.42). Однако она существенно зависит от двоичной структуры числа N. Поэтому предположим, что в (6.43) ν_j принимают все возможные значения, а N_k максимально. Получим неравенство

$$D(\Sigma_N) \leqslant \sum_{\nu = n-1+\tau}^{\nu_1} D_{\nu, n, \tau} + 2^{n-1+\tau} - 1.$$

Подставим сюда оценку (6.36):

$$D(\Sigma_N) \leqslant 2^\tau \sum_{\nu = n-1+\tau}^{\nu_1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{\nu-\tau}{j} + 2^{n-1+\tau} - 1.$$

Введем новый индекс суммирования $s = \nu - \tau$ и поменяем порядок суммирования:

$$D(\Sigma_N) \leqslant 2^\tau \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{s=n-1}^{\nu_1-\tau} \binom{s}{j} + 2^{n-1+\tau} - 1. \tag{6.44}$$

Внутреннюю сумму вычислим при помощи формулы

$$\sum_{s=j}^{k-1} \binom{s}{j} = \binom{k}{j+1}.$$

Получим

$$\sum_{s=n-1}^{\nu_1-\tau} \binom{s}{j} = \sum_{s=j}^{\nu_1-\tau} \binom{s}{j} - \sum_{s=j}^{n-2} \binom{s}{j} = \binom{\nu_1-\tau+1}{j+1} - \binom{n-1}{j+1},$$

где последний член при $j = n - 1$ надо полагать равным нулю. Подставляя последнее выражение в (6.44), после несложных вычислений получим (6.42).

Асимптотика при $N \to \infty$. Так как ν и ν_1 стремятся к ∞ вместе с N, то из (6.36) и (6.42) следует, что

$$D_{\nu,\, n,\, \tau} \leqslant \frac{2^\tau}{(n-1)!} \nu^{n-1} + O(\nu^{n-2}),$$

$$D(\Sigma_N) \leqslant \frac{2^\tau}{n!} \nu_1^n + O(\nu_1^{n-1}).$$

Порядки правых частей равны соответственно $\log^{n-1} N$ и $\log^n N$ и совпадают с порядками оценок для наиболее равномерных среди известных сеток и последовательностей, рассмотренных в § 3 гл. 5. Асимптотические значения постоянных в этих оценках неизвестны. Можно, однако, отметить, что из (6.28) и формулы $\log_2 (n!) = n \log_2 n - n \log_2 e + (1/2) \log_2 n + O(1)$ вытекает, что

$$\log_2 (2^\tau/n!) \leqslant n \log_2 \log_2 n \, [1 + o(1)],$$

в то время как соответствующая оценка постоянной для последовательности Холтона (см. (5.15) и стр. 184) есть

$$\log_2 (n!) = n \log_2 n \, [1 + o(1)].$$

Случай $n = 2$. Если вместо тривиального краевого условия (6.41) использовать какую-нибудь содержательную оценку, то и (6.36) и (6.42) можно улучшить. Проделаем это для квадрата K^2.

Лемма 10.

$$D_{\tau+2,2,\tau} = 2^{\tau+1}. \tag{6.45}$$

Доказательство. Разобьем квадрат K^2 на три области так, как это изображено на рис. 6.14. Если точка $(x_1, x_2) \in G_1$, то площадь прямоугольника $[0, x_1) \times [0, x_2)$ не превосходит $1/2$. Так как каждому Π_k с площадью $1/4$ принадлежат 2^τ точек сетки, то отсюда следует, что $S_N(x_1, x_2) \leqslant 2 \cdot 2^\tau$. В области G_1 всегда $x_1 x_2 \leqslant 1/2$, так что $N x_1 x_2 \leqslant 2 \cdot 2^\tau$. Значит, в этой области

$$|S_N(x_1, x_2) - N x_1 x_2| \leqslant 2^{\tau+1}. \tag{6.46}$$

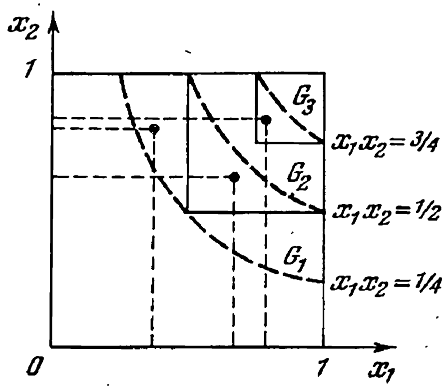

Рис. 6.14.

Пусть теперь точка (x_1, x_2) принадлежит G_2. Тогда площадь $[0, x_1) \times [0, x_2)$ не превосходит $3/4$, однако внутри этого прямоугольника содержится двоичный прямоугольник $[0, 1/2) \times [0, 1/2)$ площадью в $1/4$. Значит, $2^\tau \leqslant S_N(x_1, x_2) \leqslant 3 \cdot 2^\tau$. В то же время в G_2 всегда $1/4 \leqslant x_1 x_2 \leqslant 3/4$, так что $2^\tau \leqslant N x_1 \cdot x_2 \leqslant 3 \cdot 2^\tau$. Значит, и в G_2 справедлива оценка (6.46).

Наконец, пусть точка (x_1, x_2) принадлежит G_3. Часть квадрата K^2, расположенная вне прямоугольника $[0, x_1) \times [0, x_2)$, принадлежит двум двоичным прямоугольникам $[3/4, 1] \times [0, 1]$ и $[0, 1] \times [3/4, 1]$, каждый из которых содержит 2^τ точек сетки. Значит, вне $[0, x_1) \times [0, x_2)$ лежит не более чем $2 \cdot 2^\tau$ точек, и поэтому $2 \cdot 2^\tau \leqslant S_N(x_1, x_2) \leqslant 4 \cdot 2^\tau$. В G_3 всегда $1/2 < x_1 x_2 < 1$, так что $2 \cdot 2^\tau \leqslant N x_1 x_2 \leqslant 4 \cdot 2^\tau$. И оценка (6.46) справедлива также в G_3.

Осталось доказать достижимость равенства в (6.45). Для этого рассмотрим Π_τ-сетку, изображенную на рис. 6.15, где каждый кружок означает 2^τ совпадающих точек. При $x_1 = x_2 = 1 - \varepsilon$ получим отклонение

$$|S_N(x_1, x_2) - Nx_1x_2| = 2^\tau \,|\, 4\,(1-\varepsilon)^2 - 2\,|,$$

которое при $\varepsilon \to 0$ стремится к $2^{\tau+1}$. Итак, лемма доказана.

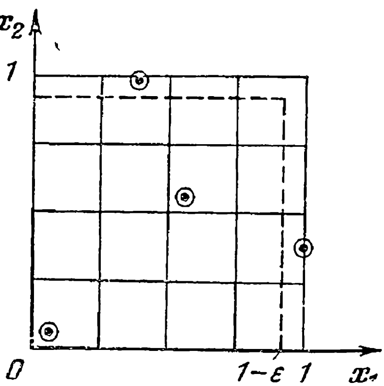

Рис. 6.15.

Теорема 7'. *Если* $\nu \geqslant \tau + 2$, *то*

$$D_{\nu,\,2,\,\tau} \leqslant (\nu - \tau)\, 2^\tau. \qquad (6.47)$$

Доказательство. Из (6.39) при $n = 2$ и (6.40) вытекает, что

$$D_{\nu+1,\,2,\,\tau} \leqslant D_{\nu,\,2,\,\tau} + 2^\tau.$$

Из этого неравенства и условия (6.45) следует (6.47).

Следствие. *Для Π_0-сеток в квадрате K^2 получаем при $\nu \geqslant 2$ оценку*

$$D_{\nu,\,2,\,0} \leqslant \nu. \qquad (6.48)$$

Заметим, что для конкретных Π_0-сеток, состоящих из точек с координатами $(p\,(i),\, i/N)$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, $N = 2^\nu$ (см. рис. 6.10), в [79] была получена оценка отклонений более слабая, чем (6.48), а в [109] доказано, что для таких сеток $D = {}^1/_3\nu + O\,(1)$.

Теорема 8'. *Пусть* $N = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_r}$, *где* $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_r \geqslant 0$. *Для начального участка* P_0, $P_1, \ldots, P_{N-1}$ *любой ЛП_0-последовательности в K^2 справедлива оценка отклонения*

$$D\,(\Sigma_N) \leqslant \sum_{j=1}^{r} \nu_j + \theta, \qquad (6.49)$$

где $\theta = 0$, *если* $N \equiv 0 \pmod 4$; $\theta = 1$, *если* $N \equiv 1 \pmod 4$ *или* $N \equiv 2 \pmod 4$; $\theta = 2$, *если* $N \equiv 3 \pmod 4$.

Схема доказательства. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 8, и учитывая (6.48), получим вместо (6.43) неравенство

$$D(\Sigma_N) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \nu_j + N_k.$$

Затем надо рассмотреть все возможные случаи $N_k = 0,1,2,3$ и учесть, что кроме $\nu_1, \ldots, \nu_k$ в (6.49) могут фигурировать еще ν_{r-1} и ν_r.

Заметим, что при $N = 2^\nu$ оценка (6.49) обращается в (6.48).

Случай $n = 3$.

Теорема 7″. *Если $\nu \geqslant 2$, то*

$$D_{\nu,3,0} \leqslant \frac{1}{2}(\nu^2 - \nu + 4). \tag{6.50}$$

Схема доказательства. Во-первых, нужно доказать, что $D_{2,3,0} = 3$. Тогда из (6.39) при $n = 3$ и (6.48) получим, что $D_{\nu+1,3,0} \leqslant D_{\nu,3,0} + \nu$, а отсюда следует (6.50).

Доказательство равенства $D_{2,3,0} = 3$ вполне аналогично доказательству леммы 10. Куб K^3 разбивается на три области (см. рис. 6.14): $G_3 = [3/4, 1] \times [3/4, 1] \times [3/4, 1]$; $G_2 = [1/2, 1] \times [1/2, 1] \times [1/2, 1] - G_3$; $G_1 = K^3 - G_2 - G_3$.

Если точка $(x_1, x_2, x_3) \in G_1$, то $S_4(x_1, x_2, x_3) \leqslant 2$ и $4x_1 x_2 x_3 \leqslant 2$. Если $(x_1, x_2, x_3) \in G_2$, то $1 \leqslant S_4(x_1, x_2, x_3) \leqslant 3$, $1/2 \leqslant 4x_1 x_2 x_3 \leqslant 3$. А если $(x_1, x_2, x_3) \in G_3$, то $1 \leqslant S_4(x_1, x_2, x_3) \leqslant 4$, и $1 \leqslant 27/16 \leqslant 4x_1x_2x_3 \leqslant 4$. Таким образом, доказывается, что $D_{2,3,0} \leqslant 3$.

Затем выбираем сетку, состоящую из четырех точек:

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, 1-\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \left(\frac{3}{8}; 1-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{8}\right),$$
$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right), \quad \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right).$$

Легко проверить, что это Π_0-сетка. В точке $x_1 = x_2 = x_3 = 1 - \varepsilon$

$$|S_4(x_1, x_2, x_3) - 4x_1x_2x_3| = 4(1-\varepsilon)^3 - 1,$$

и эта величина стремится к 3, когда $\varepsilon \to 0$.

§ 6. Улучшенные оценки погрешности

Этот параграф примыкает к § 2 главы 4: оценивается ошибка $\delta(f)$ (4.30) формулы (4.29), в которой $N = 2^\nu$ и узлы $P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}$ образуют Π_τ-сетку.

Лемма 11. *Пусть* $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$, $\tau < \nu$. *Рассмотрим функцию*

$$g(P) = \chi_{m_1 j_1}(x_{i_1}) \ldots \chi_{m_s j_s}(x_{i_s}),$$

где $m_1 + \ldots + m_s \leqslant \nu - \tau$. *Если узлы формулы* (4.29) *образуют* Π_τ-*сетку, то* $\delta(g) = 0$.

Доказательство. Вычислим сумму

$$\left|\sum_{\mu=0}^{N-1} g(P_\mu)\right| = \left|\sum_{\mu=0}^{N-1} \prod_{\theta=1}^{s} 2^{(m_\theta-1)/2} \operatorname{sgn}\chi_{m_\theta j_\theta}(x_{\mu i_\theta})\right| =$$

$$= \prod_{\theta=1}^{s} 2^{(m_\theta-1)/2} \left| S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^+) - S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^-)\right|. \quad (6.51)$$

Объем s-мерного параллелепипеда $\Pi_k = l_{m_1 j_1} \times \ldots \times l_{m_s j_s}$ равен

$$|\Pi_k| = 2^{-\sum\limits_{\theta=1}^{s}(m_\theta - 1)} = 2^{s - \sum\limits_{\theta=1}^{s} m_\theta} = 2^{s+\tau-\nu+p_0},$$

где по условию леммы $p_0 = \nu - \tau - (m_1 + \ldots + m_s) \geqslant 0$. Следовательно, объем каждого s-мерного октанта Π_k равен $2^{\tau-\nu+p_0}$. Из леммы 1 и определения Π_τ-сеток вытекает, что каждому такому октанту принадлежат ровно $2^{\tau+p_0}$ проекций точек сетки на грань $K_{i_1 \ldots i_s}$. Значит, в (6.51) разность $S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^+) - S_N^{i_1 \ldots i_s}(V_k^-) = 0$.

Очевидно, что $\int\limits_{K^n} g(P)\,dP = 0$. Поэтому из (6.51) и (4.30) получаем $\delta(g) = 0$.

Следствие. *Формула* (4.29) *с узлами, образующими* Π_τ-*сетку, точна для конечных сумм Хаара вида*

$$f(P) = a_1 + \hat{\sum_l} \sum_{m_1+\ldots+m_s \leqslant \nu-\tau} a_{m,j}^l \chi_{m_1 j_1}(x_{i_1}) \ldots \chi_{m_s j_s}(x_{i_s}).$$

Следующая теорема, идея доказательства которой принадлежит Б. Л. Грановскому *), показывает, что в слу-

*) Б. Л. Грановский, Некоторые вопросы планирования регрессионных экспериментов и теории квадратурных формул со случайными узлами, Диссертация, Ленинград, 1968.

чае формулы интегрирования (4.29) с узлами, образующими Π_τ-сетки, ошибка $\delta(f)$ для каждой функции $f(P)$ из S_p убывает несколько быстрее, чем $\|\delta\|$ на S_p, порядок которой равен $N^{-1/p}$. Аналогичный факт для других классов функций установлен в [56] и [49].

Теорема 9. *Если интеграл от функции $f(P)$ из S_p вычисляется по формуле* (4.29), *узлы которой образуют Π_τ-сетку, то*

$$\delta(f) = o(N^{-1/p}).$$

Доказательство. Приняв во внимание предыдущее следствие, воспользуемся равенством (4.31), в котором вместо суммирования по всем $m_1, \ldots, m_s$ будем считать, что $m_1 + \ldots + m_s > \nu - \tau$. Так как для Π_τ-сеток

$$\Phi_q^{i_1 \ldots i_s} \leqslant (\Phi_\infty^{i_1 \ldots i_s})^{1/p} N^{1/q} \leqslant 2^{(s-1+\tau)/p} N^{1/q},$$

то, повторяя рассуждения, приведшие нас от формулы (4.31) к (4.33), получим неравенство

$$|\delta(f)| \leqslant N^{-1/p} 2^{(n-1+\tau)/p} \hat{\sum} \sum_{m_1+\ldots+m_s > \nu-\tau} \prod_{\theta=1}^{s} 2^{(m_\theta-1)/2} \left\{ \sum_j |c_k^i|^p \right\}^{1/p}. \tag{6.52}$$

Под знаком $\hat{\sum}$ здесь стоят остатки сходящихся рядов (4.9), которые стремятся к нулю при $\nu = \log_2 N \to \infty$. Теорема доказана.

Теорема 10. *Если узлы формулы* (4.29) *образуют Π_τ-сетку, то на пространстве H_α*

$$\|\delta\| = O(N^{-\alpha} \ln^{n-1} N). \tag{6.53}$$

Заметим сразу, что оценка (6.53) по порядку лучше всех оценок, полученных в главе 5. Из оценки (4.50) оценка (6.53) не вытекает.

Для доказательства теоремы 10 нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

Лемма 12. Пусть $0<t<1$. При всех $r\geqslant s$

$$\sum_{m_1+\ldots+m_s>r} t^{m_1+\ldots+m_s}\leqslant B_s(t)\,t^r r^{s-1}. \tag{6.54}$$

Доказательство леммы. Нетрудно проверить, что число различных групп индексов $(m_1,\ldots,m_s)$ таких, что $m_1+\ldots+m_s=k$, при $k>s$ равно $\binom{k-1}{s-1}$. Поэтому

$$F\equiv\sum_{m_1+\ldots+m_s>r} t^{m_1+\ldots+m_s}=\sum_{k=r+1}^{\infty}\binom{k-1}{s-1}t^k.$$

Сумму последнего ряда можно записать в форме

$$F=\frac{t^s}{(s-1)!}\frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}}\left(\frac{t^r}{1-t}\right).$$

Обозначив для краткости $u(t)=(1-t)^{-1}$, вычислим производную по правилу Лейбница:

$$F=\frac{t^s}{(s-1)!}\sum_{j=0}^{s-1}\binom{s-1}{j}r(r-1)\ldots(r-j+1)\,t^{r-j}u^{(s-1-j)}(t).$$

Отсюда получаем неравенство

$$F\leqslant t^r r^{s-1}\frac{1}{(s-1)!}\sum_{j=0}^{s-1}\binom{s-1}{j}t^{s-j}\,|u^{(s-1-j)}(t)|,$$

которое и есть неравенство вида (6.54).

Доказательство теоремы 10. Пусть $f(P)\in\in H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$. Фиксируем $p>1/\alpha$ так, чтобы $H_\alpha\subset S_p$, и воспользуемся оценкой коэффициентов Фурье — Хаара (4.25) и неравенством (6.52). После несложных вычислений, получим оценку

$$|\delta(f)|\leqslant$$

$$\leqslant N^{-1/p}2^{(n-1+\tau)/p}\hat{\sum}L_{i_1\ldots i_s}\sum_{m_1+\ldots+m_s>\nu-\tau}\prod_{\theta=1}^{s}2^{-m_\theta(\alpha-1/p)-1-1/p}.$$

Обозначим $t=2^{-(\alpha-1/p)}$ и предположим, что $L_{i_1\ldots i_s}$ — наименьшие возможные определяющие постоянные для

$f(P)$ (так что $\|f\|_{H_\alpha} = \max L_{i_1 \ldots i_s}$). Тогда

$$|\delta(f)| \leqslant CN^{-1/p} \|f\|_{H_\alpha} \hat{\sum} \sum_{m_1+\ldots+m_s > \nu-\tau} t^{m_1+\ldots+m_s},$$

где C от N и от f не зависит.

Воспользуемся теперь неравенством (6.54). Так как $t^{\nu-\tau} = 2^{-(\alpha-1/p)(\nu-\tau)} = N^{-(\alpha-1/p)} 2^{\tau(\alpha-1/p)}$, то

$$|\delta(f)| \leqslant C_1 N^{-\alpha} \|f\|_{H_\alpha} \hat{\sum} B_s(t) (\nu-\tau)^{s-1}.$$

При $\nu = \log_2 N \to \infty$ главным в последней сумме будет член, соответствующий $s = n$. Значит,

$$|\delta(f)| = O(N^{-\alpha} \log_2^{n-1} N) \|f\|_{H_\alpha},$$

откуда сразу следует (6.53).

Глава 7

Случай бесконечного числа переменных

В этой главе изучаются функции от счетного числа переменных $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, заданные на единичном бесконечномерном кубе $\{0 \leqslant x_n \leqslant 1;\ n = 1, 2, \ldots\}$. Условимся называть этот куб K^∞, а точки его будем обозначать одной буквой

$$X = (x_1, \ldots,\ x_n, \ldots).$$

Очевидно, K^∞ можно считать прямым произведением счетного числа отрезков $[0,\ 1]$.

В качестве меры в K^∞ выберем прямое произведение лебеговых мер на этих отрезках, так что, например, объем параллелепипеда $\Pi = \{\alpha_n \leqslant x_n \leqslant \beta_n,\ n = 1,\ 2,\ \ldots\}$ равен

$$|\Pi| = \prod_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \alpha_n).$$

Интеграл по этой мере запишем в виде

$$\int\limits_{K^\infty} f(X)\, dX. \tag{7.1}$$

Если подинтегральная функция зависит лишь от конечного числа переменных $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$, то, очевидно,

$$\int\limits_{K^\infty} f(X)\, dX = \int\limits_{K^n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Вопрос о построении квадратурных формул для вычисления интеграла (7.1) был поставлен Н. Н. Ченцов ы м [104] и рассматривался в статьях [99, 96]. По причинам, изложенным в конце § 2 гл. 4, мы ограничимся квадратурными формулами с равными весами вида

$$\int\limits_{K^\infty} f(X)\,dX \approx \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} f(X_\mu). \tag{7.2}$$

§ 1. Постановка задачи. Классы функций

Связь с методом Монте-Карло. Интегралы вида (7.1) часто встречаются в задачах, решаемых методом Монте-Карло. Чтобы показать это, рассмотрим весьма общую схему применения метода Монте-Карло.

Пусть требуется приближенно вычислить некоторую величину y. Чтобы сделать это методом Монте-Карло, надо, во-первых, придумать случайную величину η такую, что математическое ожидание $\mathsf{M}\eta = y$. Затем случайную величину η надо моделировать, то есть надо вычислять конкретные случайные реализации этой величины: η_0, $\eta_1, \ldots, \eta_{N-1}$. Если число испытаний N достаточно велико, то

$$\mathsf{M}\eta \approx \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} \eta_\mu. \tag{7.3}$$

Вероятная ошибка такого приближения (см. [81], стр. 58) равна $0{,}675\sqrt{\mathsf{D}\eta/N}$, где $\mathsf{D}\eta$ — дисперсия моделируемой случайной величины η.

Моделирование η на практике почти всегда осуществляется с помощью значений «стандартной» случайной величины γ, равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$. Если на каждую реализацию η затрачиваются n значений γ, то $\eta = f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и математическое ожидание

$$\mathsf{M}\eta = \int\limits_{K^n} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Однако в некоторых задачах размерность n трудно указать заранее. Например, если моделируется движение нейтронов в среде, то траектории различных нейтронов могут иметь весьма различные длины. Теоретически можно считать, что траектории бесконечные (хотя на практике они всегда где-то «обрываются»). В этом случае величина $\eta = f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots)$ и

$$M\eta = \int\limits_{K^\infty} f(x_1, \ldots, x_n, \ldots)\, dX. \tag{7.4}$$

Такую интерпретацию допускают, в частности, все задачи, в которых моделирование η связано с реализацией неразветвляющихся траекторий *).

Решая такие задачи методом (7.3), мы фактически вычисляем интеграл (7.4) по простейшей квадратурной формуле

$$\int\limits_{K^\infty} f(X)\, dX \approx \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} f(\Gamma_\mu), \tag{7.5}$$

узлами которой служат случайные точки Γ_μ из K^∞:

$$\Gamma_\mu = (\gamma_{\mu 1}, \ldots, \gamma_{\mu n}, \ldots).$$

Изучение квадратурных формул вида (7.2) связано с методом Монте-Карло в двух аспектах. Во-первых, оно связано с проблемой псевдослучайных чисел: нельзя ли указать детерминированные точки $\{X_\mu\}$, которые можно было бы использовать вместо случайных точек $\{\Gamma_\mu\}$ при решении определенных классов задач?

Во-вторых, возникает вопрос: нельзя ли указать классы задач (или, что то же, классы функций $f(X)$), на которых с помощью формул (7.2) можно гарантировать более быстрый порядок сходимости, чем $1/\sqrt{N}$ — порядок сходимости (по вероятности) метода Монте-Карло (7.3)?

Ниже дан положительный ответ на оба эти вопроса.

Требование неравноправности координат. В определениях пространств функций S_p и H_α в n-мерном случае все координаты были равноправны. Поясним точный смысл этих слов: если из того, что $f(x_1, \ldots, x_n) \in F$, следует, что

*) Функция f отображает куб K^∞ на множество H возможных значений η. При этом вероятностная мера любого множества Θ из H совпадает с мерой прообраза $f^{-1}(\Theta)$ в K^∞ (в смысле dX) [86].

все функции вида $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $(i_1, \ldots, i_n)$ — любая перестановка натуральных чисел $(1, \ldots, n)$, также принадлежат F, то мы говорим, что все координаты по отношению к F равноправны.

В случае бесконечного числа переменных мы скажем, что все координаты равноправны по отношению к классу функций F, если из того, что $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in F$, следует, что все функции вида $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, \ldots)$ принадлежат F, где $(i_1, \ldots, i_n, \ldots)$ — любая перестановка чисел натурального ряда $(1, 2, \ldots, n, \ldots)$.

Оказывается, что в K^∞ на классах функций, по отношению к которым все координаты равноправны, нельзя построить «хорошие» квадратурные формулы вида (7.2). Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим следующий

Пример [104]. Предположим, что класс F, по отношению к которому все координаты равноправны, содержит функцию $f = (x_1 - x_2)^2$.

Выберем какую-нибудь квадратурную формулу (7.2) и составим таблицу координат всех узлов:

$$\begin{aligned} X_0 &= (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, \ldots), \\ X_1 &= (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{N-1} &= (x_{N-1,1}, x_{N-1,2}, \ldots, x_{N-1,n}, \ldots) \end{aligned} \tag{7.6}$$

Фиксируем произвольное большое число M и рассмотрим разбиение отрезка $[0, 1]$ на сумму двоичных отрезков

$$[0,1] = \sum_{j=1}^{2^M} l_{M+1,j},$$

длины которых $|l_{M+1,j}| = 2^{-M}$. Каждому числу $x_{\mu n}$ из таблицы (7.6) поставим в соответствие номер $j_{\mu n}$ того двоичного отрезка, которому это число принадлежит: $x_{\mu n} \in l_{M+1,\, j_{\mu n}}$. Заменим таблицу (7.6) таблицей таких номеров:

$$\begin{matrix} j_{01}, j_{02}, \ldots, j_{0n}, \ldots \\ j_{11}, j_{12}, \ldots, j_{1n}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ j_{N-1,1}, j_{N-1,2}, \ldots, j_{N-1,n}, \ldots \end{matrix} \tag{7.7}$$

Каждый столбец в (7.7) — это N-мерный целочисленный вектор $(j_{0n}, j_{1n}, \ldots, j_{N-1,n})$, где все $1 \leqslant j_{\mu n} \leqslant 2^M$. Число различных векторов такого типа конечно (равно 2^{MN}). Ясно, что среди столбцов таблицы (7.7) найдутся совпадающие столбцы. Обозначим номера двух таких столбцов i и j. По построению

$$|x_{\mu i} - x_{\mu j}| < 2^{-M} \text{ при всех } 0 \leqslant \mu \leqslant N-1,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} (x_{\mu i} - x_{\mu j})^2 < 2^{-2M}. \tag{7.8}$$

Рассмотрим теперь функцию $f = (x_i - x_j)^2$ из F. Очевидно,

$$\int\limits_{K^\infty} (x_i - x_j)^2 \, dX = \int_0^1 \int_0^1 (x_i - x_j)^2 \, dx_i dx_j = \frac{1}{6}. \tag{7.9}$$

Из (7.8) и (7.9) следует, что разность

$$\int\limits_{K^\infty} (x_i - x_j)^2 \, dX - \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} (x_{\mu i} - x_{\mu j})^2 > \frac{1}{6} - 2^{-2M}.$$

Значит, погрешность формулы (7.2) на классе F

$$R = \sup_{f \in F} \left| \int\limits_{K^\infty} f(X) \, dX - \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} f(X_\mu) \right| \geqslant \frac{1}{6}$$

и не стремится к нулю при $N \to \infty$.

Замечание. Положение не улучшится, если потребовать, чтобы все функции класса F были периодическими (при доказательстве вместо $f = (x_1 - x_2)^2$ можно использовать функцию $f = \sin^2 2\pi (x_1 - x_2)$).

В силу изложенного, при изучении квадратурных формул на классах функций S_p и H_α в K^∞ мы будем требовать, чтобы изменения функций $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ при изменении координаты x_n уменьшались с ростом n. Такая неравноправность координат часто очевидна с физической точки зрения и может легко быть обнаружена при рассмотрении конкретных задач.

Одинаково убывающие определяющие постоянные. В описаниях классов функций от n переменных в гл. 4 фигурировали множества определяющих постоянных, например $\{L_{i_1\ldots i_s}\}$, содержащие всевозможные s-индексные величины $L_{i_1\ldots i_s}$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$, $s = 1, 2, \ldots, n$. Для описания классов функций от счетного числа переменных мы будем рассматривать бесконечные множества определяющих постоянных, например $\{L_{i_1\ldots i_s}\}$, содержащие всевозможные s-индексные величины $L_{i_1\ldots i_s}$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s$, $s = 1, 2, \ldots$

Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_t, \ldots$ — произвольная последовательность неотрицательных чисел, причем все g_t, начиная с некоторого t_0, положительны.

Скажем, что определяющие постоянные $\{L_{i_1\ldots i_s}\}$ *одинаково убывают* по отношению к последовательности $\{g_t\}$, если существуют неотрицательные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_t, \ldots$ и A такие, что при любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s$

$$L_{i_1\ldots i_s} \leqslant A\varepsilon_{i_1}\ldots\varepsilon_{i_s} \tag{7.10}$$

и в то же время

$$\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t g_t < \infty \tag{7.11}$$

Легко видеть, что если выбрать последовательность положительных чисел $\{g'_t\}$ так, что $g'_t = O(g_t)$ при $t \to \infty$, то постоянные $\{L_{i_1\ldots i_s}\}$, одинаково убывающие по отношению к $\{g_t\}$, будут одинаково убывать также по отношению к $\{g'_t\}$.

Лемма 1. *Допустим, что определяющие постоянные $\{L_{i_1\ldots i_s}\}$ одинаково убывают по отношению к $\{g_t\}$. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно выбрать числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t, \ldots$ и A так, чтобы выполнялось условие* (7.10) *и при этом*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t g_t = \varepsilon. \tag{7.12}$$

Доказательство. Выберем какие-нибудь $\{\varepsilon_t\}$ и A, удовлетворяющие (7.10) и (7.11). Допустим сперва, что

$$\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t g_t > \varepsilon.$$

Фиксируем номер t_0 столь большой, чтобы $\sum\limits_{t=t_0+1}^{\infty} \varepsilon_t g_t$ была меньше ε. Затем выберем $C > 1$ так, что

$$\frac{1}{C} \sum_{t=1}^{t_0} \varepsilon_t g_t + \sum_{t=t_0+1}^{\infty} \varepsilon_t g_t = \varepsilon.$$

Пусть теперь $A' = AC^{t_0}$ и

$$\varepsilon_t' = \begin{cases} \varepsilon_t/C & \text{при} \quad 1 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \varepsilon_t & \text{при} \quad t_0 < t < \infty. \end{cases}$$

Очевидно, $\sum\limits_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t' g_t = \varepsilon$ и в то же время

$$A\varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_s} = AC^p \varepsilon_{i_1}' \ldots \varepsilon_{i_s}',$$

где $p \leqslant t_0$, ибо изменились лишь t_0 из числа всех ε_t. Следовательно, $AC^p \leqslant A'$ и $A\varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_s} \leqslant A'\varepsilon_{i_1}' \ldots \varepsilon_{i_s}'$. Таким образом, новые числа $\{\varepsilon_t'\}$ и A' удовлетворяют требованиям (7.10) и (7.12).

В случае

$$\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t g_t < \varepsilon$$

доказательство леммы совсем простое: достаточно увеличить какое-нибудь из чисел ε_t, отличных от нуля, так, чтобы было выполнено условие (7.12). Неравенство (7.10) при этом не нарушится.

Следующая элементарная лемма используется в дальнейшем для оценки сумм, содержащих определяющие постоянные.

Лемма 2. *Пусть заданы неотрицательные числа $v_t \geqslant 0$ такие, что $\sum_{t=1}^{\infty} v_t < \infty$. Тогда существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\sum} v_{i_1} \ldots v_{i_s} \leqslant \exp \sum_{t=1}^{\infty} v_t - 1. \tag{7.13}$$

Доказательство. Во-первых, легко заметить, что сумма $\hat{\Sigma}$ не убывает с ростом n, так как к ней добавляются новые неотрицательные слагаемые. Надо доказать, что она ограничена и не превосходит правой части (7.13).

Рассмотрим всевозможные слагаемые вида $v_{i_1} \ldots v_{i_s}$ (с фиксированным s), стоящие в (7.13) слева. Легко видеть, что

$$\sum \cdots \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_s < \infty} v_{i_1} \cdots v_{i_s} \leqslant \frac{1}{s!} \left(\sum_{t=1}^{\infty} v_t \right)^s, \tag{7.14}$$

ибо слева стоят всевозможные слагаемые вида $v_{i_1} \ldots v_{i_s}$, а в $\left(\sum_{t=1}^{\infty} v_t \right)^s$ каждое такое слагаемое встретится ровно $s!$ раз (кроме того, будут еще члены, в которых не все v_t различны). Просуммировав (7.14) по всем s от 1 до ∞, получим (7.13).

Классы функций H_α ($L_{i_1 \ldots i_s}$). Условимся обозначать буквой Y точку, у которой лишь конечное число (s) координат отлично от нуля:

$$Y = (0, \ldots, 0, \xi_{i_1}, 0, \ldots, 0, \xi_{i_s}, 0, \ldots, 0).$$

Определение. Функция $f(X)$ принадлежит классу H_α ($L_{i_1 \ldots i_s}$), если:

1° $f(X)$ ограничена в K^∞;

2° для любых точек X и Y таких, что $X \in K^\infty$ и $X + Y \in K^\infty$,

$$|\Delta_{\xi_{i_1}} \cdots \Delta_{\xi_{i_s}} f(X)| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s} |\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s}|^\alpha; \tag{7.15}$$

3° существует точка $Z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots)$ такая, что для любой точки $X \in K^\infty$

$$f(X) = \lim_{n\to\infty} f(x_1, \ldots, x_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots). \tag{7.16}$$

Очевидно, любая функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в K^n, может рассматриваться как частный случай функции $f(X)$, определенной в K^∞. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ в K^n, то легко видеть, что эта же функция принадлежит $H_\alpha(L'_{i_1\ldots i_s})$ в K^∞, причем $L'_{i_1\ldots i_s} = L_{i_1\ldots i_s}$, если $i_s \leqslant n$, $L'_{i_1\ldots i_s} = 0$, если $i_s > n$.

Обозначим через $W_1(L_{i_1\ldots i_s})$ множество функций $f(X)$, удовлетворяющих условиям 1° и 3°, у которых все частные производные

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}}, \quad 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s, \quad 1 \leqslant s < \infty, \tag{7.17}$$

содержащие не более одного дифференцирования по каждой переменной, кусочно непрерывны и ограничены в K^∞:

$$\left| \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_s}} \right| \leqslant L_{i_1\ldots i_s}. \tag{7.18}$$

Легко доказать, что $W_1(L_{i_1\ldots i_s}) \subset H_1(L_{i_1\ldots i_s})$ (формула (4.18) остается в силе при замене P на X, и все рассуждения гл. 4 сохраняются).

Условие 3° выполняется для любой непрерывной (в каком-либо «разумном» смысле) функции. Например, если ввести норму

$$\| X \| = \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{x_m}{m} \right)^2 \right\}^{1/2},$$

то непрерывность функции $f(X)$ в точке X означает, что $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X)$, если $\lim_{n\to\infty} \| X_n - X \| = 0$. Выберем $X_n = (x_1, \ldots, x_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots)$. Тогда

$$\| X_n - X \| = \left\{ \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{x_m - z_m}{m} \right)^2 \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right\}^{1/2} \to 0,$$

и (7.16) должно выполняться.

Докажем, что если определяющие постоянные класса $H_\alpha\ (L_{i_1\ldots i_s})$ одинаково убывают по отношению к $\{g_t\} \equiv 1$, то в определении класса требование 1° есть следствие требований 2° и 3°.

Рассмотрим функцию $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots)$. По формуле (4.15)

$$g(x_1, \ldots, x_n) - g(z_1, \ldots, z_n) = \hat{\sum} \Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} g(z_1, \ldots, z_n),$$

где $\xi_i = x_i - z_i$. Значит,

$$|g(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant |g(z_1, \ldots, z_n)| + \hat{\sum} |\Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} g(z_1 \cdots z_n)| =$$
$$= |f(Z)| + \hat{\sum} |\Delta_{\xi_{i_1}} \cdots \Delta_{\xi_{i_s}} f(Z)|.$$

Согласно (7.15) и (7.10)

$$|\Delta_{\xi_{i_1}} \cdots \Delta_{\xi_{i_s}} f(Z)| \leqslant L_{i_1\ldots i_s} |(x_{i_1} - z_{i_1}) \cdots (x_{i_s} - z_{i_s})|^\alpha \leqslant$$
$$\leqslant A\varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_s}.$$

Следовательно,

$$|f(x_1, \ldots, x_n, z_{n+1}, z_{n+2}, \ldots)| \leqslant |f(Z)| + A \hat{\sum} \varepsilon_{i_1} \ldots \varepsilon_{i_s}.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, используя (7.16) и (7.13). Получим неравенство

$$|f(X)| \leqslant |f(Z)| + A\,(\exp \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t - 1). \tag{7.19}$$

Классы функций $S_p\,(A_{i_1\ldots i_s})$.

Определение. Функция $f(X)$ принадлежит классу $S_p\ (A_{i_1 \ldots i_s})$, если:

1° $f(X)$ ограничена в K^∞;

2° существует точка $Z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots) \in K^\infty$ такая, что для любой точки X из K^∞ выполняется соотношение (7.16);

3° существует такое m_0, что при каждом $m \geqslant m_0$ функции

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f(x_1, \ldots x_m, z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots) \qquad (7.20)$$

принадлежат $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ в K^m (числа $A_{i_1 \ldots i_s}$ те же).

На первый взгляд это определение (особенно требование 3°) выглядит весьма ограничительным. Однако следующие две леммы показывают, что оно вполне соответствует n-мерному случаю.

Лемма 3. *Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ в K^n, то эта же функция в K^∞ принадлежит классу $S_p(A'_{i_1 \ldots i_s})$, где $A'_{i_1 \ldots i_s} = A_{i_1 \ldots i_s}$ при $i_s \leqslant n$, $A'_{i_1 \ldots i_s} = 0$ при $i_s > n$.*

Доказательство. Выберем $m_0 = n$. Тогда при всех $m \geqslant m_0$ функции (7.20) будут совпадать: $g(x_1, \ldots, x_m) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$. Если $i_s \leqslant n$, то коэффициенты Фурье — Хаара

$$c_k^i(g) = \int\limits_{K^m} f(x_1, \ldots, x_n)\, \chi_{k_1}(x_{i_1}) \ldots \chi_{k_s}(x_{i_s})\, dx_1 \ldots dx_m =$$

$$= \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 c_k^i(f)\, dx_{n+1} \ldots dx_m = c_k^i(f).$$

Отсюда следует, что $A_p^{i_1 \ldots i_s}(g) = A_p^{i_1 \ldots i_s}(f) \leqslant A_{i_1 \ldots i_s}$. А если $i_s > n$, то

$$\int\limits_0^1 \chi_{k_s}(x_{i_s})\, dx_{i_s} \int\limits_{K^{m-1}} f(x_1, \ldots, x_n)\, \chi_{k_1}(x_{i_1}) \ldots \chi_{k_{s-1}}(x_{i_{s-1}}) \prod_{i \neq i_s} dx_i =$$

$$= c_k^i(g) = 0$$

и, очевидно, $A_p^{i_1 \ldots i_s}(g) = 0$.

Таким образом, требование 3° из определения классов S_p выполнено. Так как все функции, принадлежащие S_p в K^n, ограничены, то требование 1° также выполнено. А требование 2° в нашем случае тривиально: в качестве Z можно выбрать любую точку куба K^∞, и при всех $m \geqslant m_0$ будет

$$f(x_1, \ldots, x_m, z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots) \equiv f(x_1, \ldots, x_n).$$

Докажем теперь, что для классов функций $H_\alpha\,(L_{i_1\ldots i_s})$ и $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ справедлива теорема вложения, вполне аналогичная теореме 2 гл. 4. Мы сформулируем ее как лемму:

Лемма 4. *Если $\alpha p > 1$, то класс $H_\alpha\,(L_{i_1\ldots i_s}) \subset S_p\,(A_{i_1\ldots i_s})$, где $A_{i_1\ldots i_s}$ вычисляются по формуле* (4.23):

$$A_{i_1\ldots i_s} = (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-s}\, L_{i_1\ldots i_s}. \qquad (7.21)$$

Доказательство. Если $f\,(X) \in H_\alpha\,(L_{i_1\ldots i_s})$, то из формулы (7.15) следует, что при каждом m функция $g\,(x_1,\ldots, x_m)$, определенная формулой (7.20), принадлежит классу $H_\alpha\,(L_{i_1\ldots i_s})$ в K^m. По теореме 2 гл. 4 эта функция $g\,(x_1,\ldots, x_m) \in S_p\,(A_{i_1\ldots i_s})$ в K^m с любым $p > 1/\alpha$ и с определяющими постоянными (7.21). Таким образом, для функции $f\,(X)$ требование 3° из определения класса $S_p\,(A_{i_1\ldots i_s})$ выполнено при $m_0 = 1$. Остальные требования (1° и 2°) содержатся в определении класса $H_\alpha\,(L_{i_1\ldots i_s})$.

§ 2. Квадратурные формулы

Сетки с мультипликативной оценкой неравномерностей. Выберем в K^∞ сетку Σ, состоящую из N произвольных точек $\Sigma = \{X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}\}$. Проекции этих точек на грань $K_{i_1\ldots i_s}$ образуют s-мерную сетку, для которой можно по формуле (4.35) вычислить величины $\Phi_q^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$ и $\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$.

Мы скажем, что сетка Σ допускает *мультипликативную оценку неравномерностей*, если существуют положительные числа $h_1, h_2, \ldots, h_i, \ldots$ и B такие, что при любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s$

$$\Phi_\infty^{i_1\ldots i_s}(\Sigma) \leqslant B h_{i_1}\cdots h_{i_s}. \qquad (7.22)$$

Примеры сеток, допускающих оценку (7.22), приведены несколько ниже.

Как и в n-мерном случае, обозначим погрешность формулы (7.2) на каком-нибудь классе функций H

через R:

$$R = \sup_{f \in H} \left| \int_{K^\infty} f(X)dX - \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} f(X_\mu) \right|.$$

Теорема 1. *Для сетки* $\Sigma = \{X_0, \ldots, X_{N-1}\}$, *допускающей мультипликативную оценку неравномерностей* (7.22), *на классах функций* $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ *и* $H_\alpha(L_{i_1 \ldots i_s})$, *определяющие постоянные которых одинаково убывают по отношению к* $\{h_t\}$, *имеет место оценка*

$$R \leqslant ABN^{-1/p}\left(\exp \sum_{t=1}^{\infty} v_t - 1\right), \tag{7.23}$$

где в случае класса $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ *значение* $v_t = \varepsilon_t h_t$, *а в случае класса* $H_\alpha(L_{i_1 \ldots i_s})$ $p > 1/\alpha$ *и* $v_t = \varepsilon_t h_t (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-1}$.

Доказательство*). Пусть сперва $f(X) \in S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$. Выберем $n \geqslant m_0$ и рассмотрим функцию $g(x_1, \ldots, x_n)$, определенную соотношением (7.20), которая принадлежит $S_p(A_{i_1 \ldots i_s})$ в K^n с теми же постоянными $A_{i_1 \ldots i_s}$. Формула (4.37) позволяет записать неравенство

$$\left| \int_{K^n} g(P)\,dP - \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} g(P_\mu) \right| \leqslant \frac{1}{N} \sum A_{i_1 \ldots i_s} \Phi_q^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma),$$

где для краткости $P = (x_1, \ldots, x_n)$, а P_μ — проекции точек сетки X_μ на $K_{12 \ldots n}$. Иначе говоря, если $X_\mu = (x_{\mu 1}, \ldots, x_{\mu n}, \ldots)$, то $P_\mu = (x_{\mu 1}, \ldots x_{\mu n})$.

*) В ходе доказательства теоремы 1 мы заменяем $(\Phi_\infty^{i_1 \ldots i_s})^{1/p}$ на $\Phi_\infty^{i_1 \ldots i_s}$. Если сохранить показатель степени $1/p$, то можно усилить теорему: вместо одинакового убывания определяющих постоянных по отношению к $\{h_t\}$ достаточно требовать одинакового убывания по отношению к $\{(h_t)^{1/p}\}$ или к $\{(h_t)^\alpha\}$, и в качестве v_t можно выбрать $\varepsilon_t (h_t)^{1/p}$ и соответственно $\varepsilon_t (h_t)^{1/p} (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-1}$.

Воспользуемся неравенством (4.44), затем неравенством (7.22) и неравенством $A_{i_1 \dots i_s} \leqslant A\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_s}$:

$$\left| \int\limits_{K^n} g(P)\,dP - \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} g(P_\mu) \right| \leqslant ABN^{-1/p} \hat{\sum} (\varepsilon_{i_1} h_{i_1}) \cdots (\varepsilon_{i_s} h_{i_s}).$$

Сумму, состоящую справа, легко оценить при помощи (7.13):

$$\left| \int\limits_{K^n} g(P)\,dP - \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} g(P_\mu) \right| \leqslant ABN^{-1/p} \left(\exp \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t h_t - 1\right).$$

В последней оценке правая часть конечна (по условию теоремы) и не зависит от n. Левая же часть от n зависит. Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} g(P_\mu) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\mu 1}, \dots, x_{\mu n}, z_{n+1}, \dots) = f(X_\mu),$$

а

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{K^n} g(P)\,dP = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{K^\infty} f(x_1, \dots, x_n, z_{n+1}, \dots)\,dX = \int\limits_{K^\infty} f(X)\,dX,$$

так как все функции $f(x_1, \dots, x_n, z_{n+1}, \dots)$ ограничены по абсолютной величине (не превосходят $\sup |f(X)|$) и возможен предельный переход под знаком интеграла Лебега. Поэтому при $n \to \infty$ получим

$$\left| \int\limits_{K^\infty} f(X)\,dX - \frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} f(X_\mu) \right| \leqslant ABN^{-1/p} \left(\exp \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t h_t - 1\right),$$

откуда вытекает (7.23).

Пусть теперь $f(X) \in H_\alpha(L_{i_1 \dots i_s})$. Тогда (по лемме 4) $f(X) \in S_p(A_{i_1 \dots i_s})$, где $p > 1/\alpha$ и $A_{i_1 \dots i_s}$ вычисляются по (7.21). Так как по условию теоремы $L_{i_1 \dots i_s} \leqslant A\varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_s}$, то $A_{i_1 \dots i_s} \leqslant A\varepsilon'_{i_1} \dots \varepsilon'_{i_s}$, где значение $\varepsilon'_t = \varepsilon_t (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-1}$. А для функций из $S_p(A_{i_1 \dots i_s})$ неравенство (7.23) уже доказано, причем $v_t = \varepsilon'_t h_t = \varepsilon_t h_t (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-1}$.

Обобщенная последовательность Холтона. Перенумеруем в порядке возрастания все простые числа: $r_1 = 2$,

$r_2 = 3$, $r_3 = 5, \ldots$ и рассмотрим последовательность точек X_0^*, $X_1^*, \ldots$, $X_N^*, \ldots$ с координатами

$$X_\mu^* = (p_{r_1}(\mu), p_{r_2}(\mu), \ldots, p_{r_n}(\mu), \ldots). \qquad (7.24)$$

Эту последовательность, впервые построенную в [99], назовем *обобщенной последовательностью Холтона.*

Обозначим через Σ^* сетку $\{X_0^*, X_1^*, \ldots, X_{N-1}^*\}$. Проекция этой сетки на любую грань $K_{i_1 \ldots i_s}$ представляет собой начальный участок s-мерной последовательности Холтона. Оценки неравномерностей для таких сеток были получены в гл. 5. Из (5.28) вытекает оценка (7.22) с $B = 1$ и

$$h_t = 4\beta_t \ln N + 4\gamma_t, \qquad (7.25)$$

где

$$\beta_t = (r_t - 1)/\ln r_t, \quad \gamma_t = 2r_t - 1. \qquad (7.26)$$

Таким образом, сетка Σ^* допускает мультипликативную оценку неравномерностей.

По теореме 1 для того, чтобы на каком-нибудь классе функций $S_p\ (A_{i_1, \ldots, i_s})$ или $H_\alpha\ (L_{i_1 \ldots i_s})$ имела место оценка (7.23), достаточно потребовать, чтобы определяющие постоянные этого класса одинаково убывали по отношению к $\{h_t\}$, то есть чтобы сходился ряд

$$\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t (4\beta_t \ln N + 4\gamma_t). \qquad (7.27)$$

Как уже отмечалось на стр. 184, при $t \to \infty$ асимптотика чисел (7.26) известна: $\beta_t \sim t$, $\gamma_t \sim 2t \ln t$. Поэтому ряд (7.27) будет сходиться, если будет сходиться ряд

$$\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t t \ln t < \infty. \qquad (7.28)$$

Итак, *если определяющие постоянные класса* $S_p\,(A_{i_1 \ldots i_s})$ *или* H_α $(L_{i_1 \ldots i_s})$ *одинаково убывают по отношению к* $\{t \ln t\}$, *то для погрешности квадратурной формулы* (7.2) *с сеткой* Σ^* *справедлива оценка* (7.23)*).

Выясним порядок сходимости таких квадратур. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. По лемме 1 можно выбрать $\{\varepsilon_t\}$ и A в (7.10) так, чтобы $\sum\limits_{t=1}^{\infty} 4\varepsilon_t\beta_t = \varepsilon$ (не нарушив при этом сходимости ряда (7.28)). Тогда в (7.23) для случая класса $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ получим

$$\exp \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t h_t = \exp\left(\varepsilon \ln N + \sum_{t=1}^{\infty} 4\gamma_t\varepsilon_t\right) = CN^{\varepsilon}.$$

Значит, порядок сходимости (7.23) не превосходит $N^{-(1/p)+\varepsilon}$.

Рассмотрим теперь оценку (7.23) в случае класса $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$. Фиксируем p так, чтобы $0 < \alpha - 1/p < \varepsilon$, а затем выберем A и $\{\varepsilon_t\}$ в (7.10) так, чтобы

$$\sum_{t=1}^{\infty} 4\varepsilon_t\beta_t = (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})(\varepsilon - \alpha + 1/p).$$

В этом случае

$$\exp \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t h_t (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-1} =$$
$$= \exp\left[(\varepsilon - \alpha + 1/p)\ln N + (2^{1+\alpha} - 2^{1+1/p})^{-1} \sum_{t=1}^{\infty} 4\varepsilon_t\gamma_t\right] =$$
$$= C'N^{-\alpha+\varepsilon+1/p}.$$

И порядок сходимости (7.23) не превосходит $N^{-\alpha+\varepsilon}$.

Очевидно, порядки сходимости квадратурных формул (7.2) на классах $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ и $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ соответственно не могут быть лучше, чем $N^{-1/p}$ и $N^{-\alpha}$, так как эти порядки точны в случае $n = 1$. Значит, полученные нами порядки сходимости $N^{-(1/p)+\varepsilon}$ и $N^{-\alpha+\varepsilon}$ почти наилучшие.

---

*) Используя сноску на стр. 254, можно ослабить требование (7.28) и заменить его требованием

$$\sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t (t \ln t)^{1/p} < \infty \text{ или } \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t (t \ln t)^{\alpha} < \infty.$$

Обобщенная ЛП$_\tau$-последовательность. Перенумеруем все моноциклические операторы, рассматривавшиеся в гл. 6, так, чтобы порядки их не убывали. Пусть это будут операторы $L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots$, и порядки их пусть будут $m_0 \leqslant m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_n \leqslant \ldots$

Обобщенной ЛП$_\tau$-*последовательностью* назовем последовательность точек $X_0^{**}, X_1^{**}, \ldots, X_N^{**}, \ldots$ с координатами

$$X_\mu^{**} = (p(\mu), p^{(1)}(\mu), \ldots, p^{(n)}(\mu), \ldots),$$

где $\{p^{(n)}(\mu)\}$ — ДР-последовательность, принадлежащая оператору L_n. Впервые такая последовательность была опубликована в [96].

В качестве сетки интегрирования в формуле (7.2) выберем сетку Σ^{**}, состоящую из точек $\{X_0^{**}, \ldots, X_{N-1}^{**}\}$. Проекции точек этой сетки на грань $K_{i_1 \ldots i_s}$ образуют начальный участок s-мерной ЛП$_\tau$-последовательности

$$Q_\mu = (p^{(i_1)}(\mu), \ldots, p^{(i_s)}(\mu)), \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant N-1,$$

для которой по теореме 4' гл. 6

$$\tau = \sum_{\nu=1}^{s} (m_{i_\nu} - 1).$$

Из формулы (6.2) вытекает, что неравномерность этой сетки

$$\Phi_\infty^{i_1 \ldots i_s}(\Sigma^{**}) \leqslant 2^{s-1+\tau} = 2^{-1+\sum_{\nu=1}^{s} m_{i_\nu}}.$$

Последняя оценка — это оценка вида (7.22) с $B = 1/2$ и

$$h_t = 2^{m_t}. \tag{7.29}$$

Следовательно, сетка Σ^{**} допускает мультипликативную оценку неравномерностей.

Асимптотика m_t при $t \to \infty$ фактически исследовалась при доказательстве теоремы 6 гл. 6: в формуле (6.32) $n = t$, а $s = m_t$. Следовательно,

$$m_t \leqslant \log_2 t + \log_2 \log_2 t + \log_2 \log_2 \log_2 t + O(1). \tag{7.30}$$

Из (7.29) получаем, что

$$h_t \leqslant C'' t \ln t \ln \ln t.$$

Отсюда вытекает, что *если определяющие постоянные класса $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$ или $H_\alpha(L_{i_1\ldots i_s})$ одинаково убывают по отношению к $\{t \ln t \ln \ln t\}$, то для погрешности квадратурной формулы* (7.2) *с сеткой* Σ^{**} *справедлива оценка* (7.23) *).

Выясним порядок сходимости таких квадратур на классе $S_p(A_{i_1\ldots i_s})$. В этом случае $\sum^{\infty} \varepsilon_t h_t < \text{const}$ и не зависит от N. Поэтому из (7.23) следует, что

$$R = O\,(N^{-1/p}).$$

Это — наилучший возможный порядок сходимости на $S_p\,(A_{i_1\ldots i_s})$.

В случае класса $H_\alpha\,(L_{i_1\ldots i_s})$ зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $0 < \varkappa < \varepsilon$. Выберем $1/p = \alpha - \varkappa/\sqrt{\ln N}$ (здесь мы должны считать N достаточно большим). Перепишем (7.23) в форме

$$R \leqslant AB \exp\left[-\frac{1}{p}\ln N + (1 - 2^{-\alpha+1/p})^{-1} E\right],$$

где через E обозначена величина $2^{-1-\alpha} \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t h_t$. Здесь

$$1 - 2^{-\alpha+1/p} = 1 - e^{-(\alpha-1/p)\ln 2} = \frac{\varkappa \ln 2}{\sqrt{\ln N}}\left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln N}}\right)\right].$$

Значит,

$$R \leqslant AB \exp\left[-\alpha \ln N + \varkappa\sqrt{\ln N} + \frac{E}{\varkappa \ln 2}\sqrt{\ln N} + O(1)\right].$$

Выберем постоянные $\{\varepsilon_t\}$ и A в (7.10) так, чтобы $E = (\varepsilon - \varkappa)\varkappa \ln 2$. Тогда получим, что $R = O\,(N^{-\alpha+\varepsilon/\sqrt{\ln N}})$. Этот порядок почти наилучший, он даже лучше, чем $N^{-\alpha+\varepsilon}$, хотя и хуже, чем $N^{-\alpha}\ln^\beta N$ с любым $\beta > 0$.

---

*) Используя сноску на стр. 254, можно ослабить это требование: достаточно, чтобы определяющие постоянные одинаково убывали по отношению к $\{(t \ln t \ln \ln t)^{1/p}\}$ или $\{(t \ln t \ln \ln t)^{\alpha}\}$.

Замечание. В этом пункте нам пришлось потребовать более быстрого убывания определяющих постоянных (по сравнению с предыдущим пунктом: там было условие $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_t t \ln t < \infty$, а здесь $\sum_{1}^{\infty} \varepsilon_t t \ln t \ln \ln t < \infty$). Вероятно, это вызвано грубостью оценки (7.30).

Задача из области метода Монте-Карло. Рассмотрим (в простейшей постановке) задачу о прохождении нейтронов сквозь плоский поглощающий слой. Известны различные варианты метода Монте-Карло для расчета этой задачи [81]. Эффективность таких способов характеризуется обычно величиной дисперсии $D\eta$ осредняемой случайной величины η. Мы хотим показать, что в то же время более эффективным способам соответствуют более гладкие подинтегральные функции $f(X)$.

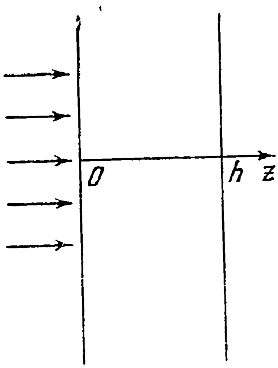

Рис. 7.1.

Геометрия задачи изображена на рис. 7.1. Толщину слоя $0 \leqslant z \leqslant h$ будем измерять в единицах средней длины свободного пробега. Тогда функция распределения длины свободного пробега l равна

$$F(l) = 1 - e^{-l}. \tag{7.31}$$

При каждом столкновении с атомами вещества нейтрон может поглотиться или рассеяться; вероятности этих событий обозначим p_a и $1 - p_a$. Рассеяние считаем изотропным, так что косинус угла θ между направлением скорости нейтрона и осью Oz, который мы назовем $\mu = \cos\theta$, распределен равномерно в интервале $-1 < \mu < 1$. Изменением энергии нейтрона при рассеянии мы пренебрегаем.

Нас интересует вероятность p^+ прохождения нейтрона сквозь слой. Рассмотрим три способа расчета этой величины. (Буквами γ_k, γ_k', γ_k'' мы будем обозначать случайные величины, равномерно распределенные в интервале (0, 1), или значения случайной величины γ.)

А. Моделирование «истинных» траекторий. Для нейтрона, вылетевшего из точки с координатой z_k в направлении μ_k, вычисляем случайный пробег $l_k = -\ln(1-\gamma_k)$ и находим координату следующего столкновения (рис. 7.2):

$$z_{k+1} = z_k + \mu_k l_k. \qquad (7.32)$$

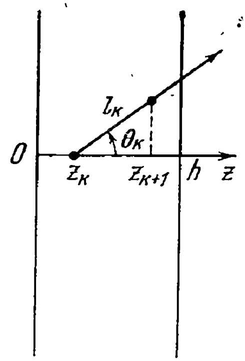

Рис. 7.2.

Если $z_{k+1} \geqslant h$, то мы считаем, что нейтрон пролетел сквозь слой, а если $z_{k+1} \leqslant 0$ — то нейтрон отразился от слоя. Если же $0 < z_{k+1} < h$, то разыгрывается «судьба» нейтрона при столкновении: если $\gamma'_k < p_a$, то он поглощается, а если $\gamma'_k \geqslant p_a$ — то рассеивается. В последнем случае мы выбираем случайное направление рассеяния

$$\mu_{k+1} = 2\gamma''_k - 1$$

и продолжаем расчет траектории.

Начальные значения: $z_0 = 0$, $\mu_0 = 1$.

Очевидно, траектории могут заканчиваться прохождением, отражением или поглощением (рис. 7.3). Если из общего числа N сосчитанных траекторий N^+ закончились прохождением, то

$$p^+ \approx \frac{N^+}{N}. \qquad (7.33)$$

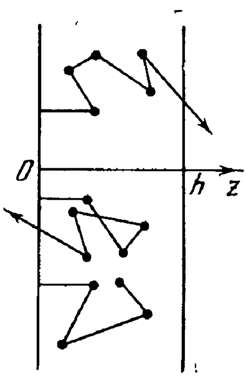

Рис. 7.3.

Б. Учет поглощения с помощью весов. Каждому нейтрону припишем начальный вес w_0 (который можно интерпретировать как количество идентичных нейтронов). Если нейтрон с весом w_k испытывает столкновение в точке с координатой z_{k+1}, то мы считаем, что часть его веса, равная $w_k p_a$, поглотилась и вес его после столкновения становится равным $w_{k+1} = w_k(1-p_a)$.

При таком способе расчета траектории нейтронов не могут закончиться поглощением. Обычно полагают $w_0 = 1$. Тогда для оценки p^+ надо сосчитать сумму весов всех прошедших сквозь слой нейтронов:

$$p^+ \approx \frac{1}{N} \sum_{(N+)} w_{\text{посл}} \,. \tag{7.34}$$

В. Учет и поглощения и вылета с помощью весов. Пусть из точки z_k по направлению μ_k вылетаетнейтрон с весом w_k. Обозначим через q_k вероятность того, что этот нейтрон испытает столкновение внутри слоя. Используя (7.31), нетрудно вычислить (рис. 7.4), что

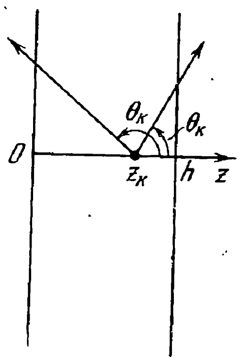

Рис. 7.4.

$$q_k = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{h - z_k}{\mu_k}\right) & \text{при } \mu_k > 0, \\ 1 & \text{при } \mu_k = 0, \\ 1 - \exp\left(\dfrac{z_k}{\mu_k}\right) & \text{при } \mu_k < 0. \end{cases}$$

Можно считать, что часть веса этого нейтрона, равная $w_k(1 - q_k)$, вылетит из слоя, а часть, равная $w_k q_k$, испытает столкновение в какой-то точке с координатой z_{k+1}, расположенной обязательно в слое.

В этом случае функция распределения длины пробега равна $F(l) = q_k^{-1}(1 - e^{-l})$ и формула для вычисления l_k несколько сложнее: $l_k = -\ln(1 - \gamma_k q_k)$, а вес нейтрона после учета поглощения равен $w_{k+1} = w_k q_k (1 - p_a)$.

При такой схеме расчета все траектории состоят из бесконечного числа звеньев и количество прохождений, полученное от одной траектории, равно

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} w_k (1 - q_k)\, \omega_k,$$

где $\omega_k = 1$, если $\mu_k > 0$; $\omega_k = 0$, если $\mu_k \leqslant 0$.

Оценка вероятности прохождения:

$$p^+ \approx \frac{1}{N} \sum_{(N)} \sum_{k=0}^{\infty} w_k (1 - q_k)\, \omega_k. \tag{7.35}$$

В практических расчетах траектории «обрывают», как только вес w_k становится достаточно малым.

Сравним теперь все три осредняемые функции в формулах (7.33), (7.34) и (7.35). В методе А мы осредняем разрывную функцию, которая принимает два значения: 1, если нейтрон прошел сквозь слой, и 0 — в противном случае. В методе Б мы также осредняем разрывную функцию, однако она может принимать счетное множество значений: $w_0, w_0 (1 - p_a), w_0 \cdot (1 - p_a)^2, \ldots$ и 0, так что в каком-то смысле эта функция более гладкая. Наконец, в методе В можно доказать, что осредняемая функция $f(X)$ непрерывна, если только траектория не касается границ слоя. Более того, функция $f(X)$ имеет кусочно непрерывные частные производные любого порядка внутри K^∞.

Во всех трех случаях функции $f(X)$ не принадлежат классу $H_1(L_{i_1 \ldots i_s})$. Однако естественно предположить, что последняя $f(X)$ лучше других аппроксимируется функциями из $H_1(L_{i_1 \ldots i_s})$. Отсюда вытекает важный для практики вывод: *больше всего оснований ожидать ускорения сходимости за счет использования псевдослучайных точек $\{X^*_\mu\}$ или $\{X^{**}_\mu\}$ тогда, когда расчеты ведутся по более совершенным схемам метода Монте-Карло.*

В работе [100] при помощи точек $\{X^*_\mu\}$ сосчитана методом Монте-Карло более сложная задача, связанная с определением критических параметров реактора. Сходимость в этом случае оказалась более быстрой, чем при расчете с помощью обычных случайных чисел.

Глава 8

Оценки погрешности на некоторых других классах функций

В этой последней главе не используется метод рядов Хаара. Однако содержание ее очень тесно связано с гл. 4—7 и обобщает некоторые результаты гл. 2.

На стр. 137 введены классы функций $W_1(L_{i_1\ldots i_s})$, все частные производные которых, имеющие вид

$$\frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}},\quad 1<i_1\leqslant i_2<\cdots<i_s\leqslant n,\quad 1\leqslant s\leqslant n,\tag{8.1}$$

кусочно непрерывны и ограничены в K^n. Так как $W_1(L_{i_1\ldots i_s})\subset H_1(L_{i_1\ldots i_s})$, то из результатов гл. 4, вытекают также оценки погрешности квадратурной формулы (4.29) на классах $W_1(L_{i_1\ldots i_s})$.

Метод настоящей главы позволяет получить на классах $W_1(L_{i_1\ldots i_s})$ и $H_1(L_{i_1\ldots i_s})$ более точные оценки погрешности.

§ 1. Классы функций

Предположим, что функция $f(P)$ определена в K^n и имеет кусочно непрерывные и ограниченные частные производные (8.1).

Разложение на разноразмерные слагаемые. В гл. 4 произвольная функция $f(P)$ разлагалась на разноразмерные слагаемые с помощью ряда Фурье — Хаара. Здесь мы для получения аналогичного разложения воспользуемся тождеством (4.15), в котором изменим лишь обозначения:

$$f(U+Q)=f(U)+\hat{\Sigma}\Delta_{\xi_{i_1}}\cdots\Delta_{\xi_{i_s}}f(U),$$

где $Q=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ и обе точки U и $U+Q$ принадлежат K^n.

Пусть $U=(1,\ldots,1)$, $Q=(x_1-1,\ldots,x_n-1)$, так что $U+Q=(x_1,\ldots,x_n)=P$. Тогда из этой формулы следует, что

$$f(x_1,\ldots,x_n)=f(1,\ldots,1)+\sum\Delta_{x_{i_1}-1}\ldots\Delta_{x_{i_s}-1}f(1,\ldots,1). \quad (8.2)$$

Формула (8.2) также определяет разложение $f(P)$ на разноразмерные слагаемые. Перейдем в (8.2) от разностей к производным с помощью тождества (4.18), которое для наших целей удобнее записать в форме

$$\Delta_{x_{i_1}-1}\ldots\Delta_{x_{i_s}-1}f(1,\ldots,1)=$$
$$=(-1)^s\int_{x_{i_1}}^{1}\ldots\int_{x_{i_s}}^{1}\frac{\partial^s f(T_{i_1\ldots i_s})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}}dt_{i_1}\ldots dt_{i_s};$$

здесь точка $T_{i_1\ldots i_s}=(1,\ldots,1,t_{i_1},1,\ldots,1,t_{i_s},1,\ldots,1)$ расположена на грани $K_{i_1\ldots i_s}$ куба K^n. Подставляя это тождество в (8.2), получим нужное нам выражение

$$f(x_1,\ldots,x_n)=$$
$$=f(1,\ldots,1)+\sum(-1)^s\int_{x_{i_1}}^{1}\ldots\int_{x_{i_s}}^{1}\frac{\partial^s f(T_{i_1\ldots i_s})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}}dt_{i_1}\ldots dt_{i_s}. \quad (8.3)$$

Отметим сразу же, что в (8.3) входят значения производных (8.1) не во всем кубе K^n, а только на соответствующих гранях $K_{i_1\ldots i_s}$.

Различные классы однократно дифференцируемых функций. Множество функций с кусочно непрерывными и ограниченными производными (8.1) можно различными способами разбивать на классы (иначе говоря, различными способами нормировать). Чаще всего встречаются следующие классы:

Определение. $f(P) \in W_1(L_{i_1 \ldots i_s})$, если для любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$

$$\sup_{K^n} |\partial^s f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s}.$$

Определение. $f(P) \in W_p^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s})$, $1 \leqslant p < \infty$, если для любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$

$$\left\{ \int_{K^n} |\partial^s f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}|^p \, dx_1 \ldots dx_n \right\}^{1/p} \leqslant L_{i_1 \ldots i_s}.$$

Можно, конечно, считать, что $W_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \equiv W_\infty^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s})$.

В статье [97] были введены несколько иные классы функций *):

Определение. $f(P) \in \widetilde{W}_1(L_{i_1 \ldots i_s})$, если для любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$

$$\sup_{K_{i_1 \ldots i_s}} |\partial^s f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s}. \tag{8.4}$$

Определение. $f \in \widetilde{W}_p^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s})$, $1 \leqslant p < \infty$, если для любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$

$$\left\{ \int_{K_{i_1 \ldots i_s}} |\partial^s f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}|^p \, dx_{i_1} \ldots dx_{i_s} \right\}^{1/p} \leqslant L_{i_1 \ldots i_s}. \tag{8.5}$$

И здесь можно считать, что $\widetilde{W}_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \equiv \widetilde{W}_\infty^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s})$.

С некоторых точек зрения классы $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_p^{(1)}$ оказались более естественными, чем классы W_1 и $W_p^{(1)}$, ибо как раз те значения производных, которые фигурируют в определениях $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{W}_p^{(1)}$, определяют функцию $f(P)$ с точностью до постоянного слагаемого (см. (8.3)).

При $n = 1$ и классы «с тильдой» и классы «без тильды» обращаются в классы $W_1(L)$ и $W_p^{(1)}(L)$, рассмотренные в гл. 2.

Заметим также, что при одних и тех же определяющих постоянных $L_{i_1 \ldots i_s}$ всегда $W_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{W}_1(L_{i_1 \ldots i_s})$.

*) Напомним, что куб K^n также включается в число своих граней: $K^n \equiv K_{12 \ldots n}$.

Вывод формулы для ошибки $\delta(f)$. Рассмотрим произвольную квадратурную формулу вида (4.29) и ее ошибку

$$\delta(f) = \int\limits_{K^n} f(P)\,dP - \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} f(P_\mu). \tag{8.6}$$

Координаты узлов P_μ обозначим $P_\mu = (x_{\mu 1}, \ldots, x_{\mu n})$.

Как и в гл. 2, введем функцию

$$K(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u \leqslant 0 \end{cases}$$

и перепишем тождество (8.3) в форме

$$f(P) = f(1, \ldots, 1) + \hat{\sum}(-1)^s \times \\ \times \int\limits_{K_{i_1 \ldots i_s}} K(t_{i_1} - x_{i_1}) \ldots K(t_{i_s} - x_{i_s}) \frac{\partial^s f(T_{i_1 \ldots i_s})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} dt_{i_1} \ldots dt_{i_s}. \tag{8.7}$$

Так как функционал (8.6) линейный, то из (8.7) следует, что

$$\delta(f) = \hat{\sum}(-1)^s \times \\ \times \int\limits_{K_{i_1 \ldots i_s}} \delta[K(t_{i_1} - x_{i_1}) \ldots K(t_{i_s} - x_{i_s})] \frac{\partial^s f(T_{i_1 \ldots i_s})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} dt_{i_1} \ldots dt_{i_s}. \tag{8.8}$$

Далее, с помощью (8.6) нетрудно вычислить, что

$$\delta[K(t_{i_1} - x_{i_1}) \ldots K(t_{i_s} - x_{i_s})] = \\ = t_{i_1} \ldots t_{i_s} - \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} K(t_{i_1} - x_{\mu i_1}) \ldots K(t_{i_s} - x_{\mu i_s}) = \\ = \frac{1}{N}[N t_{i_1} \ldots t_{i_s} - S_N^{i_1 \ldots i_s}(t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})],$$

где $S_N^{i_1 \ldots i_s}(t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})$ — число точек сетки, проекции которых на $K_{i_1 \ldots i_s}$ расположены в параллелепипеде

$[0, t_{i_1})\times \ldots \times [0, t_{i_s})$ (иначе говоря, число точек сетки, координаты которых удовлетворяют неравенствам $x_{\mu i_1} < t_{i_1}, \ldots, x_{\mu i_s} < t_{i_s}$).

Подставив последнее выражение в (8.8), получим искомую формулу для $\delta(f)$:

$$\delta(f) = \frac{1}{N}\hat{\sum}(-1)^s \times$$
$$\times \int\limits_{K_{i_1\ldots i_s}} [Nt_{i_1}\ldots t_{i_s} - S_N^{i_1\ldots i_s}(t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})] \frac{\partial^s f(T_{i_1\ldots i_s})}{\partial x_{i_1}\ldots \partial x_{i_s}} dt_{i_1}\ldots dt_{i_s}. \tag{8.9}$$

Функции с ограниченной вариацией. Вариацию функции $f(P)$ в K^n мы определим так, как это сделано в п. 26 книги [91]. Пусть задано какое-нибудь разбиение Θ куба K^n на параллелепипеды с помощью конечного множества гиперплоскостей, параллельных координатным гиперплоскостям (рис 8.1). Каждому $\Pi_\alpha = \{\alpha_i \leqslant x_i < \alpha_i + \theta_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ поставим в соответствие абсолютную величину разности $|\Delta_{\theta_1}\ldots\Delta_{\theta_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|$. *Вариация функции* $f(P)$ в K^n — это

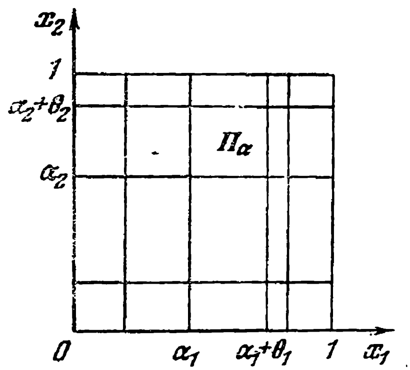

Рис. 8.1.

$$V_{K^n}(f) = \sup_{\Theta} \sum_{\Pi_\alpha} |\Delta_{\theta_1}\ldots\Delta_{\theta_n} f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|; \tag{8.10}$$

здесь сумма берется по всем параллелепипедам Π_α данного разбиения, а верхняя грань — по всем возможным разбиениям Θ.

Вариацией $f(P)$ *на грани* $K_{i_1\ldots i_s}$ называется вариация функции $f(T_{i_1\ldots i_s})$ в s-мерном кубе $K^s_{i_1\ldots i_s}$.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x, y)$ в единичном квадрате. Разбиение Θ зададим с помощью прямых $x = t_1, \ldots, x = t_k$

и $y = s_1, \ldots, y = s_r$ (рис. 8.2). Тогда

$$\mathsf{V}_{K_{12}}(f) = \sup \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{r} | f(t_{i+1}, s_{j+1}) - f(t_i, s_{j+1}) - f(t_{i+1}, s_j) + f(t_i, s_j) |,$$

$$\mathsf{V}_{K_1}(f) = \sup \sum_{i=0}^{k} | f(t_{i+1}, 1) - f(t_i, 1) |,$$

$$\mathsf{V}_{K_2}(f) = \sup \sum_{j=0}^{r} | f(1, s_{j+1}) - f(1, s_j) |.$$

Определение. $f(P) \in \widetilde{V}(L_{i_1 \ldots i_s})$, если вариация $f(P)$ на каждой из граней $K_{i_1 \ldots i_s}$ не превосходит соответствующей определяющей постоянной:

$$\mathsf{V}_{K_{i_1 \ldots i_s}}(f) \leqslant L_{i_1 \ldots i_s}. \quad (8.11)$$

Определение. $f(P) \in \widetilde{H}_1(L_{i_1 \ldots i_s})$, если для любых $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$, $1 \leqslant s \leqslant n$ на грани $K_{i_1 \ldots i_s}$

$$|\Delta_{\xi_{i_1}} \ldots \Delta_{\xi_{i_s}} f(P)| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s} |\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_s}|. \quad (8.12)$$

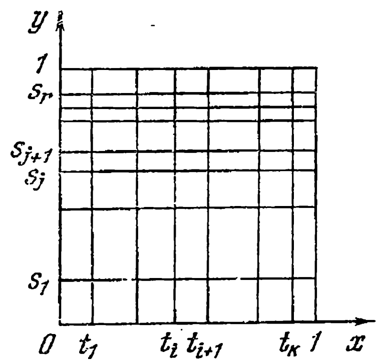

Рис. 8.2.

Условие (8.12) формально совпадает с условием (4.19) в определении класса $H_\alpha(L_{i_1 \ldots i_s})$ при $\alpha = 1$. Однако в формуле (8.12) и точка $P = (x_1, \ldots, x_n)$ и точка $P + Q = (x_1 + \xi_1, \ldots, x_n + \xi_n)$ принадлежат грани $K_{i_1 \ldots i_s}$, в то время как в (4.19) P и $P + Q$ — произвольные точки в K^n. Следовательно, при одних и тех же определяющих постоянных

$$H_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{H}_1(L_{i_1 \ldots i_s}). \quad (8.13)$$

Легко также доказать, что при одних и тех же определяющих постоянных

$$\widetilde{W}_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{H}_1(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{V}(L_{i_1 \ldots i_s}). \quad (8.14)$$

Левая часть (8.14) доказывается с помощью леммы 2 гл. 4, а правая часть — с помощью (8.12): если $f(P) \in \widetilde{H}_1$, то

$$\sum_{\Pi_\alpha} |\Delta_{\theta_{i_1}} \ldots \Delta_{\theta_{i_s}} f| \leqslant L_{i_1 \ldots i_s} \sum_{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}} \theta_{i_1} \ldots \theta_{i_s} = L_{i_1 \ldots i_s},$$

так как $\sum\limits_{\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}} \theta_{i_1} \ldots \theta_{i_s} = \prod\limits_{\nu=1}^{s} \sum\limits_{\alpha_{i_\nu}} \theta_{i_\nu} = 1.$

Нетрудно проверить, что для функций классов $\widetilde{V}$ справедлива формула (8.9), записанная с помощью интегралов Стилтьеса [91]:

$$\delta(f) = \frac{1}{N} \hat{\sum} (-1)^s \times$$
$$\times \int_{K_{i_1 \ldots i_s}} [N t_{i_1} \ldots t_{i_s} - S_N^{i_1 \ldots i_s}(t_{i_1}, \ldots, t_{i_s})] \, d_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}} f(T_{i_1 \ldots i_s}). \quad (8.15)$$

Вариации также могут быть выражены через интегралы Стилтьеса:

$$V_{K_{i_1 \ldots i_s}}(f) = \int_{K_{i_1 \ldots i_s}} |d_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}} f(T_{i_1 \ldots i_s})|.$$

Если $f(P) \in W_1^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s})$, то

$$\int_{K_{i_1 \ldots i_s}} |d_{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}} f(T_{i_1 \ldots i_s})| = \int_{K_{i_1 \ldots i_s}} \left| \frac{\partial^s f(T_{i_1 \ldots i_s})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} \right| dt_{i_1} \ldots dt_{i_s} \leqslant$$
$$\leqslant L_{i_1 \ldots i_s}.$$

Значит, $\widetilde{W}_1^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{V}(L_{i_1 \ldots i_s})$. И можно записать еще одну цепочку: при одних и тех же определяющих постоянных

$$\widetilde{W}_\infty^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{W}_p^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{W}_1^{(1)}(L_{i_1 \ldots i_s}) \subset \widetilde{V}(L_{i_1 \ldots i_s}).$$

Заметим, что функции из $\widetilde{V}(L_{i_1 \ldots i_s})$ не обязаны быть непрерывными.

§ 2. Погрешности квадратурных формул

В этом параграфе мы вычислим точные значения погрешности $R = \sup |\delta(f)|$ на некоторых классах функций и рассмотрим вопрос о наилучших порядках сходимости.

Интегральные отклонения. Пусть в K^n задана сетка Σ, состоящая из N точек $\Sigma = \{P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}\}$. Фиксируем произвольную грань $K_{i_1\ldots i_s}$ куба и рассмотрим сетку, состоящую из проекций точек $P_0, \ldots, P_{N-1}$ на $K_{i_1\ldots i_s}$. Обозначим через $D_{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$ отклонение этой сетки на $K_{i_1\ldots i_s}$:

$$D_{i_1\ldots i_s}(\Sigma) = \sup_{K_{i_1\ldots i_s}} |S_N^{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) - N x_{i_1} \ldots x_{i_s}|. \quad (8.16)$$

Интегральными отклонениями сетки Σ на грани $K_{i_1\ldots i_s}$ назовем величины

$$I_{i_1\ldots i_s}^{(q)}(\Sigma) = \left\{ \int_{K_{i_1\ldots i_s}} |S_N^{i_1\ldots i_s}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}) - N x_{i_1} \ldots x_{i_s}|^q \, dx_{i_1} \ldots dx_{i_s} \right\}^{1/q} \quad (8.17)$$

при $1 \leqslant q < \infty$.

Легко проверить, что, каковы бы ни были отмеченные индексы $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leqslant n$, при любом $1 \leqslant q < \infty$

$$I_{i_1\ldots i_s}^{(1)}(\Sigma) \leqslant I_{i_1\ldots i_s}^{(q)}(\Sigma) \leqslant D_{i_1\ldots i_s}(\Sigma) \leqslant D(\Sigma), \quad (8.18)$$

где справа стоит отклонение сетки Σ (см. (9.2) и (4.55)).

Точные оценки.

Теорема 1. *На классе функций* $\widetilde{W}_1(L_{i_1\ldots i_s})$ *погрешность квадратурной формулы* (8.6) *с произвольной сеткой* Σ *равна*

$$R = \frac{1}{N} \hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s} I_{i_1\ldots i_s}^{(1)}(\Sigma). \quad (8.19)$$

Теорема 2. *На классе функций* $\widetilde{W}_p^{(1)}(L_{i_1\ldots i_s})$ *погрешность квадратурной формулы* (8.6) *с произвольной* *сеткой* Σ *равна*

$$R = \frac{1}{N} \hat{\sum} L_{i_1 \ldots i_s} I^{(q)}_{i_1 \ldots i_s} (\Sigma) , \tag{8.20}$$

причем $(1/p) + (1/q) = 1$.

Теорема 3. *На классах функций* $\widetilde{W}_1^{(1)} (L_{i_1 \ldots i_s})$ *и* $\widetilde{V} (L_{i_1 \ldots i_s})$ *погрешность квадратурной формулы* (8.6) *с произвольной сеткой* Σ *равна*

$$R = \frac{1}{N} \hat{\sum} L_{i_1 \ldots i_s} D_{i_1 \ldots i_s} (\Sigma) . \tag{8.21}$$

Теорема 1 была доказана в [97]; там же указано на справедливость теоремы 2, хотя формулировка этой теоремы не приведена. Теорема 3 для функций с ограниченной вариацией в несколько более слабой форме была доказана в [112].

Схема доказательства всех трех теорем. Из формул (8.9) и (8.15) легко получить, что $|\delta (f)|$ не превосходит правых частей (8.19), (8.20) и (8.21), если $f (P)$ принадлежит соответствующему классу функций.

Для доказательства достижимости оценок (8.19) и (8.20) выберем функцию $f (P)$, у которой все производные (8.1) на соответствующих гранях $K_{i_1 \ldots i_s}$ заданы формулой

$$\frac{\partial^s f (T_{i_1 \ldots i_s})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}} = (-1)^s L_{i_1 \ldots i_s} \frac{| Z(T_{i_1 \ldots i_s} |)^{q-1} \operatorname{sgn} Z}{\left[I^{(q)}_{i_1 \ldots i_s} (\Sigma) \right]^{q-1}} ,$$

а сама $f (P)$ определена соотношением (8.3). Здесь для краткости введено обозначение

$$Z (T_{i_1 \ldots i_s}) = N t_{i_1} \ldots t_{i_s} - S_N^{i_1 \ldots i_s} (t_{i_1}, \ldots , t_{i_s}).$$

Можно проверить, что эта функция $f (P)$ принадлежит классу $\widetilde{W}_p^{(1)} (L_{i_1 \ldots i_s})$, а при $q = 1$ — классу $\widetilde{W}_1 (L_{i_1 \ldots i_s})$. По формуле (8.9) нетрудно вычислить, что $\delta (f) = R$.

Несколько сложнее доказательство точности оценки (8.21). Во-первых, на грани $K_{i_1 \ldots i_s}$ существует хотя бы одна точка $T^*_{i_1 \ldots i_s}$ такая, что $D_{i_1 \ldots i_s} (\Sigma) = |Z (T^*_{i_1 \ldots i_s} \pm 0)|$, причем точка $T^*_{i_1\ldots i_s}$ есть одна из проекций сетки Σ на $K_{i_1\ldots i_s}$ (ср. лемму 3 в гл. 3). Выберем достаточно малый s-мерный параллелепипед Π_ε, так, чтобы он принадлежал области знакопостоянства и непрерывности функции $Z(T_{i_1\ldots i_s})$ и имел вид

$$\Pi_\varepsilon = [\overset{*}{t}_{i_1}, \overset{*}{t}_{i_1} \pm \varepsilon) \times \ldots \times [\overset{*}{t}_{i_s}, \overset{*}{t}_{i_s} \pm \varepsilon);$$

здесь $\overset{*}{t}_{i_1}, \ldots, \overset{*}{t}_{i_s}$ — координаты точки $T^*_{i_1\ldots i_s}$, а знак $\pm\varepsilon$ выбирается таким же, как в $T^*_{i_1\ldots i_s} \pm 0$ (нетрудно доказать, что либо все знаки $+$, либо все знаки $-$).

Рассмотрим функцию $f_\varepsilon(P)$, у которой все производные (8.1) заданы на соответствующих гранях формулой

$$\frac{\partial^s f_\varepsilon(T_{i_1\ldots i_s})}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}} = \begin{cases} \left(-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^s L_{i_1\ldots i_s}\operatorname{sgn} Z & \text{при } T_{i_1\ldots i_s} \in \Pi_\varepsilon, \\ 0 & \text{при } T_{i_1\ldots i_s} \notin \Pi_\varepsilon, \end{cases}$$

а сама $f_\varepsilon(P)$ определена соотношением (8.3). Можно доказать, что эта функция принадлежит $\widetilde{W}_1^{(1)}(L_{i_1\ldots i_s})$ и в то же время по формуле (8.9)

$$\delta(f_\varepsilon) = \frac{1}{N}\hat{\sum}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^s L_{i_1\ldots i_s}\int\limits_{\Pi_\varepsilon} Z\operatorname{sgn} Z\,dt_{i_1}\ldots dt_{i_s} =$$
$$= \frac{1}{N}\hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}\,|Z(\overline{T}_{i_1\ldots i_s})|,$$

где $\overline{T}_{i_1\ldots i_s}$ — некоторая средняя точка, принадлежащая Π_ε. Если $\varepsilon \to 0$, то $\overline{T}_{i_1\ldots i_s} \to \overset{*}{T}_{i_1\ldots i_s} \pm 0$ и $\delta(f_\varepsilon) \to R$.

Оценки на классах $H_1(L_{i_1\ldots i_s})$ и $\widetilde{H}_1(L_{i_1\ldots i_s})$.

Теорема 1′. *На классе функций $\widetilde{H}_1(L_{i_1\ldots i_s})$ погрешность квадратурной формулы* (8.6) *с произвольной сеткой Σ равна выражению* (8.19).

Схема доказательства. Из (8.12) можно вывести, что

$$|d_{x_{i_1},\ldots,x_{i_s}} f(T_{i_1\ldots i_s})| \leqslant L_{i_1\ldots i_s} dt_{i_1}\ldots dt_{i_s},$$

после чего из (8.15) нетрудно получить, что $|\delta(f)|$ не превосходит правой части (8.19). А так как оценка эта достижима на $\widetilde{W}_1\,(L_{i_1\ldots i_s})$, то тем самым она достижима и на более широком классе $\widetilde{H}_1\,(L_{i_1\ldots i_s})$.

Следствие. *На классе функций* $H_1\,(L_{i_1\ldots i_s})$ *для погрешности квадратурной формулы* (8.6) *с произвольной сеткой* Σ *справедлива оценка*

$$R \leqslant \frac{1}{N} \hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}\, I^{(1)}_{i_1\ldots i_s}\,(\Sigma)\,, \tag{8.22}$$

где заменить неравенство равенством нельзя.

Доказательство. Справедливость неравенства (8.22) следует из теоремы 1′ и включения (8.13). Чтобы доказать, что оценка (8.22) неточная, рассмотрим равномерную сетку Σ_0 (§ 1 гл. 5) с $\beta_\nu = 0$ (число точек $N = M^n$). Для такой сетки интегральные неравномерности $I^{(1)}_{i_1\ldots i_s}(\Sigma_0)$ нетрудно вычислить, ибо на грани $K_{i_1\ldots i_s}$ при $i_\nu/M \leqslant x_{i_\nu} < (i_\nu+1)/M$ значение $S_N^{i_1\ldots i_s}$ равно $(i_1+1)\ldots(i_s+1)\,M^{n-s}$, что больше, чем $Nx_{i_1}\ldots x_{i_s}$ (рис. 8.3, где $n=3$, $M=4$). Следовательно,

$$I^{(1)}_{i_1\ldots i_s}(\Sigma_0) =$$

$$= \int\limits_{K_{i_1\ldots i_s}} |\,Nx_{i_1}\ldots x_{i_s} - S_N^{i_1\ldots i_s}(x_{i_1},\ldots,x_{i_s})\,|\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_s} =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots i_s=0}^{M-1} \int\limits_{\frac{i_1}{M}}^{\frac{i_1+1}{M}} \ldots \int\limits_{\frac{i_s}{M}}^{\frac{i_s+1}{M}} [M^{n-s}(i_1+1)\ldots(i_s+1) -$$

$$- Nx_{i_1}\ldots x_{i_s}]\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_s} =$$

$$= M^{n-2s} \sum_{i_1,\ldots,i_s=0}^{M-1} [(i_1+1)\ldots(i_s+1) -$$

$$- \left(i_1+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(i_s+\frac{1}{2}\right)] = \frac{N}{2^s}\left[\left(1+\frac{1}{M}\right)^s - 1\right].$$

Значит, правая часть (8.22) в случае сетки Σ_0 равна

$$\hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}\, 2^{-s}\,[(1+1/M)^s - 1], \tag{8,23}$$

в то время как в § 1 гл. 5 на классах H_α $(L_{i_1\ldots i_s})$ была получена более точная оценка погрешности (5.8), которая при $\alpha = 1$ и $\beta_\nu = 0$ превращается в

$$\hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s} 2^{-s} (1/M)^s.$$

Замечание. В формулировке следствия можно заменить класс H_1 $(L_{i_1\ldots i_s})$ на W_1 $(L_{i_1\ldots i_s})$.

Замечание. Отметим, что функция $f_*(P) = -\hat{\sum} L_{i_1\ldots i_s}(1-x_{i_1})\ldots(1-x_{i_s})$ принадлежит классу $\widetilde{W}_1(L_{i_1\ldots i_s})$. Вычисляя интеграл от $f_*(P)$ по сетке Σ_0, получим ошибку (8.23).

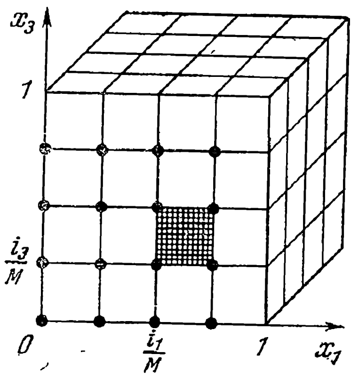

Рис. 8.3.

Оценки погрешности для конкретных сеток. Для всех сеток, рассмотренных в гл. 5 и 6, были получены оценки отклонения $D(\Sigma)$. В силу (8.18) эти же оценки годятся как для $I^{(q)}_{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$, так и для $D_{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$, что позволяет получить*) оценки для R.

Для тех сеток, для которых неравномерность $\varphi_\infty(\Sigma)$ оценивалась через $D(\Sigma)$, оценки настоящей главы на классе H_1 $(L_{i_1\ldots i_s})$ оказываются более точными, чем оценки, полученные с помощью теоремы 4 гл. 4. Например, для начального участка последовательности Холтона, согласно теореме 3 гл. 5, отклонение $D = O(\ln^n N)$. Из (8.19) вытекает, что $R = O(N^{-1}\ln^n N)$ на H_1 $(L_{i_1\ldots i_s})$. А из (4.47) и (5.28) получается лишь, что $R = O(N^{-1}\ln^{2n} N)$ (впрочем, оба эти порядка «почти наилучшие»).

В тех же случаях, когда $\varphi_\infty(\Sigma)$ оценивается независимо от $D(\Sigma)$, порядок оценки (4.47) может оказаться более близким к точным оценкам R, полученным в настоящей главе. Например, для начального участка ЛП$_\tau$-по-

---

*) В большинстве рассмотренных случаев проекции сеток на различные грани представляют собой снова сетки известного типа. Это дает возможность точнее оценить $D_{i_1\ldots i_s}(\Sigma)$.

следовательности, согласно теореме 8 гл. 6, отклонение $D = O(\ln^n N)$, так что на классах $H_1(L_{i_1\ldots i_s})$ снова $R = O(N^{-1}\ln^n N)$. Однако благодаря хорошей оценке $\varphi_\infty = O(1)$ в этом случае из (4.47) также вытекает, что $R = O(N^{-1}\ln^n N)$.

О наилучших порядках сходимости. Если среди определяющих постоянных $\{L_{i_1\ldots i_s}\}$ какого-нибудь из рассмотренных здесь классов функций есть постоянная $L_{i_1} \neq 0$, то порядок сходимости R легко оценить снизу: так как в одномерном случае (теорема 2 гл. 2)

$$D_{i_1}(\Sigma) \geqslant I_{i_1}^{(q)}(\Sigma) \geqslant I_{i_1}^{(1)}(\Sigma) \geqslant \frac{1}{4N},$$

то $R \geqslant L_{i_1}/(4N)$ (в качестве «худшей» функции можно выбрать функцию от одной переменной). Этот результат содержится также в более общей теореме Н. С. Бахвалова [49].

Значительно сложнее оценить R снизу тогда, когда $L_{12\ldots n} \neq 0$, а все остальные $L_{i_1\ldots i_s} = 0$. В этом случае задача эквивалентна оценке снизу интегралов $I_{12\ldots n}^{(q)}$ (на всевозможных сетках Σ, содержащих N точек). Приведем без доказательств две теоремы о таких оценках.

Теорема 4 [79]. *Существует абсолютная положительная постоянная $C_1 = C_1(n) > 0$ такая, что для любой сетки Σ в K^n*

$$I_{12\ldots n}^{(2)}(\Sigma) \geqslant C_1 \ln^{\frac{n-1}{2}} N. \tag{8.24}$$

Теорема 5 [101]. *Для любой сетки Σ в K^n при $n > 1$*

$$I_{12\ldots n}^{(1)}(\Sigma) \geqslant \frac{1}{4} - \varepsilon_n(N), \tag{8.25}$$

где $0 < \varepsilon_n(N) < 1/4$ и $\varepsilon_n = O(N^{-1}\ln^{n-2} N)$, когда $N \to \infty$.

Являются ли порядки оценок (8.24) и (8.25) точными при каждом n — неизвестно. Среди известных сеток в K^n наилучшие оценки $I_{12\ldots n}^{(q)}(\Sigma)$ получены для сеток Σ_H и для Π_τ-сеток: для них $I_{12\ldots n}^{(1)} \leqslant I_{12\ldots n}^{(2)} = O(\ln^{n-1} N)$.

Более подробно исследован случай $n = 2$. Х. Дэвенпортом [107] были указаны сетки на квадрате, для которых $I_{12}^{(2)} = O(\ln^{1/2} N)$, и тем самым доказана точность порядка (8.24) в случае $n = 2$. Эти сетки состоят из $N = 2M$ точек с координатами

$$x_i = i/M, \quad y_i = \{\pm i\theta\} \qquad (1 \leqslant i \leqslant M),$$

где θ — иррациональное число, разложение которого в непрерывную дробь имеет ограниченные неполные частные (рис. 8.5 для $\theta = \sqrt{2}/2$).

Работа [107] осталась незамеченной рядом авторов [110, 97, 109, 108, 83], и в [83] И. В. Виленкиным были построены другие сетки на квадрате, для которых также $I_{12}^{(2)} = O(\ln^{1/2} N)$. Эти сетки $\tilde{\Sigma}$ представляют собой дальнейшее усовершенствование сеток из [79, 57]. Они суть Π_0-сетки и состоят из точек с двоично рациональными координатами:

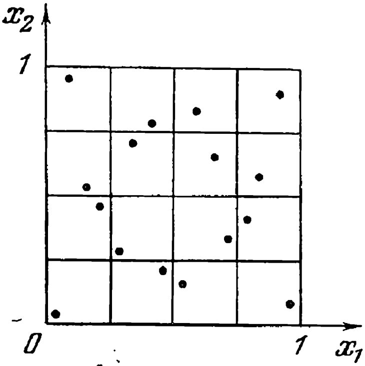

Рис. 8.4.

$$x_i = \frac{i + 1/2}{N}, \quad y_i = \begin{cases} p(t) + (2N)^{-1}, & \text{если } i = 2t, \\ 1 - p(t) - (2N)^{-1}, & \text{если } i = 2t + 1. \end{cases}$$

Здесь $0 \leqslant i \leqslant N - 1$, $N = 2^\nu$ (рис. 8.4). Для сеток $\tilde{\Sigma}$

$$[I_{12}^{(2)}(\tilde{\Sigma})]^2 = \frac{\log_2 N}{24} + \frac{1}{2} - \frac{1}{288 N^2}.$$

Есть основания ожидать, что $I_{12}^{(1)}(\tilde{\Sigma}) = O(1)$, однако это пока не доказано.

Случай бесконечного числа переменных. В формулах (8.19) — (8.22) можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и получить некоторые оценки погрешности квадратурной формулы (7.2) в бесконечномерном кубе K^∞. Улучшить оценку порядка сходимости на классах $H_1(L_{i_1 \ldots i_s})$ здесь не удается: порядок $R = O(N^{-1+\varepsilon})$ оказывается таким же, как в гл. 7. Можно лишь несколько расширить класс допустимых функций.

Ограничимся формулировкой одной теоремы, аналогичной теореме 1 гл. 7. Пусть задана бесконечная система определяющих постоянных $\{L_{i_1 \ldots i_s}\}$. Буквой Y обозначим точку, у которой все координаты, кроме отмеченных, равны нулю (см. стр. 249).

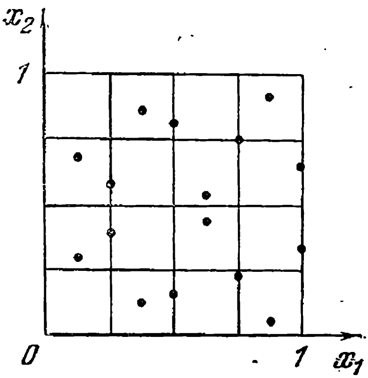

Рис. 8.5.

Определение. Функция $f(X)$ принадлежит классу $\tilde{H}_1(L_{i_1 \ldots i_s})$, если:

1° $f(X)$ ограничена в K^∞;

2° для любых точек X и Y таких, что $X \in K_{i_1 \ldots i_s}$ и $X + Y \in K_{i_1 \ldots i_s}$, выполняется (7.15) с $\alpha = 1$;

3° для любой точки $X \in K^\infty$ $f(X) = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_1, \ldots, x_n, 1, 1, \ldots)$.

Мы скажем, что сетка Σ допускает *мультипликативную оценку интегральных отклонений* $I^{(q)}_{i_1 \ldots i_s}$, если существуют положительные числа $h_1, h_2, \ldots, h_t, \ldots$ и B такие, что при любых $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_s$

$$I^{(q)}_{i_1 \ldots i_s}(\Sigma) \leqslant B h_{i_1} \ldots h_{i_s}. \tag{8.26}$$

Теорема 6. *Для сетки* $\Sigma = \{X_0, X_1, \ldots, X_{N-1}\}$, *допускающей мультипликативную оценку интегральных отклонений* (8.26), *на классах* $\tilde{H}_1(L_{i_1 \ldots i_s})$, *определяющие постоянные которых одинаково убывают по отношению к* $\{h_t\}$, *имеет место оценка*

$$R \leqslant \frac{AB}{N}\left(\exp \sum_{t=1}^{\infty} \varepsilon_t h_t - 1\right). \tag{8.27}$$

Для сеток Σ^* и Σ^{**}, рассмотренных в гл. 7, оценки вида (8.26) следуют из оценок $D_{i_1 \ldots i_s}$ и (8.18).

Вспомогательные неравенства

1. Пусть $\alpha \geqslant 0$. Нетрудно вычислить, что

$$\int_a^b |\xi - x|^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}\{|\xi - a|^\alpha(\xi - a) + |b - \xi|^\alpha (b - \xi)\}.$$

Если $a \leqslant \xi \leqslant b$, то

$$\frac{1}{\alpha+1}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha+1} \leqslant \int_a^b |\xi - x|^\alpha dx \leqslant \frac{1}{\alpha+1}(b-a)^{\alpha+1}. \qquad (9.1)$$

2. Если $0 < q < q'$ и функция $u(x)$ кусочно непрерывна, то

$$\left\{\int_0^1 |u|^q dx\right\}^{1/q} \leqslant \left\{\int_0^1 |u|^{q'} dx\right\}^{1/q'} \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |u(x)|. \qquad (9.2)$$

Доказательство левого неравенства. Пусть $(1/\alpha) + (1/\beta) = 1$. Выберем $\alpha = q'/q$ и воспользуемся неравенством Гельдера:

$$\int_0^1 |u|^q dx \leqslant \left\{\int_0^1 |u|^{q\alpha} dx\right\}^{1/\alpha} \left\{\int_0^1 1^\beta dx\right\}^{1/\beta} = \left\{\int_0^1 |u|^{q'} dx\right\}^{q/q'},$$

что равносильно требуемому неравенству.

Обобщение неравенства на случай куба K^n очевидно.

3. Если $0 < q < q'$, то

$$\max_{1\leqslant j\leqslant M} |u_j| \leqslant \left\{\sum_{j=1}^M |u_j|^{q'}\right\}^{1/q'} \leqslant \left\{\sum_{j=1}^M |u_j|^q\right\}^{1/q}. \qquad (9.3)$$

Доказательство правого неравенства.

$$\frac{\left\{\sum_{j=1}^{M} |u_j|^{q'}\right\}^{1/q'}}{\left\{\sum_{k=1}^{M} |u_k|^{q}\right\}^{1/q}} = \left\{\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{|u_j|^q}{\sum_{k=1}^{M}|u_k|^q}\right]^{q'/q}\right\}^{1/q'} \leqslant$$

$$= \left\{\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{|u_j|^q}{\sum_{k=1}^{M}|u_k|^q}\right]\right\}^{1/q'} = 1.$$

4. Пусть $q > 0$. Если $\sum_{i=0}^{N-1} C_i = 1$ и все $C_i > 0$, то

$$\sum_{i=0}^{N-1} (C_i)^{q+1} \geqslant (1/N)^q, \tag{9.4}$$

и равенство имеет место, когда $C_0 = \ldots = C_{N-1} = 1/N$.

5. Пусть $q > 0$. Если $\sum_{i=0}^{N-1} C_i = 1$ и все $C_i > 0$, то

$$\frac{1}{2}(2C_0)^{q+1} + \sum_{i=1}^{N-1} (C_i)^{q+1} + \frac{1}{2}(2C_N)^{q+1} \geqslant (1/N)^q, \tag{9.5}$$

и равенство имеет место только в случае, когда $C_0 = C_N = \frac{1}{2N}$, $C_1 = \ldots = C_{N-1} = \frac{1}{N}$.

Неравенства 4 и 5 можно доказать при помощи обычных методов вариационного исчисления.

Цитированная литература

К I части

К главе 1

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. ИЛ, М., 1963.
2. Арутюнян Ф. Г., Талалян А. А., О единственности рядов по системам Хаара и Уолша. ИАН СССР, сер. матем., 1964, 28, № 6, 1391—1408.
3. Белоцерковский О. М., Чушкин П. И., Численный метод интегральных соотношений. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1962, 2, № 5, 731—759.
4. Виленкин Н. Я., Дополнения к книге [9], 459—493.
5. Голубов Б. И., О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара. ИАН СССР, сер. матем., 1964, 28, № 6, 1271—1296.
6. Гутер Р. С., Ульянов П. Л., О новых результатах в теории ортогональных рядов. В книге [9], 335—456.
7. Данилов В. Л. и др., Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). СМБ, Физматгиз, М., 1961.
8. Ермаков С. М., Интерполирование по случайным точкам, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1963, 3, № 1, 186—190.
9. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Физматгиз, М., 1958.
10. Кемхадзе Г. Г., Об одном свойстве системы Хаара. Сообщ. АН ГрузССР, 1966, 41, № 1, 33—40.
11. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича. Физматгиз, М., 1958.
12. Матвеев В. А., О коэффициентах Фурье — Хаара. Изв. вузов, Математика, 1965, № 6, 103—112.
13. Мориц Ф. (Móricz F.), О безусловной сходимости рядов по системе Хаара. ИАН СССР, сер. матем., 1963, 27, № 6, 1229—1238.
14. Олевский А. М., Об одной ортонормированной системе и ее применениях. Матем. сб., 1966, 71, № 3, 297—336.
15. Петровская М. Б., О нуль-рядах по системе Хаара. ИАН СССР, сер. матем., 1964, 28, № 4, 773—798.
16. Поляк Б. Т., Шрейдер Ю. А., Применение полиномов Уолша в приближенных вычислениях. Вопросы теории матем. машин., Сб. 2, 1962, 174—190.

17. Скворцов В. А., Теорема типа Кантора для системы Хаара. Вестник Моск. ун-та, сер. матем., мех., 1964, № 5, 3—6.
18. Соболь И. М., Применение разложений по функциям Хаара к исследованию сеток интегрирования. Диссерт. ОПМ МИАН СССР, М., 1959.
19. Соболь И. М., Функции многих переменных с быстро сходящимися рядами Хаара. ДАН СССР, 1960, 132, № 4, 773—776.
20. Соломяк М. З., Об ортогональном базисе в пространстве Банаха. Вестник Ленинградск. ун-та, 1957, № 1, сер. матем., мех., астрон., вып. 1, 27—37.
21. Тиман А. Ф., Теория приближения функций действительного переменного. Физматгиз, М., 1960.
22. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 3, «Наука», М., 1966.
23. Ульянов П. Л., О рядах по системе Хаара. Матем. сб., 1964, 63, № 3, 356—391.
24. Ульянов П. Л., Ряды по системе Хаара. ИАН СССР, сер. матем., 1964, 28, № 4, 925—950.
25. Alexits G., Sur la sommabilité des séries orthogonales. Acta math. Acad. sci. Hungar., 1953, 4, № 3—4, 181—189.
26. Birkhoff G., Kampé de Fériet J., Kinematics of homogeneous turbulence. J. Math. Mech., 1958, 7, № 5, 663—703; 1962, 11, № 3, 319—340.
27. Cieselsky Z., Musielak J., On absolute convergence of Haar series. Colloq. Math., 1959, 7, № 1, 61—65.
28. Delporte J., Conditions de convergence uniforme et de continuité presque sûres de la somme d'une série de Haar — Fourier á coefficients aléatoires et construction de fonctions aléatoires normales á dérivée presque sûrement continue sur un intervalle fermé. C. R. Acad. Sci., 1965, Gr. 1, 260, № 3, 780—783.
29. Ellis H. W., Halperin I., Haar functions and the basic problem for Banach spaces. J. London Math. Soc., 1956, 31, 28—39.
30. Faber G., Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar. Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 1910, 19, 104—112.
31. Gelbaum B. R., On the functions of Haar. Ann. Math., 1950, 51, 26—36.
32. Haar A., Összegyűjtött munkái — Gesammelte Arbeiten. Budapest, 1959.
33. Haar A., Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. Math. Ann., 1910, 69, 331—371.
34. Kampé de Fériet J., Pseudo-intégrales de Stiltjes aléatoires. C. R. Acad. Sci., 1961, 252, № 15, 2162—2165.
35. Leindler L., Über Konvergenz- und Summationseigenschaften von Haarschen Reihen. Acta scient. math., 1965, 26, № 1—2, 19—30.
36. Liverani F., Una classe di nuclei in relazione con il sisteme ortonormale di Haar. Atti semin. mat. fis. univ. Modena, 1965, 14, 157—168.

37. Marcinkiewicz J., Quelques théorèmes sur les séries orthogonales. Ann. Polon. math., 1937, 16, 84—96.
38. Sz.-Nagy B., Approximation properties of orthogonal expansion. Acta scient. math., 1953, 15, № 1, 31—37.
39. Ohkuma T., On a certain system of orthogonal step functions. Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 166—177.
40. Orlicz W., Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B. Bull. internat. Acad. Polon., ser. A, 1932, 207—220.
41. Ostrowsky A., Über die Absolutabweichung einer differenzierbaren Funktion von ihrem Integralmittelwert. Comm. Math. Helv., 1937/38, 10, № 3, 226—227.
42. Paley R. E. A. C., A remarkable system of orthogonal functions. Proc. London Math. Soc., 1932, 34, 241—279.
43. Price J. J., Zink R. E., On sets of completeness for families of Haar functions. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 119, № 2, 262—269.
44. Rademacher H., Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. Math. Ann., 1922, 87, 112—138.
45. Schauder J., Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems. Math. Z., 1928, 28, 317—320.
46. Walsh J. L., A property of Haar's system of orthonormal functions. Math. Ann., 1923, 90, 38—45.
47. Watari Ch., A generalization of Haar functions. Tôhoku Math. J., 1956, 8, № 3, 286—290.
48. Weyl H., Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollständig ist. Rend. circolo mat. Palermo, 1909, 27, 373—392.

К главе 2

49. Бахвалов Н. С., Об оптимальных оценках сходимости квадратурных процессов и методов интегрирования типа Монте-Карло на классах функций. Сб. «Числ. методы решения дифф. и интегр. уравнений», «Наука», М., 1964, 5—63.
50. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
51. Кронрод А. С., Об интегрировании с контролем точности. ДАН СССР, 1964, 154, № 2, 283—286.
52. Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию. «Наука», М., 1966.
53. Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
54. Никольский С. М., Квадратурные формулы. Физматгиз, М., 1958.
55. Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. УМН, 1950, 5, № 2, 165—177.
56. Соболев С. Л., Лекции по теории кубатурных формул. Новосибирск, 1964, 1965.
57. Соболь И. М., Многомерные интегралы и метод Монте-Карло. ДАН СССР, 1957, 114, № 4, 706—709.

58. Турецкий А. Х., Об оценках приближений квадратурными формулами для функций, удовлетворяющих условию Липшица. УМН, 1951, 6, № 5, 167—171.

К главе 3

59. Касселс Дж. В. С., Введение в теорию диофантовых приближений. ИЛ., М., 1961.
60. Кац М., Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел. ИЛ, М., 1963.
61. Коробов Н. М., Некоторые проблемы распределения дробных долей. УМН, 1949, 4, № 1, 189—190.
62. Коробов Н. М., О вполне равномерном распределении и совместно нормальных числах. ИАН СССР, сер. матем., 1956, 20, № 5, 649—660.
63. Курош А. Г., Курс высшей алгебры. Гостехиздат, М.—Л., 1946.
64. Постников А. Г., Арифметическое моделирование случайных процессов. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1960, т. 57.
65. Постников А. Г., Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений. Тр. матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 82.
66. Соболь И. М., Псевдослучайные числа для машины «Стрела». Теория вероятн. и ее примен., 1958, 3, № 2, 205—211.
67. Соболь И. М., О распределении точек в кубе и сетках интегрирования. УМН, 1966, 21, № 5, 271—272.
68. Старченко Л. П., Построение вполне равномерно распределенных последовательностей. ДАН СССР, 1959, 129, № 3, 519—521.
69. Ченцов Н. Н., Псевдослучайные числа для моделирования марковских цепей. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1967, 7, № 3, 632—643.
70. Van Aardenne-Ehrenfest T., On the impossibility of a just distribution. Indagat. math., 1949, 11, 264—269.
71. Cigler J., Helmberg G., Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung. Jahresber. Deutsch. Math. Ver., 1961, 64, № 1, 1—50.
72. Van der Corput J. G., Verteilungsfunktionen. Proc. Kon. Akad. Wetensch. Amsterdam, 1935, 38, № 8, 813—821; № 10, 1058—1066.
73. Erdös P., Problems and results on diophantine approximations. Compositio math., 16, № 1—2, 52—65.
74. Franklin J. N., Deterministic simulation of random processes. Math. Comput., 1963, 17, № 81, 28—59.
75. Hlawka E., Über die Diskrepanz mehrdimensionaler Folgen mod 1. Math. Z., 1961, 77, № 3, 273—284.
76. Hlawka E., Discrepancy and uniform distribution of sequences. Compositio math., 16, № 1—2, 83—91.
77. Koksma J. F., Diophantische Approximationen. Ergebnisse Math. Grenzgeb., 1936, 4, № 4.

78. Koksma J. F., The theory of asymptotic distribution modulo one. Compositio math., 16, № 1—2, 1—22.
79. Roth K. F., On irregularities of distribution. Mathematika, 1954, 1, № 2, 73—79.
80. Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins. Math. Ann., 1916, 77, № 3, 313—352.

К II части

81. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболь И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А., Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). СМБ, Физматгиз, М., 1962.
82. Бухштаб А. А., Теория чисел. «Просвещение», М., 1966.
83. Виленкин И. В., О плоских сетках интегрирования. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1967, 7, № 1, 189—196.
84. Владимиров В. С., О применении метода Монте-Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения. Теория вероятн. и ее примен., 1956, 1, № 1, 113—130.
85. Владимиров В. С., Соболь И. М., Расчет наименьшего характеристического числа уравнения Пайерлса методом Монте-Карло. Вычислит. матем., 1958, № 3, 130—137.
86. Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло. Изв. вузов, сер. матем., 1958, № 5, 32—45.
87. Коробов Н. М., Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел. ДАН СССР, 1957, 115, № 6, 1062—1065.
88. Коробов Н. М., О приближенном вычислении кратных интегралов. ДАН СССР, 1959, 124, № 6, 1207—1210.
89. Коробов Н. М., Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. Физматгиз, М., 1963.
90. Кронрод А. С., О функциях двух переменных. УМН, 1950, 5, № 1, 24—134.
91. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 5, Физматгиз, М., 1959.
92. Соболь И. М., О применении рядов Хаара в теории квадратурных формул. Сб. «Вопросы вычислит. математики и вычислит. техники», Машгиз, М., 1963, 31—35.
93. Соболь И. М., Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций класса S_p. ДАН СССР, 1960, 132, № 5, 1041—1044.
94. Соболь И. М., О вычислении многомерных интегралов. ДАН СССР, 1961, 139, № 4, 821—823.
95. Соболь И. М., О методе рядов Хаара в теории многомерных квадратур. Междунар. конгресс математиков, тезисы докладов. М., 1966.
96. Соболь И. М., Применение рядов Хаара для оценки погрешности при вычислении бесконечномерных интегралов. ДАН СССР, 1967, 175, № 1, 34—37.

97. Соболь И. М., Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций классов $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{H}_1$. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, 1, № 2, 208—216.
98. Соболь И. М., О распределении точек в кубе и приближенном вычислении интегралов. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1967, 7, № 4, 784—802.
99. Соболь И. М., О вычислении бесконечномерных интегралов. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, 1, № 5, 917—922.
100. Соболь И. М., Метод Монте-Карло для расчета критичности в многогрупповом приближении. Сб. «Метод Монте-Карло в проблеме переноса излучений», Атомиздат, М., 1967, 232—254.
101. Соболь И. М., Об одном интеграле, встречающемся в теории квадратурных формул. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1966, 6, № 6, 1084—1089.
102. Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
103. Файнлейб А. С., О распределении значений функции Эйлера. Матем. заметки, 1967, 1, № 6, 645—652.
104. Ченцов Н. Н., О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных. Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 1961, 1, № 3, 418—424.
105. Albert A. A., Fundamental concepts of Higher Algebra. Univ. Chicago Press, 1956.
106. Dahlquist G., Monte-Carlo-metoden. Nord. Mat. tidskr., 1954, 2, 27—43.
107. Davenport H., Note on irregularities of distribution. Mathematika, 1956, 3, № 6, 131—135.
108. Gabai H., On the discrepancy of certain sequences mod 1. Illinois J. Math., 1967, 11, № 1, 1—12.
109. Haber S., On a sequence of points of interest for numerical quadrature. J. Research NBS, 1966, 70 B, № 2, 127—136.
110. Halton J. H., On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals. Numer. Math., 1960, 2, № 2, 84—90.
111. Hammersley J. M., Monte Carlo methods for solving multivariable problems. Ann. New York Acad. Sci., 1960, 86, № 3, 844—874.
112. Hlawka E., Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung. Ann. mat. pura appl., Ser. 4, 1961, 54, 325—333.
113. Hlawka E., Uniform distribution mod. 1 and numerical analysis. Compositio math., 16, № 1—2, 92—105.
114. Hlawka E., Zur angenäherten Berechnung mehrfacher Integrale. Monatsh. Math., 1962, 66, № 2, 140—151.
115. Sierpiński W., Teoria liczb, II. Warszawa, 1959.
116. Zierler N., Linear recurring sequences. J. Soc. Industr. Appl. Math., 1959, 7, № 1, 31—48.

Указатель определений

Общеупотребительные обозначения

Другие обозначения

Классы функций

Сетки

Последовательности

Характеристики распределения