РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. И. ГЕРЦЕНА

Зайцев В. Ф.

ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННЫЙ ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ДОПУСКАЕМЫЕ ИМИ ТОЧЕЧНЫЕ ГРУППЫ

*Учебное пособие
к спецкурсу*

2

Санкт-Петербург 1996

УДК 517.9

Рекомендовано в качестве учебного пособия к спецкурсу “Современный групповой анализ дифференциальных уравнений” методическим советом математического факультета Российского государственного педагогического университета им.А.И.Герцена.

Спецкурс-2 продолжает изложение основ современного группового анализа и посвящен точечным группам преобразований (как непрерывным, так и дискретным), допускаемым обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Этот материал отсутствует в основной программе физико-математических факультетов педагогических университетов. Спецкурс-2 может быть прочитан студентам (начиная со второго семестра третьего курса, в том числе и студентам тьюторских групп), стажерам, аспирантам первого года обучения, слушателям ФПК, а также всем специалистам смежных и прикладных специальностей, интересующимся групповым анализом.

Рецензент: *заведующий кафедрой математического анализа Ленинградского областного педагогического института заслуженный деятель науки Российской федерации доктор физико-математических наук профессор Н.М.Матвеев.*

Настоящий спецкурс (спецкурс-2) является непосредственным продолжением спецкурса-1, при ссылках на который к номеру параграфа, теоремы, определения или формулы будет добавляться спереди цифра 1. Например, §1.7, теорема 1.15, формула (1.3.6) означают, соответственно, §7, теорему 15 и формулу 3.6 спецкурса-1.

§1. Предварительные замечания.

Не секрет, что ряд технических приемов, применяемых в практическом групповом анализе, вызывает у специалистов по теории дифференциальных уравнений, мягко говоря, удивление. В самом деле, уравнения дифференцируются почленно, к ним применяются дифференциальные операторы и преобразования, содержащие производные и даже нелокальные переменные, и при этом требуется лишь обратимость преобразований, а относительно самого дифференциального уравнения не оговаривается даже существование и единственность решения ...

Однако внимательный читатель обратил внимание на то, что уже в спецкурсе-1 рассматриваются ***гладкие или аналитические преобразования***. И тем не менее, до поры до времени (точнее, до получения конечного результата) все операции над дифференциальными уравнениями рассматриваются как ***формальные***, а далее, как говорят специалисты по групповому анализу, ***решение предъявляется***. Это означает, что формальное решение задачи получено в аналитической замкнутой форме, допускающей прямую проверку подстановкой в исходное уравнение и подчинение любым априорным условиям. Поэтому, если решение не существует, оно и не будет получено, а единственность решения оказывается несущественной, так как при его получении нигде не используется ни предельный переход, ни сходимость ряда или процеса последовательных приближений. При этом могут получаться многозначные решения, а также (если специально не оговаривается обратное) функции $y(x)$, принимающие комплексные значения и зависящие от ***комплекснозначного*** аргумента (не путать с функциями комплексного переменного, где, как правило, подразумевается аналитичность). Точно так же параметры уравнений и преобразований могут принадлежать как полю действительных, так и полю комплексных чисел.

Определение 1. ***Общим решением*** дифференциального уравнения n-го порядка

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv F\,[x, y^{(n)}] = 0 \qquad (1.1)$$

называется n-параметрическое семейство ***формальных кривых***

$$\mathsf{F}\,(x, y, C_1, \dots , C_n) = 0, \qquad (1.2)$$

удовлетворяющих соответствующим условиям гладкости, зависящих от n функционально независимых произвольных констант $C_1, \dots , C_n$ и обращающих исходное уравнение (1.1) при подстановке в тождество. Термин “формальная кривая” означает возможную комплекснозначность всех аргументов в формуле (1.2).

<u>Определение 2</u>**.** Пусть (1.2) — общее решение уравнения (1.1). Формальная кривая $\mathsf{F}\,(x, y) = 0$, полученная из (1.2) произвольной фиксацией констант $C_1, \dots , C_n$, называется ***частным решением*** дифференциального уравнения (1.1).

Таким образом, частное решение может быть многозначной функцией, причем все ее m ветвей рассматриваются как ***одно*** частное решение, а не m, так как задаются единым аналитическим вы- р

$\boxed{!}$ нием. Если кривая односвязна, то ее всегда можно парамет- ризовать до однозначной, введя в качестве одной из новых переменных, например, длину дуги. При этом в кратных точках возможное продолжение кривой выбирается по максимуму гладкости.

Далее, наряду с отдельными дифференциальными уравнениями, как, например, (1.1), мы будем рассматривать множества дифференциальных уравнений, выделенные из “общей массы” некоторым структурным признаком.

<u>Определение 3</u>**.** Множество дифференциальных уравнений

$$F(x, y, y', \dots , y^{(n)}, \overline{a}) = 0 \qquad (1.3)$$

называется ***классом***, если каждый элемент множества (1.3) однозначно определяется значением ***вектора параметров*** $\overline{a}$.

Если $\overline{a} \in \mathbf{R}^m$, говорят о m-параметрическом классе; если же в уравнение в качестве произвольного (классификационного) элемента входит функция или набор функций, вектор $\overline{a}$ становится бесконечномерным и соответствует коэффициентам разложения этих функций, например, в ряд Тейлора. Так, любой элемент класса

$$y'' = F\,(x, y)$$

однозначно определяется своим произвольным элементом $F \in \mathbf{R}^{\infty} \times \mathbf{R}^{\infty}$.

§2. <u>Преобразования производных. Формулы продолжения.</u>

Переменные $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ в (1.1) считаются алгебраически независимыми, но связанными дифференциальными соотношениями

$y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$ и т.д. Величина x называется ***независимой переменной***, y — ***дифференциальной переменной***, а $y', y'', \ldots$ — первой, второй и т.д. ***производной***. Всякая аналитическая функция конечного набора переменных $x, y, y', \ldots$ называется дифференциальной функцией, а максимальный порядок p производной, входящей в нее, называется ***порядком*** этой функции. Уравнение (1.1) задает некую n-мерную поверхность в $(n + 1)$-мерном пространстве $(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Будем рассматривать уравнение (1.1) вместе со всеми его дифференциальными следствиями $D_xF = 0$, $(D_x)^2F = 0, \ldots$, где D_x — оператор полного дифференцирования

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + y'' \frac{\partial}{\partial y'} + \ldots \;, \tag{2.1}$$

и говорить, что дифференциальное уравнение (1.1) задает ***дифференциальное многообразие*** $[\,F\,]$. Естественно, бесконечный ряд (2.1) обрывается на старшей производной, входящей в F.

Рассмотрим точечные преобразования (1.2.1), которые мы пока будем записывать без параметра a в виде

$$\tilde{x} = \varphi(x, y), \quad \tilde{y} = \psi(x, y), \quad \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_y \neq 0. \tag{2.2}$$

Производные, входящие в F, будут преобразовываться согласно формулам замены переменных в дифференциальных выражениях, а именно,

$$\tilde{y}' = \frac{d\tilde{y}}{dx} = \frac{D_x\psi}{D_x\varphi} = \frac{\psi_x + \psi_y y'}{\varphi_x + \varphi_y y'} \equiv P(x,\ y,\ y'), \tag{2.3}$$

$$\tilde{y}'' = \frac{d\tilde{y}'}{dx} = \frac{D_xP}{D_x\varphi} = \frac{P_x + P_y y' + P_{y'} y''}{\varphi_x + \varphi_y y'} = \frac{Q(x, y, y', y'')}{(\varphi_x + \varphi_y y')^3}\;, \tag{2.4}$$

где $Q(x, y,\ y',\ y'') = \varphi_x\psi_{xx} - \psi_x\varphi_{xx} + (\varphi_y\psi_{xx} - \psi_y\varphi_{xx} + 2\varphi_x\psi_{xy} - 2\psi_x\varphi_{xy})y' +$

$+(\varphi_x\psi_{yy} - \psi_x\varphi_{yy} + 2\varphi_y\psi_{xy} - 2\psi_y\varphi_{xy})y'^2 + (\varphi_y\psi_{yy} - \psi_y\varphi_{yy})y'^3 + (\varphi_x\psi_y - \psi_x\varphi_y)y''.$

Старшие производные выражаются еще более громоздко, но для нас в первую очередь важен следующий вывод — если использовать конечные преобразования (2.2), то в производные войдут ***нелинейные*** комбинации функций φ и ψ.

Пусть теперь преобразования (1.2.1) зависят от вещественного параметра a и задают группу Ли:

$$\tilde{x} = \varphi(x, y, a), \qquad \tilde{y} = \psi(x, y, a). \tag{2.5}$$

Формулы для производных конечных преобразований останутся такими же, как (2.3) и (2.4), только во всех входящих в них функциях появится зависимость от a. Подставим в формулы (2.3) и (2.4) инфинитезимальное преобразование (1.2.4) и пренебрегая, как и ранее, членами порядка a^2, получим

$$\tilde{y}' = \frac{y' + aD_x\eta}{1 + aD_x\xi} \sim (y' + aD_x\eta)(1 - aD_x\xi) \sim$$
$$\sim y' + (D_x\eta - y'D_x\xi)a \equiv y' + a\zeta_1,$$

$$\tilde{y}'' = \frac{y'' + aD_x\zeta_1}{1 + aD_x\xi} \sim (y'' + aD_x\zeta_1)(1 - aD_x\xi) \sim$$
$$\sim y'' + (D_x\zeta_1 - y''D_x\xi)a \equiv y'' + a\zeta_2.$$

Таким образом, получаются инфинитезимальные операторы (см. §1.4, (1.4.8)) ***продолженных групп*** $\underset{1}{G}$ и $\underset{2}{G}$, действующие в пространствах трех

$$\underset{1}{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'}, \qquad \zeta_1 = D_x\eta - y'D_x\xi \tag{2.6}$$

и четырех переменных

$$\underset{2}{X} = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial y'} + \zeta_2\frac{\partial}{\partial y''}, \qquad \zeta_2 = D_x\zeta_1 - y''D_x\xi\,. \tag{2.7}$$

Они называются, соответственно, первым и вторым продолжением инфинитезимального оператора (1.4.8). Выражения для дополнительных координат ζ_1 и ζ_2 часто называют ***формулами продолжения***:

$$\zeta_1 = \eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2,$$

$$\zeta_2 = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}\, y'^3 + (\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y')y''.$$

Следующие продолжения могут быть получены с помощью рекуррентной формулы

$$\zeta_k = D_x\zeta_{k-1} - y^{(k)}D_x\xi.$$

Легко видеть, что, в отличие от формул для конечных преобразований, координаты инфинитезимального оператора и их частные производные входят в формулы продолжения ***линейно***.

§3. Уравнения первого порядка, допускающие группу.

Рассмотрим класс уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной

$$y' = F(x, y, \bar{a}) \tag{3.1}$$

и найдем условия инвариантности этого класса относительно преобразования (2.2). Используя формулу (2.3) и учитывая (3.1), получим

$$\tilde{y}' = \frac{\psi_x + \psi_y F(x, y, \bar{a})}{\varphi_x + \varphi_y F(x, y, \bar{a})}. \tag{3.2}$$

С другой стороны, в результате преобразования уравнение (3.1) должно перейти в уравнение того же класса, т.е. в уравнение

$$\tilde{y}' = F(\tilde{x}, \tilde{y}, \bar{b}). \tag{3.3}$$

Приравнивая правые части выражений (3.2) и (3.3), находим условие инвариантности

$$F(\varphi, \psi, \bar{b}) = \frac{\psi_x + \psi_y F(x, y, \bar{a})}{\varphi_x + \varphi_y F(x, y, \bar{a})}, \tag{3.4}$$

которое можно рассматривать как функциональное уравнение относительно F, либо как уравнение с частными производными первого порядка относительно φ и ψ. Для последнего очевидно, что если $y = f(x, C)$ — общее решение уравнения (3.3), то

$$\psi = f(\varphi, C(x, y)),$$

т.е. ***определяющее уравнение*** (3.4) в общем случае эквивалентно исходному. Это никак не помогает найти симметрии класса (3.1), тем более, что любое частное решение $\psi = f(\varphi)$ обращает якобиан преобразования (2.2) в нуль. К дискретным группам мы еще вернемся, а сейчас обратимся к группе Ли, заданной преобразованием (2.5).

Определение **4.** Говорят, что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3.5)$$

допускает группу G точечных преобразований (2.5), если определяемая уравнением (3.5) двумерная поверхность в трехмерном пространстве x, y, y' инвариантна (в смысле определения 1.13) относительно продолженной группы $\underset{1}{G}$.

В соответствии с определением 4 и теоремой 1.6 можно выписать инфинитезимальный критерий инвариантности

$$\underset{1}{X} F\Big|_{[F]} = 0. \qquad (3.6)$$

Критерий (3.6), примененный к уравнению

$$y' = F(x, y) \qquad (3.7)$$

с учетом (2.6) дает определяющее уравнение

$$\xi F_x + \eta F_y + \xi_y F^2 + (\xi_x - \eta_y)F - \eta_x = 0, \qquad (3.8)$$

которое представляет собой линейное уравнение с частными производными первого порядка как относительно F, так и относительно ξ и η. Поэтому независимо от того, какую функцию считать искомой, решение будет иметь функциональный произвол; бесконечным будет как множество однопараметрических групп, допускаемых заданным уравнением (3.7), так и множество уравнений (3.7), допускающих хотя бы какую-то группу (2.5).

Частным решением уравнения (3.8) является функция $\eta = \xi F$, в чем нетрудно убедиться непосредственной подстановкой. Однако это решение никак не поможет нам проинтегрировать уравнение (3.7). При попытке найти инвариант группы, заданной оператором

$$X = \xi\partial_x + \xi F\partial_y \qquad (3.9)$$

(чтобы использовать теорему 1.4 и привести исходное уравнение к автономному виду, что в данном случае дает разделение переменных) мы неизбежно приходим к уравнению в характеристиках

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{F(x, y)},$$

которое совпадает с исходным уравнением (3.7). Оператор (3.9) называется ***тривиальным***. Следующее утверждение устанавливает связь между допускаемой группой и интегрирующим множителем.

***Теорема* 1**. Уравнение

$$Q(x, y)dx - P(x, y)dy = 0 \tag{3.10}$$

допускает группу с оператором

$$X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y, \tag{3.11}$$

если и только если функция

$$\mu = \frac{1}{\xi Q - \eta P} \tag{3.12}$$

является интегрирующим множителем уравнения (3.10).

Доказательство. Уравнение (3.10) равносильно уравнению в частных производных первого порядка

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{3.13}$$

(будучи его уравнением в характеристиках) в том смысле, что левая часть всякого интеграла $F(x, y) = C$ уравнения (3.10) является решением уравнения (3.13), и обратно, всякое решение $F(x, y)$ уравнения (3.13), приравненное произвольной постоянной, дает интеграл уравнения (3.10). Пусть уравнение (3.10) допускает однопараметрическую группу преобразований (2.5) с оператором (3.11). Под действием этой группы всякое решение уравнения (3.1) снова переходит в решение. Но тогда всякий интеграл $F(x, y) = C$ переходит в интеграл $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{C}$, так что в силу формулы (1.4.10) интегралом будет также $XF = C_1$. Следовательно, наряду с $F(x, y)$ решением уравнения (3.13) является также XF. Но так как уравнение (3.13) может иметь только одно независимое решение, то существует функциональная зависимость $XF = = \Phi(F)$. Итак, функция $F(x, y)$ удовлетворяет одновременно двум условиям

$$P\frac{\partial F}{\partial x} + Q\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} = \Phi(F).$$

Отсюда, исключая пока из рассмотрения особый случай $\xi Q - \eta P = 0$, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{Q\Phi}{\xi Q - \eta P}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{P\Phi}{\xi Q - \eta P},$$

или

$$\frac{Qdx - Pdy}{\xi Q - \eta P} = \frac{\partial F}{\Phi(F)}. \tag{3.14}$$

Так как выражение в правой части (3.14) является полным дифференциалом, а приведенные рассуждения можно обратить, теорема доказана ■

<u>*Замечание*</u>. Особый случай $\xi Q - \eta P = 0$ соответствует тривиальному оператору (3.9). В этом легко убедиться, представив уравнение (3.10) в форме (3.7) и учитывая, что $\eta = \xi F$.

Суммируя полученные в данном параграфе результаты, приходим к следующему утверждению.

<u>***Теорема 2***</u>. Для уравнения (3.7) в общем случае оказываются эквивалентными следующие задачи:

а) отыскание общего решения;

б) отыскание допускаемой нетривиальной точечной группы Ли;

в) отыскание интегрирующего множителя;

г) отыскание максимальной допускаемой дискретной группы при $\varphi_x \cdot \varphi_y \cdot \psi_x \cdot \psi_y \neq 0$ ■

Таким образом оказывается, что поиск любого типа симметрии уравнения первого порядка приводит к необходимости отыскания общего решения, и наоборот. Однако это не означает, что групповой анализ уравнений первого порядка абсолютно неэффективен.

Еще С.Ли показал, что большинство известных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, казавшихся ранее искусственными и лишенными внутренней связи, могут быть выведены единообразно при помощи теории групп преобразований. Поэтому можно классифицировать все уравнения, интегрируемые в квадратурах или допускающие понижение порядка с помощью точечных преобразований.

Особенно просто решается ограниченная обратная задача — построение уравнения (любого порядка), допускающего заданную точечную группу Ли G. Для этого необходимо использовать теорему 1.7 о представлении инвариантных уравнений через инварианты. Так как всякая однопараметрическая группа преобразований на плоскости (x, y) имеет ровно один независимый инвариант, при продолжении группы на первую производную y' добавляется еще один инвариант, который с необходимостью будет зависеть от y' и поэтому называется ***дифференциальным инвариантом первого порядка***. Инвариант и дифференциальный инвариант первого порядка являются интегралами системы уравнений в характеристиках

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dy'}{\eta_x+(\eta_y-\xi_x)y'-\xi_y y'^2}. \qquad (3.15)$$

Если известны два независимых интеграла системы (3.15) $u(x, y) = C_1$ и $v(x, y, y') = C_2$, общий вид уравнения первого порядка, допускающего группу G с оператором $X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, будет

$$\Phi(u, v) = 0,$$

где Φ — произвольная функция своих аргументов. Заметим, что если инвариант $u(x, y)$ известен, поиск дифференциального инварианта первого порядка сводится в общем случае к решению уравнения Риккати. В приведенной ниже таблице указаны некоторые уравнения первого порядка и допускаемые или операторы.

Таблица 1.

Уравнение	**Оператор**	**Уравнение**	**Оператор**
$y'=F(y)$	$\frac{\partial}{\partial x}$	$xy'=y+F\left(\frac{y}{x}\right)$	$x^2\frac{\partial}{\partial x}+xy\frac{\partial}{\partial y}$
$y'=F(x)$	$\frac{\partial}{\partial y}$	$y'=\frac{y}{x+F(y/x)}$	$xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2\frac{\partial}{\partial y}$
$y'=F(kx+ly)$	$l\frac{\partial}{\partial x}-k\frac{\partial}{\partial y}$	$y'=\frac{y}{x+F(y)}$	$y\frac{\partial}{\partial x}$
$y'=\frac{y+xF(r)}{x-yF(r)}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$	$y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$	$xy'=y+F(x)$	$x\frac{\partial}{\partial y}$
$y'=F\left(\frac{y}{x}\right)$	$x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	$xy'=\frac{y}{\ln x+F(y)}$	$xy\frac{\partial}{\partial x}$
$y'=x^{k-1}F\left(\frac{y}{x^k}\right)$	$x\frac{\partial}{\partial x}+ky\frac{\partial}{\partial y}$	$xy'=y[\ln y+F(x)]$	$xy\frac{\partial}{\partial y}$
$xy'=F(xe^{-y})$	$x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$	$y'=P(x)y+Q(x)$	$e^{\int P(x)dx}\frac{\partial}{\partial y}$
$y'=yF(ye^{-x})$	$\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$	$y'=P(x)y+Q(x)y^n$	$y^n\, e^{(1-n)\int P(x)dx}\frac{\partial}{\partial y}$
$y'=\frac{y}{x}+xF\left(\frac{y}{x}\right)$	$\frac{\partial}{\partial x}+\frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}$	$y'=P(x)y$	$y\frac{\partial}{\partial y}$

§ 4. **Канонический оператор**.

В ряде случаев оказывается удобнее рассматривать не оператор (3.11), а эквивалентный ему на любом многообразии $[\,F\,]$ ***канонический*** оператор

$$\hat{X} = X - \xi D_x = [\eta(x, y) - y'\xi(x, y)]\partial_y = \hat{\eta}\,\partial_y. \qquad (4.1)$$

Подчеркнем еще раз: операторы X (3.11) и $\hat{X}$ (4.1) ***различны***, они эквивалентны на множестве дифференциальных уравнений в том смысле, что если уравнением (1.1) допускается оператор X, то им же допускается и оператор $\hat{X}$, и наоборот; отыскание координат оператора в “геометрической форме” ξ и η однозначно определяет координату канонического оператора $\hat{\eta}$, и наоборот.

Отметим ряд очевидных свойств оператора в канонической форме:

1. Инвариантом любого оператора (4.1) является $J_0 = x$ (что особенно наглядно подчеркивает различие операторов X и $\hat{X}$, если $\xi \neq 0$).

2. Каноническая координата любого точечного оператора есть ***линейная*** функция первой производной y'.

3. Формулы продолжения для оператора в канонической форме (и не обязательно точечного) записываются особенно просто:

$$\hat{\eta}_k = D_x^k\,\hat{\eta},$$

поэтому

$$\hat{X}_n = \sum_{k=0}^{n}\left(D_x^k\,\hat{\eta}\right)\partial_{y^{(k)}}. \qquad (4.2)$$

Если оператор задан в канонической форме (4.1), то условие инвариантности для уравнения

$$y^{(n)} = F\,[x, y^{(n-1)}\,] \qquad (4.3)$$

можно найти, выписав условие совместности уравнения (4.3) с уравнением Ли (оно одно, а не два, так как x — инвариант):

$$\frac{dy}{da} = \hat{\eta}(x, y, y'). \qquad (4.4)$$

Условие совместности имеет вид

$$\frac{d}{da}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{d}{dx^n}\left(\frac{dy}{da}\right) \equiv D_x^n\left(\frac{dy}{da}\right), \qquad (4.5)$$

или, с учетом (4.3) и (4.4)

$$D_x^n \hat{\eta} - F_y \hat{\eta} - F_{y'} D_x \hat{\eta} - \ldots - F_{y^{(n-1)}} D_x^{n-1} \hat{\eta} \Big|_{(4.3)} = 0, \qquad (4.6)$$

так как

$$\frac{dF}{da} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{da} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{da} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{da} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}\frac{dy^{(n-1)}}{da},$$

и $\dfrac{dx}{da} = 0$ (x — инвариант!). Естественно, для точечных операторов применение формулы (4.5) приводит к определяющему уравнению, идентичному полученному из обычного условия инвариантности

$$\underset{n}{X}\,(y^{(n)} - F\,[x, y^{(n-1)}])\Big|_{(4.3)} = 0 \qquad (4.6)$$

Формула (4.5) особенно удобна в случаях, когда ищутся высшие симметрии ($\hat{\eta}$ зависит от y' нелинейно, либо зависит от y'' или даже от нелокальных переменных, хотя в последнем случае возникают некоторые нюансы с эквивалентностью канонической и “геометрической” форм), или если расчеты ведутся на ЭВМ с использованием аналитических систем вычислений.

В заключение этого параграфа приведем одну очень полезную формулу. Пусть $\hat{X} = \hat{\eta}\partial_x$ — некоторый (не обязательно точечный) канонический оператор. Подстановка (преобразование Беклунда)

$$t = \varphi(x, y, \ldots, y^{(k)}), \qquad u = \Phi(x, y, \ldots, y^{(k)})$$

переводит его снова в канонический оператор $\hat{Y} = \hat{\xi}\partial_u$, где

$$\hat{\xi} = \left(\Phi_* - \frac{D_x \Phi}{D_x \varphi}\varphi_*\right)\hat{\eta}, \qquad (4.7)$$

Φ_* и φ_* — производные Фреше

$$\Phi_* = \partial_y \Phi + (\partial_{y'}\Phi)D_x + (\partial_{y''}\Phi)(D_x)^2 + \ldots$$

$$\varphi_* = \partial_y \varphi + (\partial_{y'}\varphi)D_x + (\partial_{y''}\varphi)(D_x)^2 + \ldots$$

Очевидно, что в конечной формуле (4.7) переменные $x, y, y', \ldots$ надо выразить через $t, u, \dot{u}, \ldots$. Формула (4.7) справедлива и для нелокальных операторов (в канонической форме) и нелокальных преобразований.

И еще одно замечание. Запишем тривиальный оператор (3.9) в канонической форме, получим

$$\hat{X} = (\xi F - y'\xi)\partial_y \equiv \xi\,[\,F(x, y) - y'\,]\partial_y,$$

т.е. на многообразии $[\,F\,]$ $\hat{X} = 0\cdot\partial_y$. Таким образом, тривиальный оператор в “геометрической” форме соответствует ***нулевому*** каноническому оператору, т.е. по существу, отсутствию допускаемого оператора. Поэтому неудивительно, что тривиальное решение $\eta = \xi F$ определяющего уравнения (3.8) не дает нам никакой дополнительной информации.

§ 5. Уравнение Риккати. Группы эквивалентности.

Общим уравнением Риккати называется уравнение первого порядка, принадлежащее классу уравнений с трехфункциональным произволом (обычно предполагается отсутствие вырождения, т.е. f_0, $f_2 \neq\neq 0$)

$$y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x). \tag{5.1}$$

Теорема 3. Класс (5.1) допускает непрерывную группу эквивалентности по произвольным элементам $f_2(x)$, $f_1(x)$, $f_0(x)$ и подходящим линейным преобразованием

$$y = \alpha(x)u + \beta(x), \qquad x = \gamma(t) \tag{5.2}$$

приводится к ***канонической форме***

$$\dot{u} = u^2 + F(t). \tag{5.3}$$

Доказательство. Так как при поиске группы эквивалентности накладывается требование инвариантности ***класса***, под действием преобразований группы будут изменяться и произвольные элементы $f_2(x)$, $f_1(x)$, $f_0(x)$. Однако они не являются дифференциальными переменными, и на них не требуется продолжение оператора. Поэтому оператор группы эквивалентности следует искать в виде

$$X_{\mathrm{eq}} = \underset{1}{X} + \varphi_2\partial_{f_2} + \varphi_1\partial_{f_1} + \varphi_0\partial_{f_0}. \tag{5.4}$$

Действие оператора (5.4) на многообразии (5.1) приводит к определяющему уравнению

$$\xi(f_2'y^2 + f_1'y + f_0') + \eta(2f_2y + f_1) + \xi_y(f_2y^2 + f_1y + f_0)^2 +$$
$$+ (\xi_x - \eta_y)(f_2y^2 + f_1y + f_0) - \eta_y + \varphi_2y^2 + \varphi_1y + \varphi_0 = 0. \tag{5.5}$$

Коэффициенты при φ_i $(i = 0, 1, 2)$ содержат y в степени не выше второй. Потребуем, чтобы левая часть выражения (5.5) была квадратичной функцией y. Для этого необходимо положить

$$\xi_y = 0, \qquad \eta = a(x)y + b(x). \tag{5.6}$$

Подставляя $\xi = \xi(x)$ и η из (5.6) в определяющее уравнение (5.5), находим, что квадратичная по y функция с коэффициентами, зависящими только от x, равна нулю. Так как в операторе (5.4) x и y — независимые переменные, равенство полинома нулю возможно лишь в случае равенства нулю коэффициентов этого полинома. Это рассуждение лежит в основе ***расщепления*** определяющего уравнения по степеням независимой переменной до ***определяющей системы***, которая в данном случае состоит из трех уравнений

$$\begin{cases} \xi f_2' + (\xi' + a) f_2 + \varphi_2 = 0, \\ \xi f_1' + \xi' f_1 + 2b f_2 - a' + \varphi_1 = 0, \\ \xi f_0' + (\xi' - a) f_0 + b f_1 - b' + \varphi_0 = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Из системы (5.7) легко выражаются координаты оператора (5.4), ответственные за преобразование эквивалентности — $\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0$, причем тоже с трехфункциональным произволом (ξ, a, b). Заметим в скобках, что невозможность исследования уравнения (3.7) в общем виде с помощью определяющего уравнения (3.8) вытекает из отсутствия в последнем независимых переменных в явном виде, по которым можно было бы расщепить это уравнение — требуется конкретизация зависимости хотя бы от одной переменной (например, y) ***всех*** независимых функций — ξ, η, F.

Доказав существование непрерывной группы эквивалентности и установив, учитывая структуру подстановки в виде (5.2), мы можем не решать соответствующие уравнения Ли, а просто последовательно выполнить подстановку (5.2). Заменяя по этой формуле y в (5.1), получим

$$\dot u = \alpha f_2 u^2 + \left(2\beta f_2 + f_1 - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)u + \frac{1}{\alpha}(\beta^2 f_2 + \beta f_1 + f_0 - \beta'). \tag{5.8}$$

Из уравнения (5.8) следует:

1. Если $\beta(x)$ — частное решение исходного уравнения, то подстановка (5.2) сводит уравнение Риккати (5.1) к уравнению Бернулли.

2. Никакая подстановка (5.2) не обращает в нуль коэффициент при u^2.

3. Коэффициент при u обращается в нуль двумя независимыми способами:

а) при $\beta = 0$, $\alpha = \exp \int f_1(x)\, dx$ $\qquad \dot u = \alpha f_2 u^2 + \dfrac{f_0}{\alpha}$, и подстановка $t = \int \alpha(x) f_2(x)\, dx$ приводит его к канонической форме (5.3) с

$$F(t) = \frac{f_0}{\alpha^2 f_2}, \tag{5.9}$$

где α, f_0 и f_2 должны быть выражены как функции t;

б) при $\alpha = 1,\ \beta = -\dfrac{f_1}{2f_2}$ $\qquad \dot{u} = f_2 u^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f_1}{f_2}\right)' - \dfrac{f_1^2}{4f_2} + f_0,$

и подстановка $t = \int f_2(x) dx$ приводит его к канонической форме (5.3) с

$$F(t) = \frac{1}{2f_2}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)' - \frac{f_1^2}{4f_2} + \frac{f_0}{f_2}, \tag{5.10}$$

где f_0 ,f_1 и f_2 должны быть выражены как функции t ■

<u>*Замечание*</u> 1. Существование двух различных способов приведения уравнения (5.1) говорит о том, что уравнение (5.1) допускает два различных оператора группы эквивалентности X_{eq1} и X_{eq2} , а на множестве уравнений Риккати в канонической форме (5.3) задана дискретная группа преобразований (эквивалентности), переводящая уравнение с правой частью (5.9) в такое же с правой частью (5.10).

<u>*Замечание*</u> 2. Очевидно, что при

$$f_0 = \frac{f_1^2}{4f_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'$$

исходное уравнение интегрируется в квадратурах, так как при этом $F(t) = 0$ из формулы (5.10).

<u>*Замечание*</u> 3. Приведенная теорема — не что иное, как теоретико-групповое обоснование логики эмпирических методов: подбираются преобразования, которые не “портят” уравнение, т.е. не приводят его к заведомо более сложному уравнению. Очевидно, для уравнения (3.7) с правой частью, являющейся полиномом по переменной y (а к этому типу относится и уравнение Риккати) таким преобразованием будет линейное (5.2) и, в ряде случаев — дробно-линейное.

<u>***Теорема* 4**</u>. Множество обратимых дробно-линейных преобразований образует группу эквивалентности на классе уравнений Риккати.

<u>*Доказательство*</u>. Легко проверить, что множество дробно-линейных преобразований

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\delta(x)z + \gamma(x)} \tag{5.11}$$

образует группу, если $\alpha\gamma \neq \beta\delta$ (условие обратимости). Мы будем рассматривать преобразования (5.11), не вырождающиеся в линейные, поэтому положим $\delta(x) \equiv 1$. Уравнение Риккати для сокращения выкладок возьмем в канонической форме (5.3), т.е. в виде

$$y' = y^2 + F(x). \qquad (5.12)$$

Замена переменных (5.11) приводит уравнение (5.12) к общей форме (5.1), а именно,

$$z' = \frac{F + \alpha^2 - \alpha'}{\alpha\gamma - \beta} z^2 + \frac{2(\alpha\beta + \gamma F) + \alpha\gamma' - \alpha'\gamma - \beta'}{\alpha\gamma - \beta} z + \frac{\beta^2 + \gamma^2 F + \beta\gamma' - \beta'\gamma}{\alpha\gamma - \beta}. \qquad (5.13)$$

Из уравнения (5.13) следует:

1. Если $\alpha(x)$ — частное решение исходного уравнения, то подстановка (5.11) сводит уравнение Риккати (5.12) к линейному уравнению первого порядка.

2. Если β/γ — частное решение исходного уравнения, то подстановка (5.11) сводит уравнение Риккати (5.12) к уравнению Бернулли.

Пусть $\alpha(x)$ не является частным решением рассматриваемого уравнения . Тогда положим

$$\beta' = 2(\alpha\beta + \gamma F) + \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \qquad (5.14)$$

(если α — частное решение, то условие (5.14) приводит к необратимости преобразования (5.11), так как тогда $\beta = \alpha\gamma$). Относительно $\beta(x)$ условие (5.14) является линейным уравнением первого порядка, которое всегда решается в квадратурах. Выполнив далее подстановку

$$t = \int \frac{\alpha^2 - \alpha' + F}{\alpha\beta - \gamma} dx \ ,$$

получим преобразованное уравнение Риккати в канонической форме

$$z' = z^2 + \widetilde{F}(t) \ \blacksquare$$

§6. <u>Существенные произвольные элементы. Специальное уравнение Риккати</u>.

<u>Определение</u>* <u>5</u>**. Произвольный элемент класса уравнений (1.3) называется ***существенным , если класс (1.3) не допускает по этому элементу непрерывной группы эквивалентности, и ***несущественным*** в противном случае.

Очевидно, в общем уравнении Риккати (5.1) из трех произвольных элементов (функций f_2, f_1, f_0) существенным является только один. Рассмотрим трехпараметрический подкласс (5.1) — ***специальное уравнение Риккати*** вида

$$y' + Ay^2 = Bx^n. \qquad (6.1)$$

Теорема 5. Параметры A и B класса уравнений (6.1) являются несущественными.

Доказательство. Будем искать оператор группы эквивалентности, допускаемый уравнением (6.1), в виде

$$X_{\mathrm{eq}} = \xi\partial_x + \eta\partial_y + [\eta_x + (\eta_y - \xi_x)y' - \xi_y y'^2]\partial_{y'} + \alpha\partial_A + \beta\partial_B. \qquad (6.2)$$

Действуя оператором (6.2) на уравнение (6.1), получим определяющее уравнение

$$2A\eta y - Bn\xi x^{n-1} + \eta_x + (\eta_y - \xi_x)(Bx^n - Ay^2) - \xi_y(Bx^n - Ay^2)^2 + \\ + \alpha y^2 - \beta x^n = 0.$$

Следуя идее доказательства теоремы 4, положим $\xi = \xi(x)$, $\eta = a(x)y +$ + $b(x)$; расщепляя определяющее уравнение по степеням y, приходим к определяющей системе из трех уравнений

$$\begin{cases} (\alpha + \xi')A + \alpha = 0\ , \\ 2Ab + a' = 0\ , \\ Bx^n(a - \xi') - Bn\xi x^{n-1} + b' - \beta x^n = 0\ . \end{cases} \qquad (6.3)$$

Из первого уравнения системы $\alpha = -(a + \xi')A$. Так как a и ξ' — функции только переменной x , и в уравнение Ли для α не входит B, можно найти конечное преобразование для A отдельно от других переменных:

$$\tilde{A} = Ae^{-(a + \xi')\tau},$$

откуда следует, что $a + \xi' = \mathrm{const}$, так как A и $\tilde{A}$ — константы. Пусть a $= \lambda - \xi'$, тогда оставшиеся два уравнения системы (6.3) запишутся в виде

$$2Ab = \xi'', \quad b' - Bn\xi x^{n-1} + B(\lambda - 2\xi')x^n - \beta x^n = 0,$$

тогда

$$b = \frac{1}{2A}\xi'', \quad \beta = B(\lambda - 2\xi' - nx^{-1}\xi) + \frac{1}{2A}x^{-n}\xi'''.$$

По-прежнему предполагается, что ξ зависит только от переменной x (а не от A и B), а β — только от переменных A и B (но не от x, так как константы A и B при преобразовании должны переходить в ***константы*** $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$), приходим к выводу, что

$$\lambda - 2\xi' - nx^{-1}\xi = \mu, \qquad x^{-n}\xi''' = \rho,$$

причем μ и ρ не зависят от x. Из первого условия следует, что

$$\xi = \begin{cases} \nu x^{-n/2} + \dfrac{\lambda - \mu}{n+2} x, & n \neq -2; \\ x\left(\nu + \dfrac{\lambda - \mu}{2} \ln x\right), & n = -2, \end{cases}$$

где ν — произвольная постоянная. Рассмотрим сначала случай $n \neq \neq -2$. Тогда

$$x^{-n}\xi''' = -\frac{\nu n(n+2)(n+4)}{8} x^{-\frac{3(n+2)}{2}} = \rho. \tag{6.4}$$

Равенство (6.4) выполняется, если и только если: а) $n = 0$; б) $n = -4$; в) $\nu = 0$, n — произвольное (в первых двух случаях ν произвольно, и во всех трех $\rho = 0$). В результате, если $n \neq 0, -4$, получаем (после умножения на $n + 2$)

$$X_{\text{eq}} = (\lambda - \mu)x\partial_x + [\lambda(n + 1) + \mu]y\partial_y - \lambda(n + 2)A\partial_A + \mu(n + 2)B\partial_B. \tag{6.5}$$

Переобозначая произвольные константы μ и λ следующим образом:

$$\lambda(n + 2) = \alpha + \beta, \qquad \mu(n + 2) = \beta - (n + 1)\alpha$$

и положив сначала $\alpha = 1$, $\beta = 0$, а затем $\alpha = 0$, $\beta = 1$, получим два оператора

$$X_{\text{eq}1} = x\partial_x - A\partial_A - (n + 1)B\partial_B, \quad X_{\text{eq}2} = y\partial_y - A\partial_A + B\partial_B. \tag{6.6}$$

При $n = 0$ появляется еще одна произвольная константа ν, поэтому к двум операторам (6.6) (взятым, естественно, при $n = 0$) добавляется третий — оператор переноса по независимой переменной x

$$X_3 = \partial_x. \tag{6.7}$$

Совершенно аналогично, при $n = -4$ к двум операторам (6.6) добавляется оператор проективной группы

$$X_3 = x^2\partial_x - 2xy\partial_y. \tag{6.8}$$

Наконец, при $n = -2$ находим тоже три оператора

$$X_{\text{eq}1} = x \ln x\, \partial_x + \left[(1 - \ln x)y + \frac{1}{2A} x^{-1}\right]\partial_y - 2A\partial_A - \frac{1}{2A}\partial_B,$$

$$X_{\text{eq2}} = -x \ln x\, \partial_x + \left[(1 + \ln x) y - \frac{1}{2A} x^{-1} \right] \partial_y + \left(2B + \frac{1}{2A} \right) \partial_B,$$

$$X_3 = x\partial_x - y\partial_y \ \blacksquare$$

Замечание 1. Вообще говоря, группы эквивалентности искать проще, чем группы инвариантности. Однако заметим, что при доказательстве теорем 4, 5 мы не ставили целью поиск ***всех*** групп эквивалентности. Нам надо было лишь показать, что число независимых допускаемых операторов не меньше числа несущественных произвольных элементов исследуемого класса уравнений. Поэтому мы приняли анзац (5.6) (немецк. Ansatz — подход, исходная идея), позволивший расщепить определяющее уравнение. По существу, поиск ***точечных*** преобразований сам по себе является анзацем, так как точечные преобразования являются частным случаем более общих преобразований, которые зависят не только от координат x, y, но и от производных $y', y'', \ldots$ и даже от нелокальных переменных.

Замечание 2. Помимо операторов эквивалентности, оказались найденными и операторы X_3 групп инвариантности (6.7)-(6.9). Поэтому уравнение (6.1) при $n = 0, -2, -4$ интегрируются в квадратурах (что для первого случая очевидно в силу автономности).

Замечание 3. Выше (например, при переходе от оператора (6.5) к операторам (6.6)) мы воспользовались тем достаточно очевидным фактом, что если некоторое уравнение допускает оператор $X = C_1X_1 + + C_2X_2$, где C_1 , C_2 — произвольные константы, не входящие в уравнение, то оно допускает и каждый из операторов X_1 и X_2 в отдельности, и наоборот. Если известны ***все*** решения определяющей системы, то соответствующие им операторы образуют ***алгебру Ли***. Далее мы подробно рассмотрим свойства алгебр Ли, а пока отметим, что при $n = -2$ допускается и второй оператор (6.6), так как

$$y\partial_y - A\partial_A + B\partial_B = \frac{1}{2}(X_{\text{eq1}} + X_{\text{eq2}}).$$

§7. Дискретная группа Лиувилля специального уравнения Риккати.

Воспользуемся теоремой 4 и найдем группу дробно-линейных преобразований специального уравнения Риккати (6.1). Так как произвольный элемент этого класса уравнений является степенной функцией, логично рассмотреть подкласс преобразований (5.11) вида

$$y = \frac{ax^k z + bx^s}{z + cx^r}\ . \tag{7.1}$$

Замена переменных (7.1) приводит уравнение (6.1) к виду

$$(acx^{k+r} - bx^s)z' + (akx^{k-1} + Aa^2x^{2k} - Bx^n)z^2 + \{c[a(k-r)x^{k-1} - 2Bx^n]x^r +$$

$$+ b(sx^{-1} + 2Aax^k)x^s\}z = Bc^2x^{n+2r} - bc(s-r)x^{r+s-1} - Ab^2x^{2s}. \tag{7.2}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты при всех слагаемых z', z^2, z^0 имели вид степенных функций $C_i x^{\alpha_i}$, а коэффициент при z^1 обратился в нуль. Для этого необходимо, чтобы каждый коэффициент состоял из подобных слагаемых. Рассмотрим коэффициент при z^2. Очевидно, что $k - 1 = 2k$, т.е. $k = -1$. В силу того, что $B \neq 0$ и n произвольно, необходимо, чтобы $akx^{k-1} + Aa^2x^{2k} = 0$, т.е. $a = 1/A$. Тогда коэффициент при z^1 будет

$$b(s+2)x^{s-1} - c\left(\frac{r+1}{A}x^{-2} + 2Bx^n\right)x^r = 0.$$

Аналогично, так как n произвольно, $c = 0$ и $s = -2$. Полагая для простоты $b = 1$, окончательно приходим к преобразованию

$$y = \frac{1}{x^2 z} + \frac{1}{Ax}, \tag{7.3}$$

которое переводит уравнение (6.1) в уравнение

$$z' + Bx^{n+2}z^2 = Ax^{-2};$$

очевидной заменой

$$x^{n+3} = t \tag{7.4}$$

оно приводится к исходному виду

$$\dot{z} + \frac{B}{n+3}z^2 = \frac{A}{n+3}t^{-\frac{n+4}{n+3}}$$

или (с учетом несущественности коэффициентов A, B в силу теоремы 5)

$$\dot{z} + A_1 z^2 = B_1 t^{\nu},$$

где

$$\nu = -\frac{n+4}{n+3}\ . \tag{7.5}$$

Таким образом, мы построили дискретное преобразование эквивалентности на классе уравнений (6.1).

<u>Теорема 6</u>. Преобразование (7.3), (7.4) задает дискретную группу эквивалентности на классе специальных уравнений Риккати, имеющую строение бесконечной циклической группы C_∞, если

$$n \neq -\frac{2k+1}{k},$$

где k — любое целое число, не равное нулю.

<u>Доказательство</u>. Если множество преобразований (7.3), (7.4) образует группу, то она будет циклической, так как преобразование (7.3), (7.4) задает единственную образующую a, действующую на свободный элемент — параметр n — по формуле (7.5):

$$\mathrm{a}:\ n \to -\frac{n+4}{n+3}\,. \tag{7.6}$$

Нетрудно вычислить, что

$$\mathrm{a}^k:\ n \to -\frac{2k(n+2)-n}{k(n+2)+1} \tag{7.7}$$

для любого целого k (как положительного, так и отрицательного; $k = -1$ соответствует преобразованию, обратному (7.3)-(7.5)). Из формулы (7.7) следует:

1) при

$$n = -2 - \frac{1}{k} \tag{7.8}$$

преобразование (7.3), (7.4) на k-ом шаге теряет смысл (исчезает обратимость (7.4)). Точка $n = -2$ является точкой сгущения этих “сингулярностей”, причем при $n = -2$ $\mathrm{a}^k = E$ при любом целом k;

2) при любом целом k $\mathrm{a}^k \neq E$ для $n \neq -2$ и n, не удовлетворяющих формуле (7.8). Аксиомы группы в этом случае легко проверяются непосредственно ■

<u>Теорема 7</u> *(Ж. Лиувилль)*. Специальное уравнение Риккати (6.1) интегрируется в квадратурах, если и только если

$$n = -\frac{4k}{2k+1}, \tag{7.9}$$

где k — любое целое число.

<u>Доказательство</u> мы опустим, заметив лишь, что в оригинальной работе Ж.Лиувилля была ошибка, которую обнаружил и впоследствии исправил итальянский математик А.Дженноки.

Легко видеть, что все интегрируемые в квадратурах случаи специального уравнения Риккати получаются применением теоремы 6 к единственному случаю $n = 0$ (замечание 2 к теореме 5); остальные указанные там случаи соответствуют $k = -1$ $(n = -4)$ и (формально) $k \to \infty$ $(n = -2)$ ■

Теорема 8. Бесконечная циклическая группа C_∞, заданная образующей (7.6), максимальна на классе специальных уравнений Риккати при $\varphi_y = 0$ в (2.2).

Доказательство от противного. Пусть существует дискретная группа H, допускаемая классом уравнений (6.1), и пусть b — одна из ее образующих, действующая на произвольный элемент n по формуле

$$\mathrm{b}\colon\ n \to b(n) \neq -\frac{2k(n+2)-n}{k(n+2)+1}\ .$$

Тогда, подставляя в эту формулу значение $n = 0$, находим по меньшей мере одно значение показателя, при котором уравнение (6.1) интегрируется в квадратурах и которое не содержится в формуле (7.9), что противоречит теореме Лиувилля ■

Покажем теперь, что пополнение класса (6.1) всего одним уравнением позволяет снять ограничение в формулировке теоремы 6 (при соответствующем обобщении преобразования (7.4)). При $n = -3$ промежуточное уравнение имеет вид

$$z' + Bx^{-1}z^2 = Ax^{-2},$$

поэтому для приведения его к канонической форме с постоянным коэффициентом при z^2 необходимо положить

$$\ln x = t, \tag{7.10}$$

в результате чего получим

$$\dot{z} + Bz^2 = Ae^{-t} \tag{7.11}$$

(знак в показателе экспоненты — несущественный). Таким образом, как только в орбите появляется значение показателя $n = -3$, необходимо заменить преобразование (7.4) на (7.10), а уравнение (6.1) на (7.11). Нетрудно показать, что для перехода к следующему элементу орбиты нужно выполнить подстановку

$$z = -\frac{1}{w}\ , \qquad \tau = e^{-t}, \tag{7.12}$$

в результате чего получим уравнение $w' + Aw^2 = B\tau^{-1}$, с показателем $n = -1$ в полном соответствии с формулой (7.7) при $k = 2$, $n = -3$.

Таким образом, пополнение класса (6.1) уравнением (7.11) (“предельным случаем” при $n \to \infty$) и соответствующее пополнение множества преобразований элементами (7.10), (7.12) приводит к тому, что формально определенная группа C_∞ действует на всем классе (6.1), (7.11) без каких-либо ограничений и “дефектов”.

Однако следует заметить, что свойства найденной группы в достаточной степени необычны и во многом определяются замкнутостью на выбранном классе уравнений. Оказывается, что параметры преобразования (и даже сам вид преобразования) существенно зависят от элемента класса уравнений, на который преобразование действует. Нетрудно представить себе ситуацию (и как мы увидим в дальнейшем, она довольно часто возникает), когда преобразование определено не на всех элементах выбранного класса уравнений (указанные выше сингулярные точки — лишь частный случай возможных “дефектов”) и когда в силу зависимости элементов преобразования от существенных произвольных элементов класса уравнений суперпозиция преобразований будет неассоциативна.

В конечном итоге нас интересуют ***симметрии классов уравнений***, поэтому алгебраическая структура множеств преобразований играет подчиненную роль. Естественными требованиями к множествам преобразований являются: а) наличие единицы (тождественного преобразования) и б) обратимость любого преобразования множества. Требование алгебраической полноты заменяется требованием замкнутости действия на выбранном классе уравнений. С учетом этого и формулируются основные определения дискретно-группового анализа.

§8. <u>Дискретные метагруппы преобразований</u>.

Для определенности будем считать, что преобразования заданы в виде формальных подстановок

$$g_i = \left\{x = \varphi_i\left(t,\ u,\ \dot u,\ \dots\ ,\ \int u dt,\ \dots\right),\ \ y = \psi_i\left(t,\ u,\ \dot u,\ \dots\ ,\ \int u dt,\ \dots\right)\right\}, \quad (8.1)$$

каждая из которых обратима, и действуют в соответствующим образом продолженном пространстве (в том числе и на нелокальные переменные). Вообще нелокальные переменные можно формально определить как отрицательные степени оператора полной производной (2.1). В литературе “чистые” отрицательные степени, например,

$$\int u\,dt \equiv D_t^{-1} u$$

носят название ***квазилокальных*** переменных, а нелокальными называются обычно переменные с более сложными подинтегральными выражениями, не сводящиеся к комбинации локальных и квазилокальных, например,

$$\int \dot u^2 dt \equiv D_t^{-1}\left(\dot u^2\right), \qquad \text{но не} \quad \int \left(u\dot u + u\right)dt \equiv \frac{u^2}{2} + D_t^{-1} u .$$

Известно, что множество обратимых абстрактных преобразований (8.1) образует группу по операции суперпозиции. Деформация, “дефектность” групповой структуры происходит лишь при наложении требования замкнутости действия группы преобразований на определенном классе объектов.

<u>Определение 6</u>. Бинарная операция, заданная на множестве M, называется ***частичной***, если она определена (замкнута в M) не для всех пар $a, b \in M$.

<u>Определение 7</u>. Множество M с определенной на нем частичной бинарной операцией называется ***частичным (или неполным) группоидом***.

<u>Определение 8</u>. Частичный группоид, содержащий совпадаю-щую левую и правую единицы, общие для всех элементов группоида, и для любого элемента — совпадающие левый и правый обратные, называется ***метагруппой***.

Таким образом , метагруппа отличается от группы тем, что в ней могут не выполняться аксиомы алгебраической полноты и ассоциативности; группа является частным случаем метагруппы.

Обозначим класс уравнений (1.3) символом $D(\bar{a})$, если $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, и $D(\bar{f})$, если произвольный элемент класса (1.3) представляет собой вектор-функцию $\bar{f}$.

<u>Определение 9</u>. Пусть заданы два класса уравнений D_1 и D_2. Преобразование

$$g: \quad D_1(\bar{a}) \to D_2(\bar{\alpha}(\bar{a})) \tag{8.2}$$

определяет ***отображение*** класса D_1 в класс D_2.

Например, преобразование

$$g: \; y = -\frac{u'}{u}$$

отображает класс уравнений Риккати (5.12) в класс линейных уравнений второго порядка в канонической форме

$$u'' + F(x)u = 0,$$

при этом $\alpha(F) = F$.

<u>Определение 10</u>. Любое множество М обратимых преобразований g_i (8.1), отображающих класс D в себя

$$g_i: \quad D(\bar{a}) \to D(\bar{b}_i) \tag{8.3}$$

называется ***дискретной метагруппой преобразований*** (ДМП) М, допускаемой классом D.

Замечание 1. Легко видеть, что по определению 10 ДМП является метагруппой эквивалентности.

Замечание 2. Определение 10 включает любые преобразования, обладающие указанным свойством, независимо от области определения каждого отдельного преобразования (которое может действовать на всем классе D, на его подмножестве и даже на одном элементе). Поэтому в определении 10 заложена возможность того, что групповая операция (композиция преобразований) может быть частичной.

Замечание 3. В определении 10 не предполагается, что преобразования g_i не зависят от компонент векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}_i$.

Формула (8.3) определяет ***действие*** преобразования g_i : каждый элемент ДМП $g_i \in$ М переводит элемент $D(\bar{a})$ класса D в некоторый элемент $D(\bar{b}_i)$ того же класса.

Определение 11. Множество уравнений $\{D(\bar{b}_i)\}$, порожденное действием всевозможных преобразований $g_i \in$ М на фиксированный элемент $D(\bar{a})$ или на подкласс $D_1 \subset D$, называется ***орбитой*** элемента $D(\bar{a})$ или подкласса D_1 и обозначается М$D(\bar{a})$ или, соответственно, МD_1.

Возникающие при исследовании конкретных классов дифференциальных уравнений множества преобразований могут иметь самое различное строение — от метагруппы до классической группы. Поэтому необходимо ввести определения промежуточных между метагруппой и группой структур.

Определение 12. Группоид, содержащий совпадающие левую и правую единицы, общие для всех элементов группоида, и для любого элемента совпадающие левый и правый обратные, называется ***парагруппой***.

Таким образом, парагруппа — метагруппа, в которой выполняется аксиома алгебраической полноты.

Определение 13. Ассоциативная метагруппа называется ***псевдогруппой***.

В литературе встречается также термин "неполная группа"; для различных неассоциативных объектов в первой половине XX века использовались понятия группоида Брандта и обобщенной группы.

Оказывается, что уже на уровне самых общих определений можно конкретизировать ряд свойств ДМП в зависимости от области определения и структуры ***функционального представления*** преобразований (8.1).

Определение 14. ДМП М , действие каждого элемента которой определено на всем классе D (за исключением, быть может, некоторого множества меры нуль), называется ***основной***.

Определение 15. Если любое преобразование $g_i \in$ М определено функциональным представлением (8.1), не содержащим в явном виде компонент вектора параметров исходного и преобразованных уравнений (т.е. не содержащим произвольного элемента), ДМП М называется ***независимой***.

<u>Теорема 9</u>. Основная ДМП алгебраически замкнута (т.е. может иметь строение либо классической группы, либо парагруппы) ■

<u>Теорема 10</u>. Независимая ДМП ассоциативна (т.е. может иметь строение либо классической группы, либо псевдогруппы) ■

Совершенно очевидно, что использование функционального представления преобразований (8.1) метагруппы неудобно, так как во-первых, само по себе преобразование (8.1) может иметь весьма сложный и громоздкий вид, а во-вторых, в ДМП, не являющихся независимыми, каждому элементу $D(\overline{a}) \subset D$ может соответствовать свое преобразование $g_i(\overline{a})$, т.е. при $\overline{a} \neq \overline{b}$ может быть $g_i(\overline{a}) \neq g_i(\overline{b})$. Поэтому перейдем от функционального представления к действию на произвольный элемент.

<u>Определение 16</u>. Множество уравнений

$$\{\ \overline{b}_i = F_i(\overline{a})\ \}, \tag{8.4}$$

индуцированное действиями преобразований $g_i \in$ М, называется ***алгебраическим представлением*** ДМП М.

Однозначное соответствие (8.3) → (8.4), т.е.

$$\Omega:\ \{\ g_i\ \} \to \{\ F_k\ \} \tag{8.5}$$

является основой ***прогнозирования*** свойств уравнений: для построения любой орбиты достаточно воспользоваться простыми алгебраическими соотношениями (8.4) вместо последовательного и трудоемкого выполнения подстановок (8.1), которые, как уже указывалось, могут иметь гораздо более сложную природу, чем точечные преобразования (2.2).

Очевидно, различным преобразованиям g_i, g_j может соответствовать одна и та же функция F_i $(F_i = F_j)$ — этим и объясняется употребление другого индекса (k) в формуле (8.5) для обозначения множества $\{\ F_k\ \}$. Преобразования, имеющие совпадающие алгебраические представления, ***алгебраически отождествляются***. Пусть $\{\ F_k\ \}$ — множество, состоящее из всех различных алгебраических представлений ДМП М. Тогда среди них можно выбрать s независимых, удовлетворяющих определению 1.8 и составляющих ***базис образующих*** ДМП М. Образующая ДМП может представлять собой целое множество различных преобразований (и даже различной природы), действующих на различные (не обязательно на все) элементы класса D, но изменяющих произвольный элемент класса D ***по единому закону***. В дальнейшем мы будем считать, что функция F_i является алгебраическим представлением образующей g_i. На образующие ДМП естественно переносятся понятия определяющих соотношений (определение 1.10), кода (§1.3), действия, орбиты (определение 11). По аналогии определяются понятия основной и независимой образующих. Необходимо лишь специально оговаривать дополнительные условия, связанные с “дефектами” строения.

Напомним еще раз, что всякая ДМП, допускаемая классом D, является некоторым подмножеством множества преобразований (8.1), и возможная “дефектность” ее строения определяется двумя факторами:

1. Замкнутость на выбранном классе D, порождающая частичность бинарной операции: некоторые преобразования замкнуты (а следовательно, и определены) только на подклассах $D_i \subset D$ и не определены на элементах множеств $D \setminus D_i$.

2. Зависимость функционального представления (8.1) образующей g_i от элемента, на который она действует, порождающая возможную неассоциативность.

Запишем преобразование (8.1), определяющее образующую g_i, в виде

$$\overline{u} = \Phi_i(\overline{x}), \tag{8.6}$$

где $\overline{x}$ — вектор исходных переменных, $\overline{u}$ — вектор преобразованных переменных.

***Определение* 17**. Наименьшее число γ такое, что функция Φ_i (8.6) удовлетворяет тождеству

$$\underbrace{\Phi_i(\Phi_i(\ldots \Phi_i}_{\gamma}(\overline{x}) \ldots)) \equiv \overline{x},$$

называется ***функциональным порядком*** образующей g_i и обозначается символом $\mathrm{Deg}\, g_i$.

Замечание. Для зависимых образующих функциональный порядок не всегда определяется однозначно. В этом случае мы полагаем

$$\mathrm{Deg}\, g_i = \max_{D} \{\mathrm{Deg}\, g_{ij}\},$$

где $\mathrm{Deg}\, g_{ij}$ — функциональные порядки всех преобразований g_{ij}, имеющих алгебраическое представление F_i.

***Определение* 18**. Наименьшее число σ такое, что функция F_i удовлетворяет тождеству

$$\underbrace{F_i(F_i(\ldots F_i}_{\sigma}(\overline{a}) \ldots)) \equiv \overline{a},$$

называется ***алгебраическим порядком*** (или просто ***порядком***) образующей g_i и обозначается символом $\deg g_i$.

Очевидно, $\mathrm{Deg}\, g_i$ является “абстрактным” порядком, не связанным с конкретным классом уравнений. Например, для любого преобразования

Беклунда с конечным порядком старшей производной $\mathrm{Deg}\ g_i = \infty$, так как последовательное применение такого преобразования ведет к неограниченному росту порядка старшей производной. Если же преобразование Беклунда замкнуто на каком-либо классе D, то на многообразии его решений неограниченный рост порядка старшей производной прекращается, как только этот порядок становится равным порядку уравнения (и в силу уравнения старшая производная выражается через младшие). Поэтому может быть $\deg g_i < \infty$.

Теорема **11**. $\deg g_i \le \mathrm{Deg}\ g_i$ для любой образующей g_i, заданной преобразованием вида (8.1) и допускаемой любым фиксированным классом D.

Доказательство. Пусть на классе D $\mathrm{Deg}\ g_i = \gamma$, $\deg g_i = \sigma$ и $\gamma < \sigma$. Тогда по определению 17 $g_i^{\gamma} = E$ на ***любом*** (произвольном) фиксированном классе D_j, в частности и на D. Обозначим $\rho = = \sigma (\mathrm{mod}\ \gamma)$. Очевидно, $\rho < \sigma$, так как $\gamma < \sigma$. Тогда в силу $g_i^{\gamma} = E$ и $\deg g_i = \sigma$ оказывается $g_i^{\rho} = E$, что противоречит определению 18, согласно которому σ — наименьшее число, удовлетворяющее условию

$$g_i^{\alpha}\Big|_D = E \blacksquare$$

§9. Сингулярные точки ДМП. Инварианты ДМП.

В настоящем параграфе под множеством $\{\overline{a}_{ij}\}$ мы будем понимать совокупность векторов параметров произвольной орбиты $(g_i\ D)_j$ образующей g_i, допускаемой классом D.

Определение **19**. Значения вектора параметров $\overline{a}_{ij}$, соответствующие элементам орбиты $(g_i\ D)_j$, содержащей (формально) элемент, вектор параметров которого имеет хотя бы одну бесконечную компоненту, называются ***сингулярными точками первого рода*** образующей g_i.

Определение **20**. Значения вектора параметров $\overline{a}_{ij}$, соответствующие элементам орбиты $(g_i\ D)_j$, содержащей элемент, вектор параметров которого соответствует точке разрыва зависимости общего решения класса D от вектора параметров $\overline{a}$, называются ***сингулярными точками второго рода*** образующей g_i.

Обозначим множество допустимых значений вектора $\overline{a}$ в классе D символом $\mathrm{R}\ (D)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема **12**. Независимая образующая не имеет сингулярных точек первого рода на любом компактном множестве $S \subset \mathrm{R}\ (D)\blacksquare$

В сингулярных точках первого рода действие ДМП М формально приводит к уравнению, содержащему бесконечный существенный параметр, т.е. к выражению, не имеющему смысла. В сингулярных точках второго рода действие ДМП М формально определено, но применение алгебраического представления (8.4) дает ложный результат. Поэтому строение дискретной метагруппы в сингулярных точках нарушается, и некоторые симметрии исчезают. Это, в свою очередь, создает определенные неудобства при групповой классификации, исключая некоторые орбиты $\{\bar{a}_{ij}\}$ из регулярного симметрийного описания.

Для восстановления симметрии в сингулярных точках $\{\bar{a}_{ij}\} \subset \quad \subset$ R (D) необходимо пополнить класс D "предельными" элементами (включая и соответствующими бесконечно-удаленным точкам R (D)), т.е. построить замыкание класса D по метагруппе M $D \to D^+$, а затем продолжить метагруппу на замыкание D^+.

Определение 21. Продолжение метагруппы M на замыкание D^+ называется ***гладким***, если все регулярные (т.е. не обращающиеся в бесконечность) элементы преобразований и преобразованных уравнений могут быть получены предельным переходом $\bar{a}_i \to \bar{a}_{ij}$ (если $\bar{a}_{ij}$ — сингулярная точка на конечном интервале) или $\bar{a}_i \to \infty$.

Определение 22. Пусть задан класс D, допускающий ДМП $\mathrm{M}\{\mathrm{g}_i\}$, и его подкласс $D_1 \subset D$, допускающий ДМП $\mathrm{N}\{\mathrm{h}_i\}$. Если

$$\mathrm{M}\{\mathrm{g}_i\}\Big|_{D_1} \equiv \mathrm{N}\{\mathrm{h}_i\},$$

то будем говорить, что подкласс D_1 ***вложен*** в класс D по метагруппе M .

Понятие вложения классов по метагруппе позволяет описывать более общие классы уравнений, "наследующие" ДМП, допускаемые своими подклассами, и тем самым эффективно исследовать сингулярные точки ДМП.

Вернемся к специальному уравнению Риккати (6.1). В §7 мы нашли ДМП этого класса уравнений, которая оказалась бескончной циклической группой C_∞ , причем

$$\mathrm{R}\ (D) = \{\ n \in \mathbf{R}^1\}\backslash\{\ n = -2 - \frac{1}{k}\ ,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

ДМП задается единственной зависимой образующей a , определяемой функциональным представлением (7.3), (7.4) и алгебраическим представлением (7.6), $\mathrm{Deg\,a} = \deg \mathrm{a} = \infty$ при $n \neq -2$. Точки (7.8)

$$n = -2 - \frac{1}{k}$$

являются сингулярными точками первого рода, группа C_∞ вырождается в них в псевдогруппу. Орбита, содержащая сингулярные точки — единственная. Построение гладкого продолжения группы на эту орбиту можно провести, используя понятие вложения. Рассмотрим более широкий класс — уравнение Риккати в канонической форме

$$y' + Ay^2 = f(x). \tag{9.2}$$

Преобразование (7.3) переводит уравнение (9.2) в уравнение

$$z' + x^2 f(x) z^2 = Ax^{-2},$$

и для приведения его к канонической форме необходимо положить

$$t = \int x^2 f(x)\, dx. \tag{9.3}$$

При $f(x) = x^n$ преобразование (9.3) имеет вид

$$t \sim \begin{cases} x^{n+3}, & n \neq -3, \\ \ln x, & n = -3, \end{cases}$$

т.е. при $n = -3$ мы получаем “предельную точку” преобразования (7.4) — преобразование (7.10). Совершенно очевидно, что преобразование (7.3),(9.3) задает на более широком классе (9.2) ДМП, имеющую строение бесконечной циклической группы C_∞, а подкласс специальных уравнений Риккати (6.1) вложен в него по этой ДМП в силу выполнения соотношения (9.1).

Выше уже отмечалось, что при $n = -2$ $a^k = E$ при любом $k \in \in \mathbf{Z}$, т.е. значение $n = -2$ является неподвижной точкой алгебраического представления (7.6). Уравнение Риккати, соответствующее этому значению n, представляет собой простейший пример инварианта ДМП.

***<u>Определение</u>* <u>23</u>**. Уравнение или подкласс уравнений $D(\overline{a}_i)$, удовлетворяющие соотношению

$$\overline{a}_i = F_i(\overline{a}_i), \tag{9.4}$$

называется g_i-***инвариантом*** метагруппы M.

Иными словами, g_i-инвариантом называется конкретное уравнение $D(\overline{a}_i) \in D$, переводящееся преобразованием g_i в себя, а также любой подкласс $D_i \subset D$, ***каждый*** элемент которого обладает указанным свойством.

<u>Определение</u>* <u>24</u>**. Подкласс $D_1 \subset D$, замкнутый относительно одной или нескольких образующих метагруппы M, называется соответственно, (g_i)- или $(g_i, \ldots, g_j)$-инвариантным подклассом*** метагруппы M. Если набор $\{g_i, \ldots, g_j\}$ задает полный базис ДМП M, подкласс D_1 является M-инвариантным подклассом.

<u>Определение</u>* <u>25</u>**. Подмножество инвариантного подкласса $D^i \subset \subset D_1$, в котором под действием образующей g_i изменяется лишь одна компонента вектора параметров $\overline{a}$, а остальные неизменны, называется g_i-инвариантным семейством***.

Определение 26. Пересечение g_i-, ... , g_j-инвариантов или инвариантных подклассов D_1, D_2, ... , D_σ, называется соответственно $(g_i, \dots, g_j)$-***центром*** или $(\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \dots, \mathsf{D}_\sigma)$-***центром***.

Очевидно, если подклассы D_1, D_2, ... , D_σ являются, соответственно, (g_1)-, (g_2)-, ... , (g_σ)-инвариантными подклассами, то $(\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \dots, \mathsf{D}_\sigma)$-центр является $(g_1, g_2, \dots, g_\sigma)$-инвариантным подклассом.

Теорема 13. Для любой независимой образующей g_i ДМП M множество решений алгебраического уравнения (9.4) порождает подкласс $\mathsf{D}_i \subset D$, являющийся g_i-инвариантом. Если образующая g_i не является независимой, g_i-инвариантом является подкласс $\mathsf{D}_i \setminus \mathsf{D}_i^0$, где множество D_i^0 порождено множеством корней уравнения (9.4), обращающих преобразование g_i в тождественное.

Доказательство очевидно и вытекает из определений 15 и 23. Оговорка в формулировке теоремы указывает на то, что преобразование, задающее образующую и зависящее явно от вектора $\overline{a}$, может при некоторых значениях $\overline{a} = \overline{a}_i^0$ вырождаться в тождественное ■

Если уравнение (9.4) не имеет решений, g_i-инварианты не существуют. Это имеет место, например, если действие образующей эквивалентно фиксированному сдвигу по параметру — a : $\lambda \to \lambda + 1$, и характерно для многих бесконечных дискретных метагрупп.

Теорема 14. Пусть $\deg g_i \le C < \infty$, а ее алгебраическое представление (8.4) непрерывно. Тогда на любом (g_i)-инвариантном связном подклассе, лишенном сингулярных точек, существует хотя бы один g_i-инвариант.

Доказательство основано на принципе Шаудера. При выполнении условий теоремы уравнение (9.4) имеет хотя бы одно решение ■

Инвариантные подклассы, в отличие от инвариантов, существуют всегда. В частности, M-инвариантными являются (по определению) как сам класс D, так и орбита ***любого*** подкласса $\mathsf{MD}^j \subset\subset \mathsf{D}$. Поэтому нас будут интересовать ***связные собственные*** подклассы, не совпадающие ни со всем классом D, ни с теми орбитами, которые представляют собой объединение непересекающихся подклассов $\mathsf{D}_1^{(j)}$, $\mathsf{D}_2^{(j)}$, ... , $\mathsf{D}_k^{(j)}$.

Возможность описания ДМП алгебраическими представлениями (8.4) позволяет свести задачу поиска инвариантов и инвариантных подклассов к решению алгебраических и функциональных уравнений соответственно (см. §1.6).

§10. Дифференциальные инварианты. Понижение порядка уравнения.

В §1.4 было показано, что однопараметрическая группа Ли точечных преобразований имеет единственный независимый инвариант нулевого порядка; он удовлетворяет уравнению (1.4.5) (теорема 1.3). Выше (§3) было введено понятие дифференциального инварианта первого порядка. Он удовлетворяет уравнению

$$\underset{1}{X} v = 0,$$

т.е.

$$\xi\frac{\partial v}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \left[\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right)y' - \xi_y y'^2\right]\frac{\partial v}{\partial y'} = 0, \qquad (10.1)$$

имеющему характеристическую систему (3.15), что легко доказывается аналогично доказательству теоремы 1.3. Из (10.1) следует существование единственного независимого дифференциального инварианта первого порядка.

Согласно теореме 1.7, уравнения второго порядка, допускающие оператор X, могут быть записаны через инвариант $u(x, y)$, дифференциальный инвариант первого порядка $v(x, y, y')$ и ***дифференциальный инвариант второго порядка*** $w(x, y, y', y'')$. Последний удовлетворяет уравнению

$$\underset{2}{X} w = 0,$$

т.е.

$$\xi\frac{\partial w}{\partial x} + \eta\frac{\partial w}{\partial y} + \left[\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right)y' - \xi_y y'^2\right]\frac{\partial w}{\partial y'} +$$

$$+\left[\eta_{xx} + \left(2\eta_{xy} - \xi_{xx}\right)y' + \left(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}\right)y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + \left(\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y'\right)y''\right]\frac{\partial w}{\partial y''} = 0. \qquad (10.2)$$

Решение этого уравнения через соответствующую характеристическую систему может представить значительные трудности, поэтому лучше воспользоваться доказанной С.Ли теоремой, позволяющей избежать прямых вычислений и отыскивать дифференциальные инварианты второго порядка путем дифференцирования инвариантов нулевого и первого порядков.

<u>Теорема</u> 15. Пусть для заданного оператора X известны инвариант нулевого порядка (универсальный инвариант) $u(x, y)$ и дифференциальный инвариант первого порядка $v(x, y, y')$. Тогда путем дифференцирования получается дифференциальный инвариант второго порядка

$$w(x, y, y', y'') = \frac{dv}{du} = \frac{dv/dx}{du/dx} = \frac{v_x + v_y y' + v_{y'} y''}{u_x + u_y y'} \equiv \frac{Dv}{Du}\ . \qquad (10.3)$$

Любой другой дифференциальный инвариант не выше второго порядка является функцией от u, v, w.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$v(x, y, y') - ku(x, y) - l = 0, \tag{10.4}$$

где k и l — произвольные постоянные. Очевидно, уравнение (10.4) допускает оператор X, так как левая часть является дифференциальным инвариантом первого порядка. Если зафиксировать коэффициент k и варьировать l, то получится бесконечное семейство инвариантных уравнений. Естественно, совокупность всех интегральных кривых полученного семейства будет инвариантна относительно преобразований группы с оператором X. Но указанная совокупность совпадает с множеством интегральных кривых дифференциального уравнения второго порядка, полученного из уравнения (10.4) исключением параметра l путем дифференцирования. Следовательно, каждое решение уравнения второго порядка

$$dv - kdu = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{dv}{du} = k$$

переходит после преобразования рассматриваемой группы в некоторое решение того же уравнения. Обозначив $w = dv/du$, мы приходим к выводу, что уравнение $w - k = 0$ допускает оператор X и поэтому выражение

$$\underset{2}{X}(w - k) \equiv \underset{2}{X}\, w \tag{10.5}$$

обращается в нуль на решениях уравнения $w - k = 0$. Но так как это верно для всех k, то отсюда следует, что

$$\underset{2}{X}\, w = 0$$

тождественно, т.е. что функция w является инвариантом. Так как по предположению v зависит от y', w будет зависеть от y'', являясь тем самым дифференциальным инвариантом второго порядка. Единственность независимого инварианта второго порядка доказывается аналогично утверждениям о единственности независимых инвариантов нулевого и первого порядка ■

Замечание. Путем дальнейших дифференцирований можно получать дифференциальные инварианты более высоких порядков

$$\frac{d^2v}{du^2}, \quad \frac{d^3v}{du^3}, \quad \dots .$$

Таким образом оказывается, что любая группа Ли с оператором X имеет ***конечный базис инвариантов*** порядка не выше n. Это позволяет успешно применить ***общий принцип симметрии*** (см. §1.8). Например, уравнение второго порядка можно записать в инвариантах u, v, w, разрешить получившееся уравнение относительно w и, воспользовавшись формулой (10.3), представить это уравнение в виде уравнения первого порядка

$$\frac{dv}{du} = F(u, v). \qquad (10.6)$$

Этим достигается понижение порядка исходного уравнения — если найден интеграл

$$\Phi(u, v, C) = 0 \qquad (10.7)$$

уравнения (10.6), то решение уравнения второго порядка сводится к квадратурам, так как подстановка в (10.7) известных выражений для u и v приводит к уравнению первого порядка

$$\Phi(u(x, y),\ v(x, y, y'),\ C) = 0,$$

которое допускает оператор X в силу инвариантности u, v и поэтому интегрируется в квадратурах с помощью интегрирующего множителя (теорема 1 из §3) или приведением оператора X к каноническим переменным (теорема 1.4 из §1.4) — при этом уравнение приводится к автономному виду.

Из этих рассуждений становится очевидным ***смысл понижения порядка*** дифференциального уравнения — мы не уменьшили порядок,

$\boxed{!}$ а свели уравнение к ***системе специального вида***, одно из уравнений которой “развязано”, так как содержит только новые переменные и может решаться независимо от второго, а второе в данном случае решается всегда, так как “наследует” оператор X.

§11. О функционально-дифференциальных уравнениях.

Рассмотрим класс функционально-дифференциальных уравнений вида

$$\Phi(\ t, x(t), x(f_1(t)), \ldots , x(f_{n\text{-}1}(t)), x'(t), x'(f_1(t)), \ldots , x'(f_{n\text{-}1}(t))) = 0. \quad (11.1)$$

Простейшим уравнением вида (11.1) является уравнение

$$x'(t) = ax(-t), \qquad (11.2)$$

которое рассматривал Ч.Беббедж еще в начале XIX века. Нетрудно видеть, что аргументы неизвестной функции, входящей в уравнение (11.2), образуют циклическую группу C_2. Следуя принципам, изложенным в §1.9, обозначим $x(t) = x_1(t)$, $x(-t) = x_2(t)$, в результате чего уравнение (11.2) перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$x_1' = ax_2\,, \qquad x_2' = -\,ax_1\,,$$

что позволяет найти общее решение исходного уравнения в виде

$$x(t) = C\sin\left(at + \frac{\pi}{4}\right), \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Если рассматривать решения, определенные (и непрерывные) при $t \in \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, т.е. исключить то значение t, при котором аргументы совпадают, то уравнение (11.2) имеет двупараметрическое семейство решений

$$x(t) = \begin{cases} C_1 \sin at + C_2 \cos at, & t > 0, \\ C_1 \cos at + C_2 \sin at, & t < 0. \end{cases}$$

Приведенный пример показывает, что если аргументы уравнения (11.1) образуют группу, его удается в ряде случаев существенно упростить.

<u>Теорема</u> 16. Пусть n аргументов уравнения (11.1) являются элементами конечной группы G_m порядка m. Если уравнение (11.1) не инвариантно относительно группы G_m, оно сводится к системе m обыкновенных дифференциальных уравнений $(m \ge n)$ без преобразований аргумента

$$\Phi_k(\, t, x_1(t), \dots , x_m(t),\; x_1'(t), \dots ,\; x_m'(t)) = 0, \quad k = 1, \dots , m.$$

<u>Доказательство</u> аналогично доказательству теоремы 1.17. См. также замечание к теореме 1.17 ■

Аналогично уравнению (11.2) решается и более общее уравнение

$$x' = ax(t) + bx(-t), \qquad b \ne 0;$$

при $|\,a\,| < |\,b\,|$

$$x(t) = C\sin\left(\sqrt{b^2 - a^2}\,t + \varphi\right), \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}\ \mathrm{sign}\, b,$$

при $|\,a\,| > |\,b\,|$

$$x(t) = C\left[\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)e^{\sqrt{a^2-b^2}\,t} - be^{-\sqrt{a^2-b^2}\,t}\right];$$

при $a = b$ $\quad x(t) = C(2t + 1)$, а при $a = -\,b$ $\quad x = C$.

Уравнение

$$x'(t) = ax(\tau(t)), \qquad \text{где} \qquad \tau(\tau(t)) = t,$$

приводится к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$x''(t) = a^2\tau'(t)x(t),$$

и вообще, ***линейное*** уравнение вида (11.1), аргументы которого являются элементами циклической группы C_m , сводится к линейному дифференциальному уравнению порядка m .

Если уравнение (11.1) — нелинейное, в ряде случаев применение специальных приемов оказывается более эффективным, чем стандартная процедура, указанная в §1.9. Так, уравнение

$$x'(t) + x'(-t) = R(x(t), x(-t)),$$

где $R(u, v)$ — симметрическая функция, легко решается, если положить $R(x(t), x(-t)) = \alpha(t)$. Тогда $x'(t) + x'(-t) = \alpha(t)$ и

$$x(t) - x(-t) = \int_0^t \alpha(\tau)\, d\tau .$$

Решение задается неявной функцией

$$R\left(x(t),\ x(t) \ - \int \alpha(\tau)\, d\tau \right) = \alpha(t) ,$$

где $\alpha(t)$ — произвольная четная функция. Аналогично, в уравнении

$$x(t)x'(t) + x(-t)x'(-t) = a(x(t) + x(-t)) \qquad (11.3)$$

замена $x(t) + x(-t) = 2\alpha(t)$ и исключение $x(-t)$ из (11.3) приводит (с учетом того, что $x(0) = \alpha(0)$) к общему решению

$$x(t) = \alpha(t) + \frac{a}{\alpha(t)} \int_0^t \alpha(t)\, d\tau ,$$

где $\alpha(t)$ — произвольная четная функция. Тем не менее очевидно, что эффективность этих специальных приемов обусловлена дискретной симметрией множества аргументов. В заключение приведем аналог теоремы 1.18 для дифференциально-функциональных уравнений.

Теорема **17**. Пусть n аргументов уравнения (11.1) являются элементами бесконечной группы G . Если уравнение (11.1) не инвариантно относительно группы G , а группа G содержит бесконечную циклическую нормальную подгруппу H и фактор-группа G / H конечна, то уравнение (11.1) сводится к системе функционально-дифференциальных уравнений первого порядка с одним преобразованием аргумента ■

§12. Библиографические указания и комментарии.

В §1 разъясняется, какие функции мы будем считать общим или частным решением дифференциального уравнения. Трактовка, принятая в групповом анализе, не совсем привычна, так как (за немногим исключением) мы вообще не рассматриваем ни задачу Коши, ни краевые задачи. Весьма полезными будут следующие книги:

1. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979. — 744 с.
2. Савелов А.А. Плоские кривые. — М.: ГИФМЛ, 1960. — 296 с.

Как и в спецкурсе-1, материал по группам Ли и допускаемым операторам (части §§2-4 и §10) излагается по работам Н.Х.Ибрагимова:

3. Ибрагимов Н.Х. Групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений и принцип инвариантности в математической физике (к 150-летию со дня рождения Софуса Ли) / УМН, 1992. — Т.47, вып. 4(286). — С.83-144.
4. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. — М.: Знание, сер."Математика и кибернетика", №8. — 1989. — 48 с.
5. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа. — М.: Знание, сер."Математика и кибернетика", №7. — 1991. — 48 с.

Аналогично, материал по дискретным группам и метагруппам преобразований (части §§2,3,7 и §§8,9) дан, в основном, по книгам:

6. Зайцев В.Ф., Флегонтов А.В. Дискретно-групповые методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — Л.: ЛИИАН, 1991. — 240 с.
7. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям. Приложения в механике, точные решения. — М.: Наука, 1993. — 464 с.

Материал §§5,6 является новым; по крайней мере, автору не известны работы, в которых канонические преобразования уравнения Риккати выводятся из допускаемых им групп эквивалентности. Новым является и термин "метагруппа", введенный Т.А.Алексеевой и автором настоящего спецкурса в 1996 г. Различные обобщения понятия группы (для более точного понимания места таких объектов как паргруппа и метагруппа) можно изучать по книгам:

8. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1974. — 160 с.
9. Курош А.Г. Общая алгебра. Лекции 1969-1970 учебного года. — М.: Наука, 1974. — 160 с.
10. Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп. — Харьков-Киев: ОНТИ, 1937. — 176 с.

Материал по функционально-дифференциальным уравнениям (§11) в основном излагается по двум источникам:

11. Майстренко ЮЛ., Шарковский А.Н. О понижении числа

преобразований аргумента в функциональных и дифференциально-функциональных уравнениях // Качественные методы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Киев: изд. ИМ АН УССР, 1977. — с.57-70.

12. Шарковский А.Н. Дифференциально-функциональные уравнения с конечной группой преобразований аргумента // // Асимптотическое поведение решений дифференциально-функциональных уравнений. — Киев: изд. ИМ АН УССР, 1978. — с.118-142.

В заключение отметим бесспорно полезную книгу, содержащую, в частности, и доказательство теоремы Лиувилля (часть §7):

13. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Высшая школа, 1967. — 564 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§1. Предварительные замечания 3
§2. Преобразования производных. Формулы продолжения . 4
§3. Уравнения первого порядка, допускающие группу 7
§4. Канонический оператор 11
§5. Уравнение Риккати. Группы эквивалентности 14
§6. Существенные произвольные элементы. Специальное уравнение Риккати 17
§7. Дискретная группа Лиувилля специального уравнения Риккати 20
§8. Дискретные метагруппы преобразований 24
§9. Сингулярные точки ДМП. Инварианты ДМП 29
§10. Дифференциальные инварианты. Понижение порядка уравнения 33
§11. О функционально-дифференциальных уравнениях 35
§12. Библиографические указания и комментарии 38